Bogstavregning

En indledning for stx og hf

2. del

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

2008 Karsten Juul

Indhold

Bogstavregning. En indledning for stx og hf. 2. del

1. udgave 2008

Afsnit 10. Gange to parenteser

10.1 Regel (Gange parenteser sammen)

Vi kan gange to parenteser ved at gange hvert led i den ene med hvert led i den anden.

10.2 Eksempel (Hvordan regel 10.1 skal forstås)

I udtrykket

$$(3+x)\cdot(2-a+4\cdot k)$$

indeholder første parentes de to led

$$3 \qquad x$$

og anden parentes de tre led

$$2 \qquad -a \qquad 4k$$

Ved at gange første led i første parentes med hvert af leddene i anden parentes får vi de tre led:

$$6 \qquad -3a \qquad 12k$$

Ved at gange andet led i første parentes med hvert af leddene i anden parentes får vi:

$$2x \qquad -ax \qquad 4kx$$

De seks led vi har beregnet, lægger vi sammen og får:

$$(3+x)\cdot(2-a+4\cdot k) \ = \ 6-3a+12k+2x-ax+4kx$$

10.3 Eksempel (Advarsel)

Der gælder at $\quad 4-(a+2)(b-3) \ = \ 4-(ab-3a+2b-6)$ ☺

Vi kan **ikke** omskrive $\quad 4-(a+2)(b-3)$ til $4-ab-3a+2b-6$ ☹

Afsnit 10. Øvelser

10.4 Øvelse (Hvilke er ens?)

Hvilke af følgende udtryk er lig hinanden uanset hvilke tal a og b står for:

(a) $(4a)\cdot(2b)$	(b) $8a\cdot 4ab$	(c) $4\cdot a\cdot 2\cdot b$
(d) $4\cdot 2\cdot a\cdot b$	(e) $(4\cdot 2)\cdot(a\cdot b)$	(f) $8ab$

10.5 Øvelse (Hvilke er ens?)

Hvilke af følgende udtryk er lig hinanden uanset hvilke tal k og x står for:

(a) $k\cdot(-3x)$	(b) $k\cdot(-3)\cdot x$	(c) $kx-3$
(d) $-3\cdot k\cdot x$	(e) $-3kx$	(f) $(k-3)x$

10.6 Øvelse (Gang sammen)

Gang parenteserne sammen:

(a)	$(2+a)(b+5)$	(b)	$(a-2)(b+3)$	(c)	$(a-1)(4-b)$
(d)	$(3+2a)(4+b)$	(e)	$(5a-4)(-3b+2)$	(f)	$(a+2)(3-b-4c)$

10.7 Øvelse (Reducér)

(1) Reducér:

(a)	$(x-4)(k-3)-k(x-3)$	(c)	$(5-4)(2x-3k+4)$
(b)	$4-(1+x)(3+k)+k$	(d)	$(3-k)(2x-5)+(kx+14)$

(2) I hvilket af de fire udtryk er det ikke smart at bruge 10.1

10.8 Øvelse (Hvad beregner regneudtrykket?)

I en klasse med 14 piger og 20 drenge har hver elev 8 store bøger og 11 små bøger (og ikke andre bøger).

(1) Afgør for hver af følgende udregninger hvad det er den pågældende udregning beregner.
- (a) Læg 20 til 14.
- (b) Læg 11 til 8. Gang 20 med resultatet.
- (c) Læg 20 til 14. Læg 11 til 8. Gang de to resultater.
- (d) Læg 20 til 14 og gang resultatet med 8. Læg 20 til 14 og gang resultatet med 11. Læg de to gangeresultater sammen.
- (e) Gang 14 med 8. Gang 14 med 11. Gang 20 med 8. Gang 20 med 11. Læg de fire resultater sammen.

(2) Skriv hver af de fem udregninger som et regneudtryk.

(3) Afgør hvilke af regneudtrykkene der er lig hinanden, og skriv disse med lighedstegn imellem.

10.9 Øvelse (Hvad beregner regneudtrykket?)

Vi køber r røde sodavand og g grønne sodavand. For hver sodavand betaler vi prisen x kr. plus panten p kr.
For hvert af følgende regneudtryk skal du kort angive hvad det beregner, og regneudtryk der er lig hinanden, skal du opskrive med lighedstegn imellem.

(a)	$rx+rp$	(d)	$(r+g)x+(r+g)p$
(b)	$x+p$	(e)	$(r+g)(x+p)$
(c)	$r(x+p)$	(f)	$rx+rp+gx+gp$

10.10 Øvelse (Hvad beregner regneudtrykket?)

Et puslespil består af nogle grønne brikker og nogle røde brikker. Hver elev i en klasse får udleveret et eksemplar af puslespillet.

(1) Afgør for hver af fem følgende udregninger hvad det er den pågældende udregning beregner.

- (a) Træk antal drenge fra antal elever. Læg antal røde til antal grønne. Gang de to resultater.
- (b) Læg antal røde til antal grønne, og gang antal elever med resultatet. Læg antal røde til antal grønne, og gang resultatet med antal drenge. Træk sidste gangeresultat fra første gangeresultat.
- (c) Gang antal elever med antal grønne. Gang antal elever med antal røde. Læg de to resultater sammen.
- (d) A: Gang antal elever med antal grønne. B: Gang antal elever med antal røde. C: Gang antal drenge med antal grønne. D: Gang antal drenge med antal røde. E: Læg resultat B til resultat A. F: Træk resultat C fra resultat E. Træk resultat D fra resultat F.
- (e) Læg antal røde til antal grønne. Gang antal elever med resultatet.

(2) Skriv hver af de fem udregninger som et regneudtryk hvor e, d, g og r står for hhv. antal elever i klassen, antal drenge i klassen, antal grønne brikker i ét puslespil og antal røde brikker i ét puslespil.

(3) Afgør hvilke af regneudtrykkene der er lig hinanden, og skriv disse med lighedstegn imellem.

10.11 Øvelse (Hvad beregner regneudtrykket?)

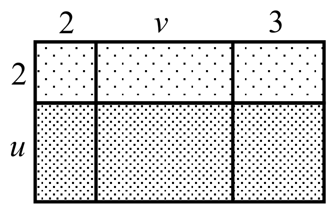
Figuren viser et rektangel der er delt op i seks mindre rektangler.
For hvert af følgende regneudtryk skal du kort angive hvad det beregner:

(1) $2+v+3$

(2) $(2+u)(2+v+3)$

(3) $4+2v+6$

(4) $2u+vu+3u$



Afsnit 11. x^2, x^3, x^4 osv.

11.1 Regel (Hvad betyder x^2, x^3, x^4 osv.?)

$$x^2 = x \cdot x$$

$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

osv.

11.2 Eksempel

Når du afleverer opgaver, behøver du ikke medtage mellemregninger som dem der er skrevet i de syv udregninger (1)-(7).

(1) $a^3 + a^3 \;=\; 2a^3$

(2) $a^3 \cdot a^3 \;=\; (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \;=\; a^6$

(3) $(ab)^2 \;=\; (ab) \cdot (ab) \;=\; a \cdot a \cdot b \cdot b \;=\; a^2 b^2$

(4) $(a+b)^2 \;=\; (a+b)(a+b) \;=\; a \cdot a + a \cdot b + a \cdot b + b \cdot b \;=\; a^2 + 2ab + b^2$

(5) $(a^3)^2 \;=\; a^3 \cdot a^3 \;=\; (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \;=\; a^6$

(6) $a^2 \cdot 3ab^2 \;=\; a \cdot a \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot b \;=\; 3a^3 b^2$

(7) $\dfrac{a^2 b^3}{a^3 b} \;=\; \dfrac{a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b}{a \cdot a \cdot a \cdot b} \;=\; \dfrac{b^2}{a}$

(8) $\dfrac{a^2 + ab}{ab^2 + b^3} \;=\; \dfrac{a \cdot (a+b)}{b^2 \cdot (a+b)} \;=\; \dfrac{a}{b^2}$

Afsnit 11. Øvelser

11.3 Øvelse (Hvilke er ens?)

Afgør hvilke af de seks udtryk der er lig hinanden (se 11.2).

(a) $3x^2 + 3 + x^2$

(b) $x^2 \cdot 3x^2 \cdot 3$

(c) $x^2 + x^2 + x^2 + 3 + x^2$

(d) $x \cdot x \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot 3$

(e) $9x^4$

(f) $4x^2 + 3$

11.4 Øvelse (Reducér)

Reducer de fire udtryk (se 11.2).

(a) $4x - x^2 + x - 4x^2$

(b) $a^2 b + 6ab + 2(a^2 b - 3ab)$

(c) $(2x)^2 - x(2+3x) + x$

(d) $a(b^3 - b) - (1 + b^2)ab$

11.5 Øvelse (Hvilke er ens?)

Afgør hvilke af de seks udtryk der er lig hinanden (se 11.2).

(a) $a^2 \cdot a^{10}$

(b) a^{20}

(c) a^{12}

(d) $a \cdot a \cdot a^{10}$

(e) $a^{10} \cdot a^{10}$

(f) $(a^{10})^2$

11.6 Øvelse (Hvilke er ens?)

Afgør hvilke af de fire udtryk der er lig hinanden (se 11.2).

(a) $\dfrac{(a^2)^3}{a^2 \cdot a^3}$ (c) $\dfrac{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}{a^2 \cdot a \cdot a \cdot a}$

(b) $\dfrac{a^2 + a^2 + a^2}{a^6}$ (d) $\dfrac{3a^2}{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}$

11.7 Øvelse (Hvilke er ens?)

Afgør hvilke af de seks udtryk der er lig hinanden (se 11.2).

(a) $a^2 + a^2$ (b) $(a+a) \cdot a$ (c) $a + a^2$

(d) $(1+1) \cdot a^2$ (e) $2a^2$ (f) $(1+a) \cdot a$

11.8 Øvelse (Reducér)

Reducer de to udtryk (se 11.2 og 11.7).

(a) $\dfrac{x^3}{x^2 \cdot x} + \dfrac{x^2 + x^2}{x \cdot x}$ (b) $\dfrac{(x^4)^2}{x^4 \cdot x^4}$

11.9 Øvelse (Hvilke er ens?)

Afgør hvilke af de fire udtryk der er lig hinanden (se 11.2).

(a) $\dfrac{6-2x}{3x-x^2}$ (b) $\dfrac{2(3-x)}{x(3-x)}$ (c) $\dfrac{x^2-2x}{3x-x^2}$ (d) $\dfrac{(x-2)x}{(3-x)x}$

11.10 Øvelse (Reducér)

Reducer de to udtryk (se 11.2 og 11.9).

(a) $\dfrac{x^2+2x}{x-x^3}$ (b) $\dfrac{x-x^2}{3-3x}$

11.11 Øvelse (Hvilke er ens?)

Afgør hvilke af de otte udtryk der er lig hinanden.

(a) $x^2 - 9$ (e) $(x+3)(x-3)$

(b) $(x-3)^2$ (f) $(x+3)(x+3)$

(c) $(x-3)(x-3)$ (g) $x^2 + 6x + 9$

(d) $x^2 - 6x + 9$ (h) $(x+3)^2$

11.12 Øvelse

Gang parenteserne sammen.

(a) $(m+n)(m+n)$

(b) $(m-n)(m-n)$

(c) $(m+n)(m-n)$

Afsnit 12. Kvadratsætninger

12.1 Regel (Kvadratsætninger)

1. kvadratsætning: $(a+b)^2 \;=\; a^2+2ab+b^2$

2. kvadratsætning: $(a-b)^2 \;=\; a^2-2ab+b^2$

3. kvadratsætning: $(a+b)(a-b) \;=\; a^2-b^2$

Gyldigheden af kvadratsætningerne følger af øvelse 11.12 .

Kvadratet på et tal er det samme som *tallet opløftet til anden*, så kvadratet på 3 er 9, og kvadratet på $2x$ er $4x^2$.

12.2 Eksempel (1. kvadratsætning)

Der gælder $(a+b)^2 \;=\; (2x+3)^2$

hvis $a=2x$ og $b=3$

og så er $a^2+2ab+b^2 \;=\; (2x)^2+2\cdot(2x)\cdot 3+3^2 \;=\; 4x^2+12x+9$

Altså er

(1) $(2x+3)^2 \;=\; 4x^2+12x+9$

ifølge 1. kvadratsætning.

Når du afleverer opgaver, må du gerne foretage en omskrivning som (1) uden at skrive mellemregningerne.

12.3 Eksempel (3. kvadratsætning)

Der gælder $(a+b)(a-b) \;=\; (2x+3)(2x-3)$

hvis $a=2x$ og $b=3$

og så er $a^2-b^2 \;=\; (2x)^2-3^2 \;=\; 4x^2-9$

Altså er

(1) $(2x+3)(2x-3) \;=\; 4x^2-9$

ifølge 3. kvadratsætning.

Når du afleverer opgaver, må du gerne foretage en omskrivning som (1) uden at skrive mellemregningerne.

12.4 Øvelse (1. kvadratsætning)

Omskriv ved hjælp af 1. kvadratsætning:

(a) $(x+4)^2$ (b) $(1+x)^2$ (c) $(3x+2)^2$

(d) $(5+4x)^2$ (e) $(u+2v)^2$ (f) $(2u+3v)^2$

12.5 Øvelse (1. kvadratsætning brugt baglæns)

(1) Find ud af hvad der skal indsættes for a og b for at

$$a^2+2ab+b^2 \;=\; x^2+6x+9$$

(2) Brug svaret på (1) til at
omskrive x^2+6x+9 til formen $(a+b)^2$

(3) Find ud af hvad der skal indsættes for a og b for at

$$a^2+2ab+b^2 \;=\; 1+12x+36x^2$$

(4) Brug svaret på (3) til at
omskrive $1+12x+36x^2$ til formen $(a+b)^2$

(5) Omskriv $16x^2+40kx+25k^2$ til formen $(a+b)^2$

12.6 Øvelse (2. kvadratsætning)

Omskriv ved hjælp af 2. kvadratsætning:

(a) $(20-x)^2$ (b) $(2x-7)^2$ (c) $(4u-6v)^2$ (d) $(ax-c)^2$

12.7 Øvelse (2. kvadratsætning brugt baglæns)

(1) Find ud af hvad der skal indsættes for a og b for at

$$a^2-2ab+b^2 \;=\; 4-12x+9x^2$$

(2) Brug svaret på (1) til at
omskrive $4-12x+9x^2$ til formen $(a-b)^2$

(3) Omskriv $16a^2-16ab+4b^2$ til formen $(a-b)^2$

12.8 Øvelse (3. kvadratsætning)

Omskriv ved hjælp af 3. kvadratsætning:

(a) $(5+3x)(5-3x)$ (c) $(2pq+1)(2pq-1)$

(b) $(4p+3q)(4p-3q)$ (d) $(x^2+1)(x^2-1)$

12.9 Øvelse (3. kvadratsætning brugt baglæns)

(1) Find ud af hvad der skal indsættes for a og b for at

$$a^2 - b^2 = x^2 - 9$$

(2) Brug svaret på (1) til at omskrive $x^2 - 9$ til formen $(a+b)(a-b)$

(3) Find ud af hvad der skal indsættes for a og b for at

$$a^2 - b^2 = 4 - 16x^2$$

(4) Brug svaret på (3) til at omskrive $4 - 16x^2$ til formen $(a+b)(a-b)$

(5) Omskriv $u^2v^2 - 1$ til formen $(a+b)(a-b)$

12.10 Øvelse (Reducér)

Reducer de 6 udtryk (se 12.1).

(a) $(x+y)^2 - x^2$

(b) $(x-y)^2 + 2xy$

(c) $(x+2y)^2 - 4y^2$

(d) $y^2 + (x+y)(x-y)$

(e) $y^2 - (x-y)^2$

(f) $9x^2 - (3x+2y)(3x-2y)$

12.11 Øvelse (Reducér)

Reducer de 4 udtryk (se 12.1).

(a) $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$

(b) $\dfrac{a^2 - b^2}{3a + 3b}$

(c) $\dfrac{x^2 - 16}{2x - 8}$

(d) $\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4}$

12.12 Øvelse (Hvad beregner regneudtrykket?)

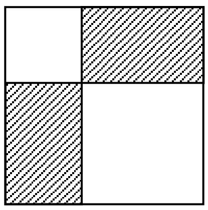
Figuren viser et stort kvadrat der er delt op i to små kvadrater og to rektangler. Hvis a står for længderne af siderne i det mindste af de små kvadrater, og b står for længderne af siderne i det andet, hvad beregner følgende regneudtryk så?

(1) $a + b$

(2) $(a+b)^2$

(3) $a^2 + b^2$

(4) $2ab$



Afsnit 13. Brøker 2. del

13.1 Regel (Brøkregler)

(a) Vi ændrer ikke en brøks talværdi når vi forlænger (dvs. ganger tæller og nævner med samme tal) eller forkorter (dvs. dividerer tæller og nævner med samme tal):

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot k}{b\cdot k} \qquad \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}$$

(b) Vi kan gange to brøker ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

(c) Vi kan gange en brøk med et tal ved at gange brøkens tæller med tallet:

$$\frac{a}{b}\cdot c = \frac{a\cdot c}{b} \qquad c\cdot\frac{a}{b} = \frac{c\cdot a}{b}$$

(d) Vi kan dividere en brøk med et tal ved at gange nævneren med tallet:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b\cdot c}$$

(e) Vi kan dividere med en brøk ved at gange med den omvendte brøk:

$$c : \frac{a}{b} = c\cdot\frac{b}{a} \qquad \frac{c}{\frac{a}{b}} = c\cdot\frac{b}{a}$$

(f) Hvis brøkerne har samme nævner, kan vi sætte på fælles brøkstreg sådan:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Ellers må vi først forlænge brøkerne så de får samme nævner (se 13.2).

13.2 Eksempel (Sætte på fælles brøkstreg)

Her er to eksempler på hvordan vi kan sætte på fælles brøkstreg ved først at forlænge så brøkerne får samme nævner:

$$\frac{x}{6}+\frac{1}{2} = \frac{x}{6}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3} = \frac{x}{6}+\frac{3}{6} = \frac{x+3}{6}$$

$$\frac{3}{2x}-\frac{1}{4} = \frac{3\cdot 2}{2x\cdot 2}-\frac{1\cdot x}{4\cdot x} = \frac{6}{4x}-\frac{x}{4x} = \frac{6-x}{4x}$$

13.3 Eksempel (Advarsel)

Der gælder $\frac{2}{5}-\frac{1+x}{5} = \frac{2-(1+x)}{5}$ ☺

Vi kan **ikke** omskrive $\frac{2}{5}-\frac{1+x}{5}$ til $\frac{2-1+x}{5}$ ☹

13.4 Øvelse (Sætte på fælles brøkstreg)

Sæt på fælles brøkstreg:

(a) $\frac{1}{3}-\frac{x}{12}$ (b) $\frac{2x}{3}+\frac{1}{6}$ (c) $\frac{5}{6}+\frac{x}{4}$

(d) $\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$ (e) $\frac{x}{2}-\frac{2}{x}+\frac{1}{4x}$ (f) $\frac{2}{3}-\frac{x-2}{9}$

13.5 Øvelse (Hvilke er ens?)

Afgør hvilke af de otte udtryk der er lig hinanden.

(a) $\frac{h\cdot 3}{k\cdot 3}$ (b) $\frac{h}{k}\cdot\frac{3}{3}$ (c) $\frac{h}{k}\cdot 1$ (d) $\frac{h}{k}$

(e) $\frac{h}{k\cdot 3}$ (f) $\frac{h}{k}\cdot\frac{1}{3}$ (g) $\frac{h}{k}:\frac{3}{1}$ (h) $\frac{h}{k}:3$

13.6 Øvelse (Hvilke er ens?)

Afgør hvilke af de otte udtryk der er lig hinanden.

(a) $3\cdot\frac{h}{k}$ (b) $\frac{h}{k}+\frac{h}{k}+\frac{h}{k}$ (c) $\frac{h+h+h}{k+k+k}$ (d) $\frac{3\cdot h}{3\cdot k}$

(e) $\frac{h+h+h}{k}$ (f) $\frac{3}{3}\cdot\frac{h}{k}$ (g) $\frac{h}{k}$ (h) $\frac{3\cdot h}{k}$

13.7 Øvelse (Hvilke er ens?)

Afgør hvilke af de seks udtryk der er lig hinanden.

(a) $\frac{5}{\frac{2}{3}}$ (b) $5:\frac{2}{3}$ (c) $5\cdot\frac{2}{3}$

(d) $5\cdot\frac{3}{2}$ (e) $\frac{\frac{5}{2}}{\frac{2}{3}}$ (f) $\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}$

13.8 Øvelse (Reducér)

Reducér:

(a) $6\cdot\frac{1}{2x}$ (b) $\frac{a}{\frac{1}{b}}:b$ (c) $\frac{\frac{h}{200}}{\frac{k}{300}}$

(d) $\frac{3n}{x}-\frac{n}{x}$ (e) $\frac{1}{h}+\frac{1+h}{h^2}$ (f) $\frac{1+x}{x}-1$