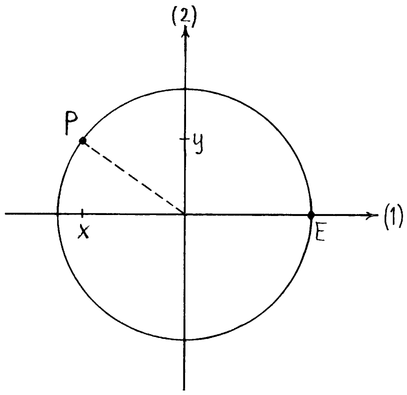
Cykloider

Vi begynder med at repetere noget af det tidligere gennemgåede som vi skal bruge.

Retningspunkt (repetition)

Figur 1 viser enhedscirklen. Det viste punkt P er anbragt sådan at den øverste af buerne mellem E og P har længden 2,53.



Figur 1

Vi forestiller os et bevægeligt punkt L der starter i E og gennemløber cirklen i positiv omløbsretning (dvs. mod uret). Første gang punktet L når P, har det gennemløbet en bue med længden 2,53. Derfor er P retningspunkt for vinklen 2,53 radianer.

Anden gang punktet L når P, har det gennemløbet en bue med længden $2{,}53 + 2\pi = 8{,}81$. Altså er P også retningspunkt for vinklen 8,81 radianer. P er retningspunkt for uendelig mange vinkler.

Da cirklens radius er 1, er dens omkreds 2π. Heraf følger at hvis punktet L starter i E og gennemløber cirklen i negativ omløbsretning, så når det P når det har gennemløbet en bue med længden $2\pi - 2{,}53 = 3{,}75$. Derfor er P også retningspunkt for vinklen $-3{,}75$ radianer.

Cosinus og sinus (repetition)

Cosinus til en vinkel er defineret som førstekoordinaten til retningspunktet for vinklen. For det punkt P som er omtalt ovenfor, kan førstekoordinaten x altså udregnes sådan:

$$x = \cos 2{,}53 = -0{,}82 .$$

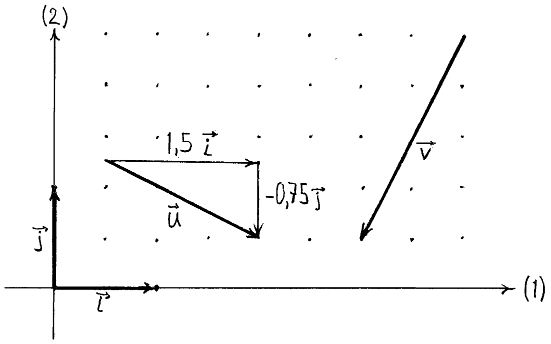
Vi kunne have benyttet enhver anden af retningsvinklerne for P, så x kunne fx også udregnes sådan:

$x = \cos(-3{,}75) = -0{,}82$.

Sinus til en vinkel er defineret som andenkoordinaten til retningspunktet for vinklen. P's andenkoordinat y kan altså udregnes sådan:

$y = \sin 2{,}53 = 0{,}57$.

Vektorers koordinater (repetition)



Figur 2

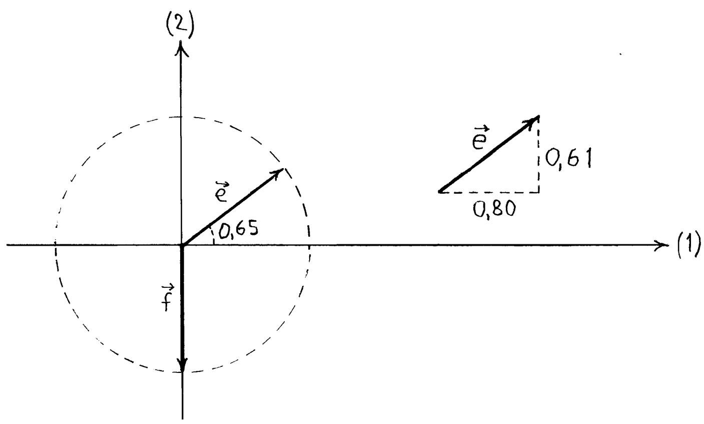
Figur 2 viser to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Det ses at

$\vec{u} = 1{,}5\vec{i} + (-0{,}75)\vec{j}$,

så $\vec{u}$'s koordinatsæt er $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}75 \end{pmatrix}$.

På tilsvarende måde ses at $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Enhedsvektorers koordinater (repetition)



Figur 3

Figur 3 viser to vektorer $\vec{e}$ og $\vec{f}$ som er enhedsvektorer (dvs. har længde 1). Da $\vec{e}$ har retningsvinklen $0{,}65$, er

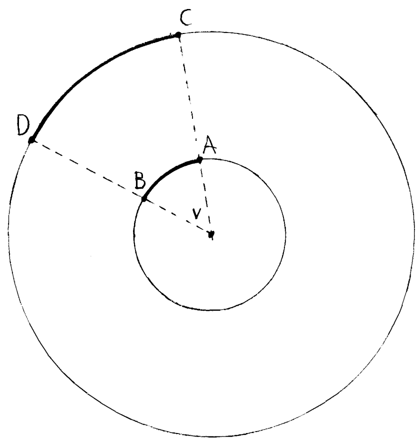
$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \cos 0{,}65 \\ \sin 0{,}65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}80 \\ 0{,}61 \end{pmatrix}.$$

Da cirklens omkreds er 2π, må retningsvinklen for $\vec{f}$ være $\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi$. Altså må

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{3}{2}\pi) \\ \sin(\frac{3}{2}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dette er i overensstemmelse med at vi umiddelbart kan se at $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Buelængde og radiantal (repetition)

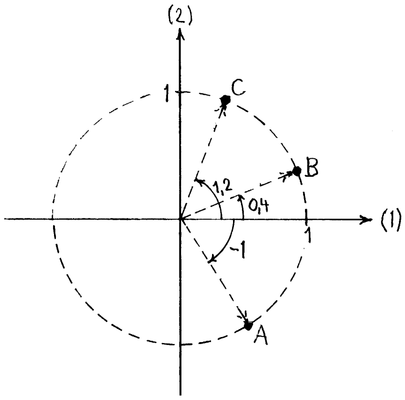


Figur 4

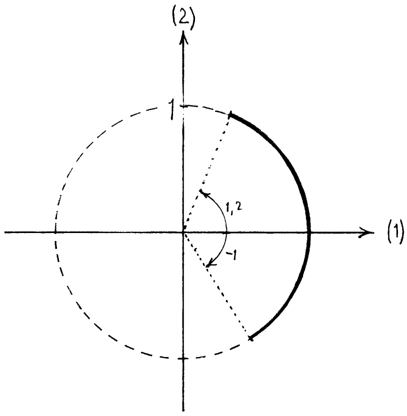
På figur 4 er vist to cirkler med samme centrum og med radier 1 og 2,7. Vinklen v er 0,93 radianer.

Da $v = 0{,}93$, har buen AB længden 0,93. Buen CD må være 2,7 gange så lang som buen AB, så dens længde er $2{,}7 \cdot 0{,}93 = 2{,}511 \approx 2{,}5$.

Cirkelbuer



Figur 5



Figur 6

På figur 5 er vist de punkter A, B og C hvis stedvektorer er

$$\begin{pmatrix}\cos(-1)\\ \sin(-1)\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\cos 0{,}4\\ \sin 0{,}4\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix}\cos 1{,}2\\ \sin 1{,}2\end{pmatrix},$$

altså enhedsvektorerne med retningsvinkler -1, $0{,}4$ og $1{,}2$.

Hvis vi i stedet bruger alle retningsvinkler i $[-1;1{,}2]$, får vi uendelig mange stedvektorer. De punkter der har disse stedvektorer, altså de punkter der har stedvektorerne

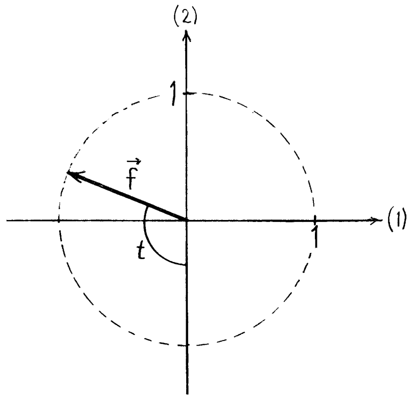
$$\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix},\quad t \in [-1;1{,}2],$$

udgør den cirkelbue der er vist på figur 6. Denne bue siges at have <u>parameterfremstillingen</u>

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned},\quad t \in [-1;1{,}2].$$

Ved hjælp af denne kan man få tegnet kurven på <u>grafregner</u> eller <u>computer</u>.

En speciel vektor



Figur 7

Når vektoren $\vec{f}$ fra figur 3 drejes t radianer i negativ omløbsretning, fås vektoren på figur 7. Dens retningsvinkel er $\frac{3}{2}\pi - t$, så

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{3}{2}\pi - t) \\ \sin(\frac{3}{2}\pi - t) \end{pmatrix}.$$

Ved at indsætte $\frac{3}{2}\pi - t$ for v i formlerne

$$\cos v = -\cos(v - \pi) \qquad \text{og} \qquad \sin v = -\sin(v - \pi)$$

ses at

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} -\cos(\frac{1}{2}\pi - t) \\ -\sin(\frac{1}{2}\pi - t) \end{pmatrix}.$$

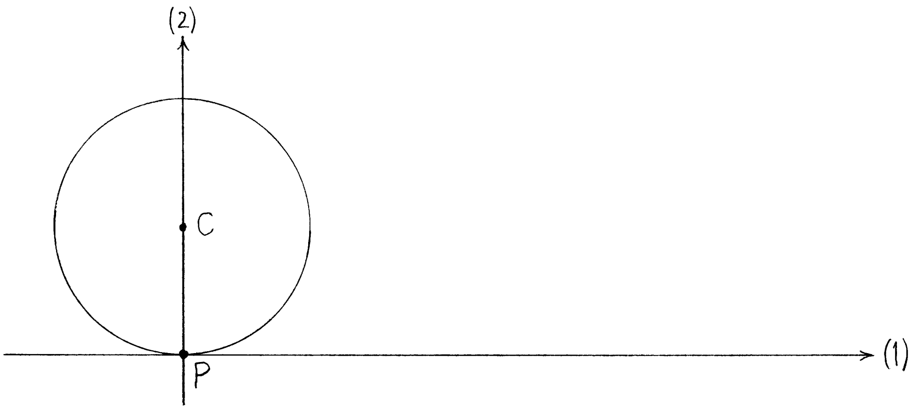
Af formlerne

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - v\right) = \sin v \qquad \text{og} \qquad \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - v\right) = \cos v$$

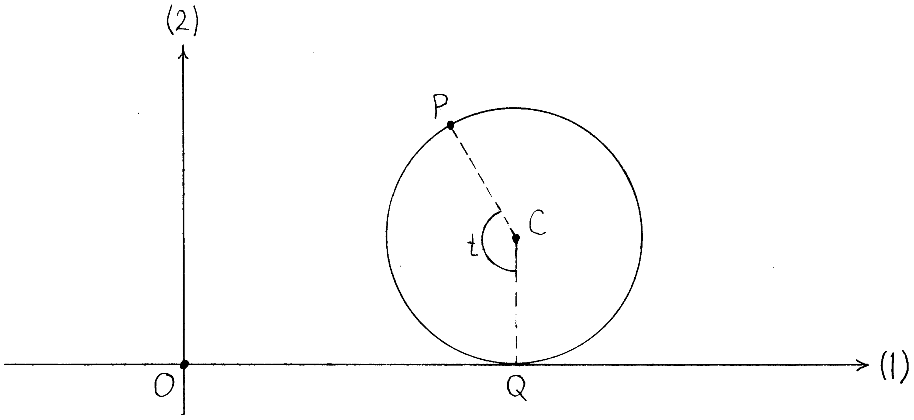
fås nu

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

En rullende cirkel



Figur 8



Figur 9

En cirkel med centrum C og radius r ruller hen ad førsteaksen mod højre. P er et punkt på cirklen.

På figur 8 ses at når centrums førstekoordinat er 0, så er P i punktet $O(0,0)$.

Fra figur 8 til figur 9 er vektor $\overrightarrow{CP}$ drejet i negativ omløbsretning. Lad t betegne det antal radianer $\overrightarrow{CP}$ er drejet.

$\overrightarrow{OP}$'s koordinater udtrykt ved t

C's andenkoordinat må være radius r.

C's førstekoordinat må være $r \cdot t$ da længden af OQ er lig længden af buen QP.

Altså er $C = (r \cdot t\,,\, r)$.

Retningsvinklen for $\overrightarrow{CP}$ er $\frac{3}{2}\pi - t$, så enhedsvektoren i $\overrightarrow{CP}$'s retning er

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{3}{2}\pi - t) \\ \sin(\frac{3}{2}\pi - t) \end{pmatrix},$$

som ifølge afsnittet "En speciel vektor" ovenfor er lig

$$\begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Altså fås $\overrightarrow{CP}$ ved at gange denne vektor med r :

$$\overrightarrow{CP} = r \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ -r \cdot \cos t \end{pmatrix}.$$

Nu ser vi at stedvektoren for P er

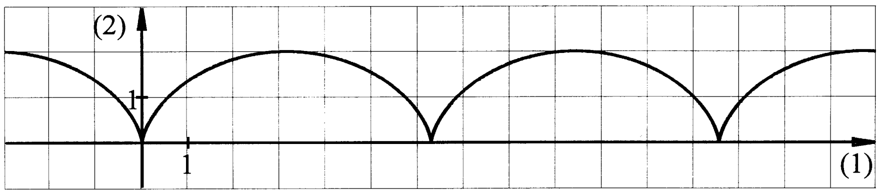
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} r \cdot t \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ -r \cdot \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot t - r \cdot \sin t \\ r - r \cdot \cos t \end{pmatrix}.$$

Sædvanlig cykloide

Når cirklen ruller, vil P gennemløbe en kurven der kaldes en sædvanlig cykloide. Af ovenstående følger at den har parameterfremstillingen

$$\begin{array}{l} x = r \cdot t - r \cdot \sin t \\ y = r - r \cdot \cos t \end{array} \quad , \quad t \in \mathbf{R} .$$

Hvis man i denne parameterfremstilling sætter r lig et bestemt tal, kan man få cykloiden tegnet på grafregner eller computer. Sættes $r = 1$, fås kurven på figur 10.



Figur 10

$\overrightarrow{OP}$'s koordinater når P ikke ligger på cirklen

Hvis afstanden fra C til P er mindre end r (figur 11) eller større end r (figur 12), fås kurver der har en anden form.

Lad a betegne afstanden fra C til P. Uanset om a er mindre end r, lig r eller større end r, gælder at enhedsvektoren i $\overrightarrow{CP}$'s retning er

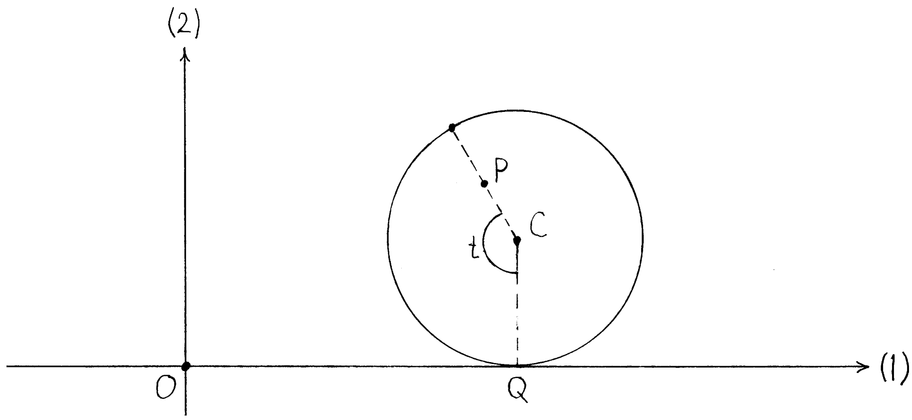
$$\begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix},$$

så $\overrightarrow{CP}$ fås ved at gange denne vektor med a:

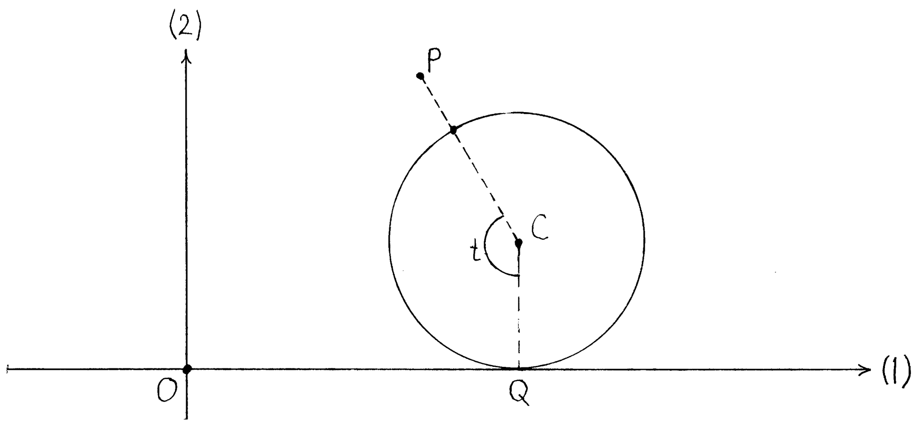
$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} -a\cdot\sin t \\ -a\cdot\cos t \end{pmatrix}.$$

Derfor er

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} r\cdot t \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a\cdot\sin t \\ -a\cdot\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot t - a\cdot\sin t \\ r - a\cdot\cos t \end{pmatrix}.$$



Figur 11



Figur 12

Forskellige cykloider

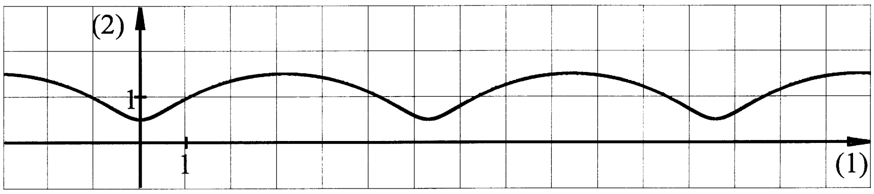
Af det foregående fremgår at at uanset om P ligger på cirklen, vil den kurve P gennemløber, have parameterfremstillingen

$$\begin{matrix} x = r \cdot t - a \cdot \sin t \\ y = r - a \cdot \cos t \end{matrix} \quad , \quad t \in \mathbf{R} \,.$$

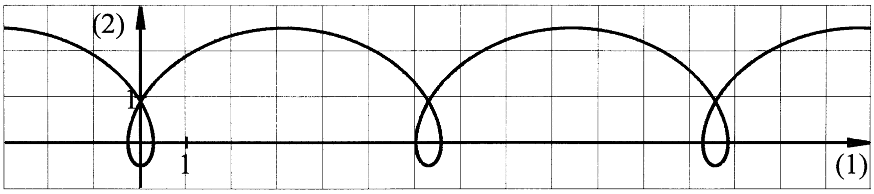
Hvis $r = 1$ og $a = 0.5$ fås cykloiden på figur 13.

Hvis $r = 1$ og $a = 1.5$ fås cykloiden på figur 14.

Hvis $a = r$, som på figur 10, kaldes kurven en sædvanlig cykloide.



Figur 13



Figur 14

Andre typer cykloider

Cykloiderne der er omtalt ovenfor, blev tegnet af et punkt der var fastgjort til en cirkel som rullede på en ret linje. Hvis cirklen i stedet ruller på krumme kurver, fås andre cykloider.

Hvis cirklen ruller udvendigt på en anden cirkel, fås en kurve der kaldes en epicykloide.

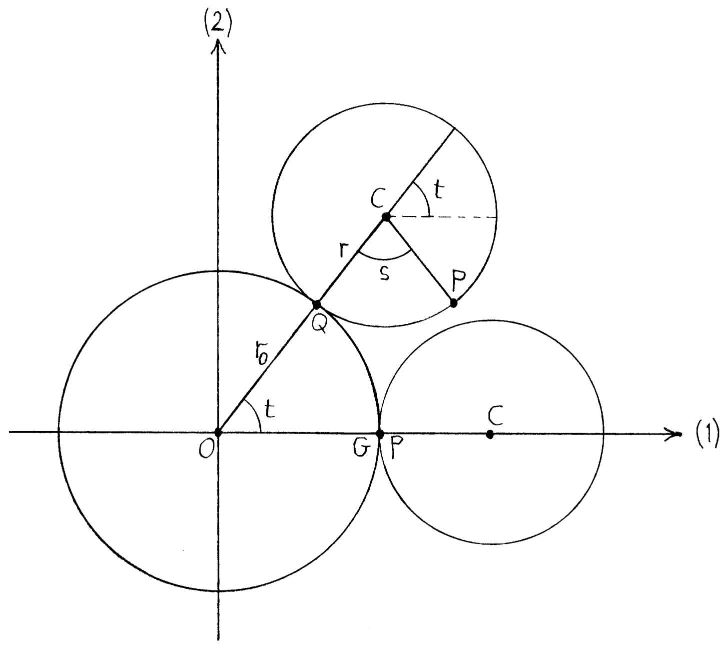
Hvis cirklen ruller indvendigt på en anden cirkel, fås en kurve der kaldes en hypocykloide.

Udledning af parameterfremstilling for epicykloider

På figur 15 ses en fast cirkel med centrum $O(0,0)$ og radius r_0.

Udvendigt på denne ruller i positiv omløbsretning en anden cirkel hvis radius er r, og hvis centrum kaldes C. Den rullende cirkel er vist på to tidspunkter. På det første af disse er det tegnende punkt P i punktet $G(r_0,0)$.

Fra det første til det andet tidspunkt er vektorerne $\overrightarrow{OC}$ og $\overrightarrow{CP}$ drejet i positiv omløbsretning. Vinklen fra $\overrightarrow{OG}$ til $\overrightarrow{OC}$ betegner vi t, og vinklen fra $\overrightarrow{CQ}$ til $\overrightarrow{CP}$ betegner vi s.



Figur 15

Vi indser at:

Buerne GQ og PQ har samme længde.

Buen GQ har længden $r_0 \cdot t$.

Buen PQ har længden $r \cdot s$.

Heraf følger at $r \cdot s = r_0 \cdot t$, så

(1) $\quad s = \dfrac{r_0}{r} \cdot t$.

Retningsvinklen for $\overrightarrow{CP}$ er $t + \pi + s$, så

$$\overrightarrow{CP} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(s+t+\pi \\ \sin(s+t+\pi \end{pmatrix}.$$

Ved at indsætte $s + t$ for v i formlerne

$$\cos(v+\pi) = -\cos v \qquad \text{og} \qquad \sin(v+\pi) = -\sin(v)$$

fås

$$\overrightarrow{CP} = r \cdot \begin{pmatrix} -\cos(s+t \\ -\sin(s+t \end{pmatrix} = -r \cdot \begin{pmatrix} \cos(s+t) \\ \sin(s+t) \end{pmatrix}.$$

Heraf og af (1) fås nu

$$\overrightarrow{CP} = -r \cdot \begin{pmatrix} \cos(s+t) \\ \sin(s+t) \end{pmatrix} = -r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\frac{r_0}{r} \cdot t + t) \\ \sin(\frac{r_0}{r} \cdot t + t) \end{pmatrix} = -r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\frac{r_0 + r}{r} \cdot t) \\ \sin(\frac{r_0 + r}{r} \cdot t) \end{pmatrix}.$$

Da $\overrightarrow{OC}$ har retningsvinklen t og længden $r_0 + r$, er

$$\overrightarrow{OC} = (r_0 + r) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Nu fås

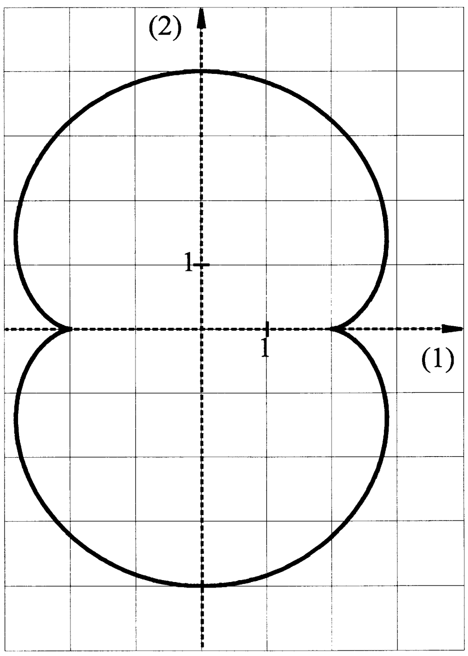
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = (r_0 + r) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\frac{r_0 + r}{r} \cdot t) \\ \sin(\frac{r_0 + r}{r} \cdot t) \end{pmatrix}.$$

Heraf følger at den kurve P gennemløber, har parameterfremstillingen

(2) $$\begin{aligned} x &= (r_0 + r) \cdot \cos t - r \cdot \cos(\frac{r_0 + r}{r} \cdot t) \\ y &= (r_0 + r) \cdot \sin t - r \cdot \sin(\frac{r_0 + r}{r} \cdot t) \end{aligned} \quad , \quad t \in \mathbf{R}.$$

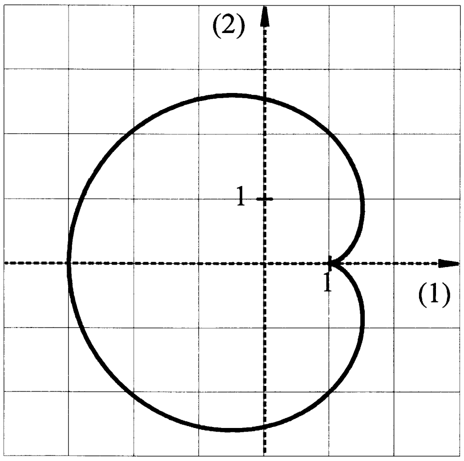
Nogle epicykloider

I (2) sætter vi $r_0 = 2$ og $r = 1$, og får tegnet kurven på grafregner eller computer. Det viser sig at kurven ser ud som vist på figur 16. En sådan epicykloide hvor $r = \frac{1}{2} r_0$, kaldes en nyrekurve.



Figur 16

Sættes i stedet $r_0 = 1$ og $r = 1$, fås kurven på figur 17. En sådan epicykloide hvor $r = r_0$, kaldes en hjertekurve.



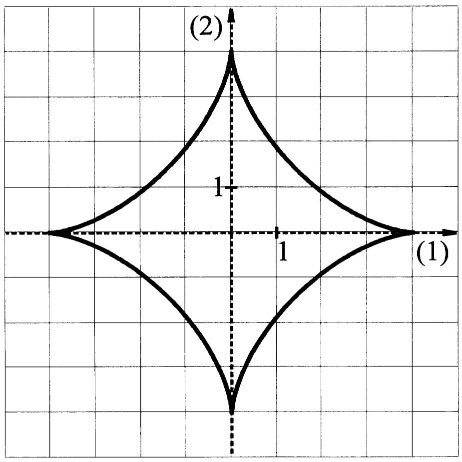
Figur 17

Hypocykloider

Ruller cirklen indvendigt på en cirkel, så gennemløber P en kurve med parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= (r_0 - r)\cdot\cos t + r\cdot\cos(\frac{r-r_0}{r}\cdot t) \\ y &= (r_0 - r)\cdot\sin t + r\cdot\sin(\frac{r-r_0}{r}\cdot t) \end{aligned} \quad , \quad t \in \mathbf{R}\,.$$

Sættes $r_0 = 4$ og $r = 1$, fås kurven på figur 18. En sådan hypocykloide hvor $r = \frac{1}{4}r_0$, kaldes en <u>asteroide</u>.



Figur 18