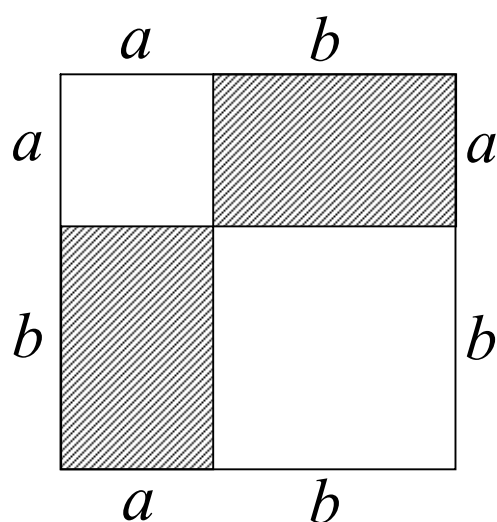


Bogstavregning

for
gymnasiet og hf



2010 (2012) Karsten Juul

Til eleven

Brug blyant og viskelæder når du skriver og tegner i hæftet, så du får et hæfte der er egnet til jævnlige slå op i under dit videre arbejde med de andre emner.

Indhold

Rækkefølge af + og ·	1
Samle led af samme type	2
Gange ind i parentes 1. del	4
Rækkefølge af – og · samt af + og –	6
Gange ind i parentes 2. del	10
Hæve parentes	11
Fortegn 1. del	15
Brøk (division) 1. del	15
Fortegn 2. del	18
Regler om ligevægt	19
Isolere	26
x^2	30
Brøk 2. del	34
Gange to parenteser	36
x^2 , x^3 , x^4 osv.	40
Kvadratsætninger	43
To ligninger med to ubekendte	46

Udgaven fra 2010 har ændret adresse til
http://mat1.dk/bogstavregning_for_gymnasiet_og_hf_2010.pdf

Gå ind på <http://mat1.dk/noter.htm> for at downloade nyeste version af dette hæfte.

Bogstavregning for gymnasiet og hf

© 2010-2013 Karsten Juul

13/4-2013

Dette hæfte kan downloades fra www.mat1.dk

Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til kj@mat1.dk som oplyser at dette hæfte benyttes, og oplyser om hold, niveau, lærer og skole.

Rækkefølge af + og ·

Teori 1

Udtryk i parentes skal vi regne ud først.

Når et tal står mellem + og ·
så skal vi udregne gange før plus.

Dette har man bestemt.
Så skal man ikke skrive
så mange parenteser.

Når et tal står mellem to +'er, så kan vi selv
vælge hvilket af de to tegn vi vil udregne først.

Dette betyder:

Vi kan omskrive $3+2\cdot 4$ til $3+8$

Vi kan ikke omskrive $3+2\cdot 4$ til $5\cdot 4$

Vi kan ikke omskrive $3+2\cdot x$ til $5\cdot x$

Vi kan ikke omskrive $3+2x$ til $5x$

Her skal læseren
forestille sig at der
står gangetegn.

Vi kan omskrive $4+3+2\cdot x$ til $7+2\cdot x$

Her skal · udregnes først,
så vi kan ikke udregne noget
før vi kender tallet x.

Hvis + skal udregnes før ·, så skal vi skrive en parentes:

Vi kan omskrive $(3+2)\cdot 4$ til $5\cdot 4$

Øvelse 2

- (a) Kan vi omskrive $5\cdot 3+4$ til $15+4$? Svar: _____ .
- (b) Kan vi omskrive $5\cdot 3+4$ til $5\cdot 7$? Svar: _____ .
- (c) Kan vi omskrive $x\cdot 4+1$ til $x\cdot 5$? Svar: _____ .
- (d) Kan vi omskrive $x+4\cdot 3$ til $x+12$? Svar: _____ .
- (e) Kan vi omskrive $x\cdot (5+3)$ til $x\cdot 8$? Svar: _____ .
- (f) Kan vi omskrive $6\cdot 2+3x$ til $6\cdot 5x$? Svar: _____ .
- (g) Kan vi omskrive $6\cdot 2+3x$ til $12+3x$? Svar: _____ .
- (h) Kan vi omskrive $4\cdot 3+2+5$ til $4\cdot 5+5$? Svar: _____ .
- (i) Kan vi omskrive $4\cdot 3+2+5$ til $4\cdot 3+7$? Svar: _____ .
- (j) Kan vi omskrive $3\cdot (4+x)$ til $12+x$? Svar: _____ .
- (k) Kan vi omskrive $(5+6)\cdot 3$ til $5+18$? Svar: _____ .

Øvelse 3

I nogle spil kan vi udregne antal point når vi kender antal krydser.
Vi lader x stå for antal krydser.

- (a) I et spil kan vi udregne antal point sådan:

Læg antal krydser til 10.
Gang resultatet med 4.

Hvilke(t) af regneudtrykkene (1) og (2) angiver disse udregninger?

(1) $10 + x \cdot 4$

(2) $(10 + x) \cdot 4$

Svar: _____ .

- (b) I et spil kan vi udregne antal point sådan:

A: Gang 3 med antal krydser.
B: Læg A-resultatet til 5.

Angiv disse udregninger ved at skrive et regneudtryk med x :

Antal point = _____ .

Hvis $x = 6$ er dette regneudtryk = _____ .

- (c) I et spil kan vi udregne antal point sådan:

A: Læg 4 til antal krydser.
B: Gang 2 med A-resultatet.

Angiv disse udregninger ved at skrive et regneudtryk med x :

Antal point = _____ .

Hvis $x = 5$ er dette regneudtryk = _____ .

Samle led af samme type

Øvelse 4

x står for et tal.

På hver pakke står antal mønter den indeholder:

$3 \quad x \quad x$

- (a) Hvilke(t) af regneudtrykkene (1)-(3) angiver antal mønter i disse pakker?

(1) $3 + x + x$

(2) $3 + 2 \cdot x$

(3) $5 \cdot x$

Svar: _____ .

- (b) Hvis $x = 4$ er $3 + x + x =$ _____ .

- (c) Hvis $x = 4$ er $3 + 2 \cdot x =$ _____ .

- (d) Hvis $x = 4$ er $5 \cdot x =$ _____ .

Øvelse 5

x står for et tal.

På hver pakke står antal mønter den indeholder:

$$\boxed{x} \boxed{x} \boxed{8} \boxed{x} \boxed{x} \boxed{x} \boxed{6}$$

(a) Hvilke(t) af regneudtrykkene (1)-(7) angiver antal mønter i disse pakker?

(1) $x + x + 8 + x + x + x + 6$

(2) $2 \cdot x + 8 + 3 \cdot x + 6$

(3) $2x + 8 + 3x + 6$

(4) $14 + 5 \cdot x$

(5) $19 \cdot x$

(6) $19 + x$

(7) $5x + 14$

Svar: _____ .

(b) Hvis $x = 2$ er $x + x + 8 + x + x + x + 6 =$ _____ .

Hvis $x = 2$ er $2x + 8 + 3x + 6 =$ _____ .

(c) Hvis $x = 2$ er $14 + 5x =$ _____ .

Hvis $x = 2$ er $19x =$ _____ .

Teori 6 Sådan kan vi samle led af samme type.

I udtrykket

$$x + 5 + 3x$$

har vi først x en gang og derefter tre gange, dvs. vi har x fire gange, så

$$x + 5 + 3x = 4x + 5 .$$

Ved at bruge samme tankegang får vi

$$2b + 7 + 3 + 4a + 6a + 5b + 1 = 11 + 7b + 10a .$$

Der er underforstået et gangetegn mellem 4 og x i $4x$, så

$$4x = 4 \cdot x .$$

Øvelse 7

I hvert af regneudtrykkene (1)-(4) skal du samle led der er af samme type. Se Teori 6.

(1) $2x + x + 4x =$ _____ .

(2) $2 + 5x + x + 4 + 3x =$ _____ .

(3) $a + 4b + 2a + 3b =$ _____ .

(4) $5 + 5 + 5k + 11k =$ _____ .

Gange ind i parentes 1. del

Øvelse 8

m og n står for to tal.

På hver pakke står antal mønter den indeholder.

Nedenfor er vist hvor mange mønter hver af personerne A, B, C og D har.

$$\begin{array}{cccc} \text{A:} & \boxed{m} & \boxed{n} & \text{B:} & \boxed{m} & \boxed{n} & \text{C:} & \boxed{m} & \boxed{n} & \text{D:} & \boxed{m} & \boxed{n} \\ & & & & \boxed{m} & \boxed{n} & & \boxed{m} & & & \boxed{n} \\ & & & & \boxed{m} & \boxed{n} & & \boxed{m} & & & \boxed{n} \end{array}$$

- (a) $m + n$ er antal mønter som _____ har.
- (b) $3 \cdot m + n$ er antal mønter som _____ har.
- (c) $3 \cdot (m + n)$ er antal mønter som _____ har.
- (d) $3 \cdot m + 3 \cdot n$ er antal mønter som _____ har.
- (e) $m + 3 \cdot n$ er antal mønter som _____ har.
- (f) Hvis $m = 2$ og $n = 4$, så er
 $3 \cdot (m + n) =$ _____ og
 $3 \cdot m + 3 \cdot n =$ _____ .
- (g) Hvilke tal kan m og n være hvis udtrykkene $3 \cdot (m + n)$ og $3 \cdot m + 3 \cdot n$ skal være samme tal? Svar: _____ .

Teori 9

I en skole er der samme antal piger i alle klasser og samme antal drenge i alle klasser.

k = antal klasser

p = antal piger i en klasse

d = antal drenge i en klasse

$$\begin{aligned} \text{antal elever i en klasse} &= \text{antal piger i en klasse plus antal drenge i en klasse} = p + d \\ \text{antal elever på skolen} &= \text{antal klasser gange antal elever i en klasse} = k \cdot (p + d) \end{aligned}$$

$$\text{antal piger på skolen} = \text{antal klasser gange antal piger i en klasse} = k \cdot p$$

$$\text{antal drenge på skolen} = \text{antal klasser gange antal drenge i en klasse} = k \cdot d$$

$$\text{antal elever på skolen} = \text{antal piger på skolen plus antal drenge på skolen} = k \cdot p + k \cdot d$$

Der gælder

$$k \cdot (p + d) = k \cdot p + k \cdot d$$

da begge ligningens sider er antal elever på skolen .

Ligningen er et eksempel på reglen for at gange ind i en parentes (se Teori 10).

Teori 10 Reglen for at gange ind i parentes.

Reglen for at gange ind i en parentes:

Et udtryk $a+b+c$ med flere led kan vi gange med et tal k ved at gange hvert led i udtrykket med k , dvs.

$$k \cdot (a+b+c) = k \cdot a + k \cdot b + k \cdot c$$

Advarsel:

Det er + og - der skiller led, så $a \cdot b \cdot c$ indeholder kun ét led:

$$k \cdot (a \cdot b \cdot c) = k \cdot a \cdot b \cdot c$$

Dette betyder:

Vi kan omskrive $4 \cdot (2+x)$ til $8+4x$

Vi kan ikke omskrive $4 \cdot (2+x)$ til $8+x$

Vi kan ikke omskrive $4 \cdot (2 \cdot x)$ til $8 \cdot 4x$

Vi kan omskrive $4 \cdot (2 \cdot x)$ til $8x$

Vi kan ofte **reducere** et udtryk sådan:

$$\begin{aligned} & b + 2(a + 3b) + 4a \\ = & b + 2a + 6b + 4a && \text{Først ganger vi ind i parentesen.} \\ = & 6a + 7b && \text{Så samler vi led af samme type.} \end{aligned}$$

Øvelse 11

Gang ind i parenteserne:

(a) $(x+3) \cdot 4 =$

(c) $5(3a+4b) =$

(b) $3(1+2x) =$

(d) $4(2+a+2b) =$

Øvelse 12

Reducer:

(a) $3 + 5(x+2) + x + 1$

=

=

(c) $2(x+2y) + 3(2x) + 3y$

=

=

(b) $(1+2a)3 + 2(a+2)$

=

=

(d) $2 \cdot (4 \cdot a + 3 \cdot b) + 4 + 2 \cdot (5 \cdot b)$

=

=

Øvelse 13

Først køber vi 4 bøger, og derefter køber vi 7 bøger til. For hver bog betaler vi n mønter.

- (a) For de første 4 bøger betaler vi $\underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}$ mønter,
og for de næste 7 bøger betaler vi $\underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}$ mønter,
så vi betaler i alt $\underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}$ mønter for bøgerne.
- (b) Vi har i alt købt $\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$ bøger, og for hver af dem betaler vi $\underline{\hspace{1cm}}$ mønter,
så vi betaler i alt $\underline{\hspace{1cm}} \cdot (\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}})$ mønter for bøgerne.
- (c) I (a) og (b) skrev vi to udtryk der begge var det vi betaler i alt. De to udtryk må
altså give samme tal uanset hvilket tal vi indsætter for n . Brug et lighedstegn til at
skrive at de to udtryk er lig hinanden: $\underline{\hspace{10cm}}$
- (d) I (c) skrev du en ligning. Gyldigheden af denne ligning kan vi også begrunde ved
hjælp af reglen for at $\underline{\hspace{10cm}}$

Rækkefølge af $-$ og \cdot samt af $+$ og $-$

Øvelse 14

- (a) På hver af de tomme pladser skal du skrive et af følgende udtryk:

$$4 + 2 \quad 4 - 2 \quad 10 - 4 + 2 \quad 10 - 4 - 2 \quad 10 + 4 - 2 \quad 10 + 4 + 2$$

Hvis vi ser at vi har 10 mønter, derefter bruger 4 mønter og derefter får 2 mønter,
så har vi $\underline{\hspace{2cm}}$ mønter .

Hvis vi ser at vi har 10 mønter, derefter bruger 4 mønter og derefter bruger 2
mønter, så har vi brugt $\underline{\hspace{2cm}}$ mønter og har $\underline{\hspace{2cm}}$
mønter tilbage.

- (b) På hver af de tomme pladser skal du skrive et af følgende udtryk:

$$b + c \quad b - c \quad a - b + c \quad a - b - c \quad a + b - c \quad a + b + c$$

Hvis vi ser at vi har a mønter, derefter bruger b mønter og derefter får c mønter, så
har vi $\underline{\hspace{2cm}}$ mønter .

Hvis vi ser at vi har a mønter, derefter bruger b mønter og derefter bruger c
mønter, så har vi brugt $\underline{\hspace{2cm}}$ mønter og har $\underline{\hspace{2cm}}$
mønter tilbage.

Teori 15

Når der før et tal står + og efter står + eller –, så kan vi selv vælge hvilket af de to tegn vi vil udregne først.

Når der før et tal står – og efter står + eller –, så er det minusset før vi skal udregne først.

Når et tal står mellem – og ·, så skal vi udregne gange før minus.

Dette betyder:

Vi kan omskrive $7 + 5 - 3$ til $12 - 3$

Vi kan omskrive $7 + 5 - 3$ til $7 + 2$

Vi kan omskrive $7 - 5 + 3$ til $2 + 3$

Vi kan ikke omskrive $7 - 5 + 3$ til $7 - 8$

Vi kan ikke omskrive $2 \cdot a - a$ til $2 \cdot 0$

Vi kan ikke omskrive $5 - 2 \cdot x$ til $3 \cdot x$

Hvis – skal udregnes før ·, så skal vi skrive en parentes:

Vi kan omskrive $(5 - 2) \cdot x$ til $3 \cdot x$

Øvelse 16

- (a) Kan vi omskrive $3x - x + x$ til $3 \cdot 0 + x$? Svar: _____ .
- (b) Kan vi omskrive $3 \cdot 2 - 2 + 2$ til $6 - 2 + 2$? Svar: _____ .
- (c) Kan vi omskrive $3x - x + x$ til $3x - 2x$? Svar: _____ .
- (d) Kan vi omskrive $3 \cdot 2 - 2 + 2$ til $3 \cdot 2 - 4$? Svar: _____ .
- (e) Kan vi omskrive $3 \cdot 2 + 2 - 2$ til $3 \cdot 2 + 0$? Svar: _____ .
- (f) Kan vi omskrive $6 + 4 - 2$ til $10 - 2$? Svar: _____ .
- (g) Kan vi omskrive $6 + 4 - 2$ til $6 + 2$? Svar: _____ .
- (h) Kan vi omskrive $5 - 3 - 2 \cdot x$ til $2 - 2 \cdot x$? Svar: _____ .

Øvelse 17

På hver af de tomme pladser skal du skrive et af følgende udtryk:

$$14 - 2 \cdot 6 \quad (14 - 2) \cdot 6 \quad 14 - 2 + 6 \quad 14 - 2 - 6$$

For en vare er prisen pr. stk. 14 mønter, men vi får en rabat på 2 mønter. For 6 stk. skal vi betale _____ .

For en vare er prisen pr. stk. 2 mønter. Hvis vi ser at vi har 14 mønter, og derefter køber 6 stk. af varen, så har vi _____ mønter tilbage.

Hvis vi ser at vi har 14 mønter, og derefter køber en vare til 2 mønter og en vare til 6 mønter, så har vi _____ mønter tilbage.

Teori 18

x = antal frø i en pose

I en krukke er 16 frø og 5 poser, dvs. antal frø i krukken er $16 + 5 \cdot x$

Vi lægger 7 frø i krukken, dvs. antal frø i krukken er $16 + 5 \cdot x + 7$

Vi fjerner 2 poser fra krukken, dvs. antal frø i krukken er $16 + 5 \cdot x + 7 - 2 \cdot x$

Antal frø i krukken er

$$16 + 5x + 7 - 2x = 23 + 3x$$

Denne omskrivning er et eksempel på reglen om at samle led af samme type.

Øvelse 19

r = antal frø i en rød pose

g = antal frø i en grøn pose

I en krukke er der 10 røde poser og 4 grønne poser.

Skriv til venstre på linjen nedenfor et udtryk for antallet af frø i krukken (se evt. Teori 18).

Vi fjerner 7 røde poser fra krukken.

Skriv et udtryk for antallet af frø i krukken ved at lave en tilføjelse til det udtryk du allerede har skrevet på linjen.

Vi lægger 2 grønne poser i krukken.

Skriv et udtryk for antallet af frø i krukken ved at lave en tilføjelse til det udtryk du allerede har skrevet på linjen.

Ovenfor er et udtryk for antallet af frø i krukken. Skriv et udtryk for antallet som er så simpelt som muligt: _____

Teori 20 Sådan kan vi samle led af samme type.

I udtrykket

$$8x + 5 - 7x$$

har vi først x otte gange, og derefter fjerner vi x syv gange, dvs. vi har x én gang tilbage, så

$$8x + 5 - 7x = x + 5 .$$

Ved at bruge samme tankegang får vi

$$6 - 5a - 3b + 4b + 8 - 2a + b = 14 - 7a + 2b .$$

Øvelse 21

I hvert af regneudtrykkene (1)-(5) skal du samle led der er af samme type. Se Teori 20 og Teori 6.

(1) $5x - x + 4x =$ _____ .

(2) $2 - 5x + x - 2 + 6x =$ _____ .

(3) $-3a - 4b + 3a + 9b =$ _____ .

(4) $6 - 4 - 2k + 11k =$ _____ .

(5) $5x - 2y + 3y - 4x =$ _____ .

Øvelse 22

Reducér:

(a) $3(4 + 2x) - 5x - 10$

=

=

(c) $-5x + 3 \cdot (5 \cdot x) - 15$

=

=

(b) $2(6x) - 12 + 3(x + 4)$

=

=

(d) $(2 + a + 2b) \cdot 4 - 2 + a - 7b$

=

=

Gange ind i parentes 2. del

Øvelse 23

x står for et bestemt tal. I alle klasser er der 20 elever, og x af dem er piger.

På hver af de tomme pladser i (a)-(e) skal du skrive en af følgende sætninger:

piger i én klasse
drengene i én klasse
elever i én klasse
piger i fire klasser
drengene i fire klasser
elever i fire klasser

- (a) $20 - x$ er antal _____ .
(b) $4 \cdot (20 - x)$ er antal _____ .
(c) $4 \cdot 20$ er antal _____ .
(d) $4 \cdot x$ er antal _____ .
(e) $4 \cdot 20 - 4 \cdot x$ er antal _____ .
(f) Når $x = 8$ er $4 \cdot (20 - x) =$ _____ og $4 \cdot 20 - 4 \cdot x =$ _____ .
(g) Hvilke tal kan x være hvis udtrykkene $4 \cdot (20 - x)$ og $4 \cdot 20 - 4 \cdot x$ skal være samme tal? Svar: _____ .

Teori 24 Reglen for at gange ind i parentes.

Et udtryk $a - b + c$ med flere led kan vi gange med et tal k ved at gange hvert led i udtrykket med k , dvs.

$$k \cdot (a - b + c) = k \cdot a - k \cdot b + k \cdot c$$

Det er $+$ og $-$ der skiller led, så $a \cdot b \cdot c$ indeholder kun ét led:

$$k \cdot (a \cdot b \cdot c) = k \cdot a \cdot b \cdot c$$

Dette betyder:

Vi kan omskrive $4 \cdot (2 - x)$ til $8 - 4x$

Vi kan ikke omskrive $4 \cdot (2 - x)$ til $8 - x$

Vi kan ikke omskrive $4 \cdot (2 \cdot x)$ til $8 \cdot 4x$

Vi kan omskrive $4 \cdot (2 \cdot x)$ til $8x$

Vi kan ofte **reducere** et udtryk sådan:

$$\begin{aligned} & 2b + 2(a - 3b) + 5b \\ = & 2b + 2a - 6b + 5b && \text{Først ganger vi ind i parentesen.} \\ = & 2a + b && \text{Så samler vi led af samme type.} \end{aligned}$$

Øvelse 25

Reducér:

(a) $-4 + 3(x - 2) + x + 10$

=

=

(b) $(3 - 2a)3 + 8(a + 1)$

=

=

(c) $3(2x + y) - 5x - 3y$

=

=

(d) $2 \cdot (2 \cdot a - 4 \cdot b) - a + 4 + 10 \cdot b$

=

=

Øvelse 26

Først køber vi x bøger som hver koster 19 mønter. Derefter leverer vi 7 bøger tilbage og får pengene igen.

- (a) For de x bøger betalte vi _____ mønter, og for de 7 bøger får vi _____ · _____ mønter tilbage, så for de bøger vi beholder, har vi betalt _____ - _____ · _____ mønter.
- (b) Antallet af bøger vi beholder er _____, og vi betalte _____ mønter for hver bog, så for de bøger vi beholder, har vi betalt _____ · (_____) mønter.
- (c) I (a) og (b) har du skrevet to udtryk som begge er lig det vi har betalt for de bøger vi beholder, så de to udtryk er lig hinanden. Skriv udtrykkene med lighedstegn imellem:
- (d) Vi behøver ikke tænke på bøger og mønter for at se at denne ligning gælder. Vi kan begrunde den med reglen for at _____

Hæve parentes

Øvelse 27

- (a) Vi ser at vi har 15 mønter. Derefter køber vi en vare til 8 mønter, og derefter en vare til 3 mønter.

På hver af de tomme pladser skal du skrive en af følgende:

betalt for de to varer
tilbage når vi har købt den første vare
tilbage når vi har købt begge varer

15 - 8 er antal mønter vi har

_____ .

15 - 8 - 3 er antal mønter vi har

_____ .

8 + 3 er antal mønter vi har

_____ .

15 - (8 + 3) er antal mønter vi har

_____ .

Øvelsen fortsætter på næste side!

- (b) Vi ser at vi har a mønter. Derefter køber vi en vare til b mønter, og derefter en vare til c mønter.

På hver af de tomme pladser skal du skrive en af følgende:

betalt for de to varer
 tilbage når vi har købt den første vare
 tilbage når vi har købt begge varer

$a - b$ er antal mønter vi har

_____ .

$a - b - c$ er antal mønter vi har

_____ .

$b + c$ er antal mønter vi har

_____ .

$a - (b + c)$ er antal mønter vi har

_____ .

- (c) Hvis $a = 50$, $b = 20$ og $c = 10$ er

$$a - b - c = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{og} \quad a - (b + c) = \underline{\hspace{2cm}} .$$

- (d) Hvilke tal kan a , b og c være hvis de to udtryk $a - (b + c)$ og $a - b - c$ skal være samme tal? Svar: _____ .

Teori 28 Sådan kan vi hæve parenteser.

Når

**der foran parentesen er $-$, og
 efter parentesen er $+$, $-$ eller ingenting**

så kan vi

**fjerne parentesen og minuset foran hvis vi
 samtidig ændrer fortegnet for hvert led i parentesen.**

Når vi gør dette, siger vi at vi hæver minusparentesen.

Når

**der foran parentesen er $+$, og
 efter parentesen er $+$, $-$ eller ingenting**

så kan vi

fjerne parentesen og pluset foran.

Når vi gør dette, siger vi at vi hæver plusparentesen.

Eksempler:

$$14 - (+5 - 3 \cdot y) = 14 - 5 + 3 \cdot y$$

Disse tegn skal fjernes

Disse tegn skal ændres

$$8 - (x - 3) + (5 - 2 \cdot x)$$

$$= 8 - (+x - 3) + (+5 - 2 \cdot x)$$

Denne linje skriver vi normalt ikke

$$= 8 - x + 3 + 5 - 2 \cdot x$$

$$(-a + b) - (-c + d - e)$$

$$= +(-a + b) - (-c + d - e)$$

Denne linje skriver vi normalt ikke

$$= -a + b + c - d + e$$

Teori 29

Ved at hæve minusparentesen får vi $-(-4 \cdot x) = 4 \cdot x$

Parentesen og minuset foran har vi fjernet, og fortegnet i parentesen har vi ændret til plus. $+4 \cdot x$ er det samme som $4 \cdot x$

Ved at hæve plusparentesen får vi $5 + (-2) = 5 - 2$

Parentesen og pluset foran har vi fjernet. Fortegnet i parentesen skal vi ikke ændre da det er en plusparentes vi har hævet.

Følgende parentes er ikke en minusparentes: $(2x - k) - x$

Det skyldes at der ikke står minus foran parentesen.

Når der ikke er skrevet noget foran parentesen, kan vi skrive + uden at ændre betydningen:

$$+ (2x - k) - x$$

Vi kan omskrive sådan: $+ (2x - k) - x = 2x - k - x = x - k$

Øvelse 30

Hæv parenteserne:

(a) $-(-a + 2x - 3) =$

(d) $(7 + k - 2y) =$

(b) $-(4c + 5 - x) =$

(e) $-(3 \cdot x + 2) =$

(c) $+(-6x - 10) =$

(f) $-(-8 \cdot a) =$

Øvelse 31

Reducér:

(a) $-(x - 4) + (x + 3) =$

$=$

$=$

(b) $(5 - 2x) - (-2 + x) =$

$=$

$=$

(e) $1 - (-2y) - (-2 + y)$

$=$

$=$

(c) $3a - (7 - 2a + b) + b =$

$=$

$=$

(f) $x + (-5) - (-1 + 3x)$

(d) $-(-a + b - 5) - (b + 5)$

Øvelse 32

Vi har 65 mønter. Først betaler vi x mønter for en vare, men vi får 10 mønter tilbage fordi der er en mangel ved varen.

- (a) Lige da vi havde betalt de x mønter havde vi _____ mønter.
Da vi havde fået mønter tilbage, havde vi _____ - _____ + _____ mønter.
- (b) Da vi havde fået mønter tilbage, havde vi betalt _____ mønter for varen, så vi havde _____ - (_____) mønter.
- (c) I (a) og (b) har du skrevet to udtryk som begge er lig antallet af mønter vi havde efter at vi havde fået mønter tilbage, så de to udtryk er lig hinanden. Skriv udtrykkene med lighedstegn imellem:
- (d) Vi behøver ikke tænke på mønter for at se at denne ligning gælder. Vi kan begrunde den med reglen for at _____

Teori 33

Vi kan ofte **reducere** et udtryk sådan:

$$\begin{aligned} & 2x - 3(4 - 2x) \\ = & 2x - (12 - 6x) && \text{Først ganger vi ind i parentesen.} \\ = & 2x - 12 + 6x && \text{Så hæver vi minusparentesen.} \\ = & 8x - 12 && \text{Så samler vi led af samme type.} \end{aligned}$$

Øvelse 34

Reducér:

(a) $3(4 - x) - (2x - 2)$

=

=

(b) $3x - 4 - 4(2 - x)$

=

=

=

(c) $3 + 5(3 + 4x) - (-x)$

=

=

(d) $-3(2x + 1) - (3 - 4x) \cdot 2$

=

=

=

(e) $a(4 + b) - 2ab + (-3a)$

=

=

(f) $4(1 + 2b) - (2a - 3)b$

=

=

=

Fortegn 1. del

Teori 35

$$-5 \cdot (-a) = 5a$$

$$(-5) \cdot (-a) = 5a$$

$$(-5) \cdot a = -5a$$

$$5 \cdot (-a) = -5a$$

$$-5 + (-a) = -5 - a$$

$$-5 - (-a) = -5 + a$$

Minus gange minus giver plus

Her skal tallene ikke ganges, så vi kan ikke bruge reglen om minus gange minus. I stedet hæver vi parenteserne (Teori 28).

Øvelse 36

Reducér:

(a) $-4 \cdot (-x) + x$

(b) $k \cdot (-2) + k$

(c) $-3 + (-t)$

(d) $a + (-2 \cdot (-a))$

(e) $a - 2 \cdot (-a)$

(f) $-2x - x \cdot (-5)$

Brøk (division) 1. del

Teori 37

Vi vil skrive division som en brøk.

At

12 divideret med 4 er 3

skriver vi sådan

$$\frac{12}{4} = 3$$

Teori 38

Halvdelen af

$$6 \cdot x \quad \boxed{x} \boxed{x} \boxed{x} \boxed{x} \boxed{x} \boxed{x}$$

er

$$3 \cdot x \quad \boxed{x} \boxed{x} \boxed{x}$$

dvs.

$$\frac{6 \cdot x}{2} = 3 \cdot x$$

Da der står \cdot mellem 6 og x , må vi dividere 2 op i 6.

Teori 39

Halvdelen af

$$6 + x \quad \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{x}$$

er ikke

$$3 + x \quad \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{x}$$

dvs.

$$\frac{6 + x}{2} \text{ kan vi ikke omskrive til } 3 + x .$$

Da der står $+$ mellem 6 og x , må vi ikke dividere 2 op i 6.

Hvis der står minus må vi heller ikke dividere 2 op i 6:

$$\frac{6 - x}{2} \text{ kan vi ikke omskrive til } 3 - x .$$

Der gælder altså:

$$\frac{15 \cdot x - 8}{5} \text{ kan vi ikke omskrive til } 3 \cdot x - 8$$

$$\frac{7 \cdot x + 10}{5} \text{ kan vi ikke omskrive til } 7 \cdot x + 2 .$$

Øvelse 40

(a) Kan vi omskrive $\frac{12 \cdot 20}{4}$ til $3 \cdot 5$? Svar: _____ .

(b) Kan vi omskrive $\frac{12 \cdot 20}{4}$ til $3 \cdot 20$? Svar: _____ .

(c) Kan vi omskrive $\frac{12 \cdot 20}{4}$ til $12 \cdot 5$? Svar: _____ .

(d) Kan vi omskrive $\frac{12 + 1}{4}$ til $3 + 1$? Svar: _____ .

Øvelse 41

Reducér:

$$(a) \quad \frac{8+9a-7}{3} =$$

$$(b) \quad \frac{x \cdot 12}{4} - \frac{12 \cdot x}{6} =$$

$$(c) \quad \frac{3x+11x}{7} =$$

$$(d) \quad \frac{26+5(x-4)}{3} =$$

Teori 42

Der gælder:

$$\frac{a \cdot x}{a} = 1 \cdot x = x$$

$$\frac{a \cdot x}{a} = x \quad \text{og} \quad \frac{x \cdot a}{a} = x$$

$$a \cdot \frac{x}{a} = x \quad \text{og} \quad \frac{x}{a} \cdot a = x$$

$$\frac{-4x}{-4} = x \quad \text{og} \quad \frac{x \cdot (-4)}{-4} = x$$

$$-4 \cdot \frac{x}{-4} = x \quad \text{og} \quad \frac{x}{-4} \cdot (-4) = x$$

$$\frac{x+a}{a} \text{ kan vi ikke omskrive til } x$$

$$\frac{a+x}{a} \text{ kan vi ikke omskrive til } x$$

$$\frac{x-a}{a} \text{ kan vi ikke omskrive til } x$$

Øvelse 43

Reducér:

(a) $\frac{1-2x+4+3x}{5} =$

(b) $\frac{a+3a+2a}{6} =$

(c) $\frac{x \cdot 8}{8} + \frac{k \cdot x}{k} =$

(d) $\frac{-(3-4x)-2}{4} =$

(e) $3 \cdot \frac{x}{3} - \frac{x}{7} \cdot 7 =$

(f) $k - k \cdot \frac{x}{k} + \frac{kx}{k} =$

(g) $\frac{-2x}{-2} - 2 =$

(h) $2a + \frac{a}{-6} \cdot (-6) =$

Fortegn 2. del

Teori 44

Disse eksempler viser tilladte omskrivninger:

$$\begin{array}{cccc} \frac{-5}{a} = -\frac{5}{a} & \frac{5}{-a} = -\frac{5}{a} & \frac{-5}{-a} = \frac{5}{a} & -\frac{5+c}{a} = \frac{-5-c}{a} \\ -\frac{-5}{a} = \frac{5}{a} & -\frac{5}{-a} = \frac{5}{a} & -\frac{-5}{-a} = -\frac{5}{a} & -\frac{5-c}{a} = \frac{-5+c}{a} \end{array}$$

Minus divideret med minus giver plus.

Øvelse 45

Hvilke af følgende udtryk giver samme tal uanset hvilket tal vi indsætter for x ?

(a) $-\frac{x}{2}$

(b) $\frac{-x}{2}$

(c) $\frac{x}{2}$

(d) $\frac{-x}{-2}$

(e) $-\frac{x-3}{2}$

(f) $\frac{-x-3}{2}$

(g) $\frac{x-3}{-2}$

(h) $\frac{-x+3}{2}$

Regler om ligevægt

Teori 46

De fire vigtigste af reglerne om ligevægt er følgende

Regler om ligevægt vedrørende $+$, $-$, \cdot og $:$

- Vi må lægge det samme tal til begge sider af lighedstegnet.
- Vi må trække det samme tal fra begge sider af lighedstegnet.
- Vi må gange begge sider af lighedstegnet med det samme tal hvis det tal vi ganger med, ikke er nul.
- Vi må dividere begge sider af lighedstegnet med det samme tal hvis det tal vi dividerer med, ikke er nul.

Reglerne ovenfor er skrevet meget kort. I de følgende rammer forklarer vi grundigt hvad reglerne om ligevægt går ud på.

Vi kan træne reglerne om ligevægt ved at bruge dem til at løse ligninger. Så nytter det ikke at du løser ligningerne ved hjælp af andre regler, da det er reglerne om ligevægt der er formålet med øvelserne. Reglerne om ligevægt er en vigtig del af pensum.

Teori 47

Tænk på en vægt når du løser ligninger.

x står for et tal. På hver pakke står hvor mange lodder den indeholder.

Vi har anbragt nogle pakker på hver af vægtens skåle:

$$5x = 2x + 12$$

Vi trækker $2x$ fra begge ligningens sider, dvs. fjerner $2x$ fra begge vægtskåle. Der må stadig være ligevægt:

$$5x - 2x = 2x + 12 - 2x$$
$$3x = 12$$

Vi dividerer begge ligningens sider med 3. På hver af vægtskålene er der nu en tredjedel af det der var før. Der må stadig være ligevægt: :

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$
$$x = 4$$

Pakken med x lodder vejer det samme som fire lodder, dvs. $x = 4$.

Teori 48

Det er en FEJL at omskrive $\frac{x}{2} + 3 = x$ til $\frac{x}{2} \cdot 2 + 3 = x \cdot 2$ fordi det kun er en del af venstre side der er ganget med 2.

Man skal gange hele siden med 2:

$$\frac{x}{2} + 3 = x$$

$$\left(\frac{x}{2} + 3\right) \cdot 2 = x \cdot 2$$

Her har vi ganget begge sider med 2.

$$\frac{x}{2} \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 2x$$

$$x + 6 = 2x$$

$$6 = x$$

Her har vi trukket x fra begge sider.

Ovenstående gælder ikke kun gange. For alle regler om ligevægt gælder at alt det der står på én side af lighedstegnet, skal vi tænke på som ét tal vi skal udføre en udregning med.

Teori 49

(a) Hvis vi i ligningen $14 = 3x + 2$
trækker 2 fra begge sider, får vi $12 = 3x$

(b) Hvis vi i ligningen $12 = 3x$
dividerer begge sider med 3, får vi $\frac{12}{3} = \frac{3x}{3}$
Ved at reducere de to sider får vi $4 = x$

(c) ADVARSEL: Hvis vi i ligningen $14 = 3x + 2$
dividerer begge sider med 3, får vi $\frac{14}{3} = \frac{3x + 2}{3}$
(Start med at trække 2 fra begge sider).

3 kan ikke forkortes væk da der står + mellem $3x$ og 2

(d) ADVARSEL: Hvis vi i ligningen $14 = 3x + 2$
dividerer begge sider med 3, får vi IKKE $\frac{14}{3} = \frac{3x}{3} + 2$
(Start med at trække 2 fra begge sider).

(e) Hvis vi i ligningen $-x = 5$
ganger begge sider med -1 , får vi $x = -5$

(f) Hvis vi i ligningen $2 = \frac{x}{4} - 3$
lægger 3 til begge sider, så får vi $5 = \frac{x}{4}$
Vi ganger begge sider med 4: $5 \cdot 4 = \frac{x}{4} \cdot 4$
Ved at reducere de to sider får vi $20 = x$

Øvelse 50

Svarene er af typen *lægger 7 til, ganger med 2, osv.*

Hvad gør vi ved begge sider i $x + 14 = 25$ for at få ligningen $x = 11$?

Svar: _____ .

Hvad gør vi ved begge sider i $x - 8 = 13$ for at få ligningen $x = 21$?

Svar: _____ .

Hvad gør vi ved begge sider i $8x = 40$ for at få ligningen $x = 5$?

Svar: _____ .

Hvad gør vi ved begge sider i $\frac{x}{5} = 9$ for at få ligningen $x = 45$?

Svar: _____ .

Øvelse 51

Skriv mellemregning der viser hvordan vi ved hjælp af en af reglerne for ligevægt kan få den nederste ligning.

(a) Af $19 = 4 + x$
får vi
så $15 = x$

(c) Af $11 - x = 0$
får vi
så $11 = x$

(b) Af $\frac{x}{-5} = 12$
får vi
så $x = -60$

(d) Af $-7x = -21$
får vi
så $x = 3$

Teori 52

Vi starter med et tilfældigt tal: 7

Vi lægger 5 til tallet og får: 12

Vi trækker 5 fra dette resultat og får: 7

Vi fik det vi startede med, fordi *træk 5 fra* er den omvendte udregning til *læg 5 til* .

På venstre side står udregningen *læg 5 til* : $x + 5 = 12$

Med begge sider laver vi den omvendte udregning, dvs. *træk 5 fra* , og får: $x = 7$.

Den omvendte udregning til *træk 4x fra* er *læg 4x til* . Denne omvendte udregning laver vi med begge sider i ligningen $2x = -4x + 12$ og får $6x = 12$.

Den omvendte udregning til *gang med 6* er *divider med 6* . Denne omvendte udregning laver vi med begge sider i ligningen $6x = 12$ og får $\frac{6x}{6} = \frac{12}{6}$ dvs $x = 2$.

Den omvendte udregning til *divider med 3* er *gang med 3* . Denne omvendte udregning laver vi med begge sider i ligningen $\frac{x}{3} = 2$ og får $\frac{x}{3} \cdot 3 = 2 \cdot 3$ dvs $x = 6$.

Øvelse 53

Den omvendte udregning til *læg 3x til* er _____.

Vi laver denne omvendte udregning med begge sider af $3x + 5 = 4x$ og får (efter at have reduceret): _____.

Den omvendte udregning til *læg 5 til* er _____.

Vi laver denne omvendte udregning med begge sider af $3x + 5 = 11$ og får (efter at have reduceret): _____.

Den omvendte udregning til *gang med 3* er _____.

Vi laver denne omvendte udregning med begge sider af $3x = 6$ og får:

_____ = _____ dvs. _____.

Øvelse 54

Vis hvordan vi ved at lave omvendte udregninger (se Teori 52 og Teori 46) kan løse ligningerne:

(1) $-14 = x + 8$

(2) $-32 = 8x$

(3) $\frac{x}{3} = -12$

(4) $9 = x \cdot \frac{1}{2}$

(5) $-1 + x = 3$

(6) $7 = -x$

Øvelse 55

Vis hvordan vi ved at lave omvendte udregninger (se Teori 52 og Teori 46) kan løse ligningerne:

(1) $8x - 18 = 6$

(2) $8x - 18 = 6x$

(3) $8 - 7x = -6$

(4) $14 = -3x + 5$

(5) $12 = -3 + 5x$

(6) $-x = 8 - 5x$

Øvelse 56

Vis hvordan vi ved at lave omvendte udregninger (se Teori 52 og Teori 46) kan løse ligningerne:

$$(1) \quad 3x + 4 = 16 - 3x \qquad (2) \quad -3 + 4x = 4 - 3x \qquad (3) \quad 13 - x = x + 1$$

Øvelse 57

Vis hvordan vi ved at lave omvendte udregninger (se Teori 52 og Teori 46) kan løse ligningerne:

$$(1) \quad 2 + 5x = 2x + 11 \qquad (2) \quad 3x - 4 = -2x + 6 \qquad (3) \quad -6x + 4 = 3x + 4$$

Øvelse 58

Vis hvordan vi ved hjælp af Teori 28, Teori 33 og Teori 20 kan reducere siderne med parentes, og vis hvordan vi derefter ved at lave omvendte udregninger (se Teori 52 og Teori 46) kan løse ligningerne:

$$(1) \quad 5 - (3x + 6) = 2x + 9 \qquad (2) \quad 6 - 3(x + 2) = x + 12 \qquad (3) \quad 1 - 4x = 4 - 3(2x + 5)$$

Øvelse 59

Vis hvordan vi ved hjælp af Teori 28, Teori 33 og Teori 20 kan reducere siderne med parentes, og vis hvordan vi derefter ved at lave omvendte udregninger (se Teori 52 og Teori 46) kan løse ligningerne:

$$(1) \quad -(2x - 4) + 2(1 - 3x) = -2$$

$$(2) \quad 5(-x + 2) = 3(4 - 3x)$$

Øvelse 60

(a) Følgende er oplyst:

Når vi lægger 6 til antal drenge, så får vi det samme som hvis vi ganger antal drenge med 4.

Skriv denne oplysning som en ligning hvor d står for antal drenge, og bestem antal drenge.

Ligning:

(b) Følgende er oplyst:

Når vi ganger antal piger med 3 og lægger 8 til, så får vi det samme som når vi ganger antal piger med 5.

Skriv denne oplysning som en ligning hvor p står for antal piger, og bestem antal piger.

Ligning:

Øvelse 61

(a) Følgende er oplyst:

Når vi lægger 7 til antal drenge og ganger resultatet med 8, så får vi 96.
Skriv denne oplysning som en ligning hvor d står for antal drenge, og bestem antal drenge.

Ligning:

(b) Følgende er oplyst:

Når vi trækker antal piger fra 32 og trækker resultatet fra 24, så får vi 13.
Skriv denne oplysning som en ligning hvor p står for antal piger, og bestem antal piger.

Ligning:

Isolere

Teori 62 Sådan kan vi isolere en variabel.

I en opgave står at vi skal isolere m i ligningen

$$n = 2m - 1 .$$

Dette betyder: Vi skal omforme ligningen til formen $m = \dots$ hvor der på prikkernes plads står et udtryk der ikke indeholder m .

For at isolere m starter vi med at lægge 1 til begge ligningens sider. Så får vi

$$n+1 = 2m .$$

Nu dividerer vi begge ligningens sider med 2:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{2m}{2} .$$

Ved at forkorte brøken på højre side får vi ligningen

$$\frac{n+1}{2} = m$$

hvor m er isoleret.

Resultatet på opgaven er

$$\underline{\underline{m = \frac{n+1}{2}}}$$

For at isolere z i ligningen

$$4zm = p$$

dividerer vi begge sider med $4m$ og får

$$\frac{4zm}{4m} = \frac{p}{4m}$$

Vi forkorter brøken på venstre side og får

$$z = \frac{p}{4m}$$

For at isolere x i ligningen

$$(4-y)x = 3$$

dividerer vi begge sider med $4-y$ og får

$$\frac{(4-y)x}{4-y} = \frac{3}{4-y}$$

Vi forkorter brøken på venstre side og får

$$x = \frac{3}{4-y}$$

Øvelse 63

(a) Isolér x i ligningen

$$t = 3 \cdot x + 10$$

(b) Isolér x i ligningen

$$m = 2 \cdot x + n$$

Øvelse 64

(a) Isolér k i ligningen

$$t = 2 \cdot (k + 3) - 1$$

(b) Isolér r i ligningen

$$r - (2 - r) = s - 2$$

Øvelse 65

(a) Tallet a i ligningen er ikke 0.
Isolér x .

$$y = ax + b$$

(b) Isolér x i ligningen. Start med
at gange begge sider med 5.

$$\frac{x + 4}{5} = y$$

Øvelse 66

I ligningerne er m og t ikke 0. Isolér t i hver af ligningerne.

(1) $N = m \cdot t$

(2) $N = \frac{t}{m}$

(3) $N = \frac{m}{t}$

Øvelse 67

(a) I ligningen er m ikke 0. Isolér b .

$$y = 4m(b - a)$$

(b) I ligningen er m ikke 0. Isolér a .

$$y = 4m(b - a)$$

(c) I ligningen er $b - a$ ikke 0. Isolér m .

$$y = 4m(b - a)$$

Øvelse 68

(a) I ligningen er a og e ikke 0. Isolér e .

$$a = \frac{b \cdot c + d}{e}$$

(b) I ligningen er e ikke 0. Isolér d .

$$a = \frac{b \cdot c + d}{e}$$

Øvelse 69

Vi kan finde arealet A af en bestemt type figurer ved hjælp af følgende opskrift:

A. Læg 2 til grundlinjen g .

B. Gang A-resultatet med højden h .

(a) Skriv denne opskrift som en ligning

$$A =$$

(b) Isolér g i denne ligning:

(c) Skriv resultatet fra (b) som en opskrift af samme type som den ovenfor:

A.

B.

Øvelse 70

Vi kan finde omkredsen O af en bestemt type figurer ved hjælp af følgende opskrift:

- A. Gang bredden b med 4.
- B. Gang højden h med 2.
- C. Læg B-resultatet til A-resultatet.

(a) Skriv denne opskrift som en ligning

$$O =$$

(b) Isolér h i denne ligning:

(c) Skriv resultatet fra (b) som en opskrift af samme type som den ovenfor:

- A.
- B.
- C.

Teori 71

Udtrykket

$$4^2$$

læses

4 i anden

og betyder

4 ganget med sig selv

dvs.

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16 .$$

Før alle tal x er

$$x^2 = x \cdot x .$$

På lommeregneren kan vi udregne at

$$1,4^2 = 1,96$$

I udtryk som

$$-x^2, \quad 1+3^2, \quad 4 \cdot 3^2$$

skal vi opløfte til anden før vi bruger $-$, $+$ og \cdot , så der gælder

$$-3^2 = -3 \cdot 3 = -9$$

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

$$2x^2 = 2 \cdot x \cdot x$$

$$(2x)^2 = (2x) \cdot (2x) = 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x = 4x^2$$

Øvelse 72

(a) Når $t = 3$ er $5t^2 =$

(b) Når $h = 2$ er $\frac{12}{h^2} =$

Øvelse 73

(a) Tallene u og a er ikke 0.
Isolér a i ligningen

$$u = \frac{my^2}{a}$$

(b) Tallene y og a er ikke 0.
Isolér m i ligningen

$$u = \frac{my^2}{a}$$

Teori 74

Vi lader k stå for et positivt tal.

Udtrykket

$$\sqrt{k}$$

læses

kvadratroden af k

og er den positive løsning til ligningen

$$x^2 = k .$$

Når vi kun ser på positive tal x , så gælder at ligningen

$$x^2 = 62$$

har løsningen

$$x = \sqrt{62} .$$

Vi udregner kvadratroden på lommeregner og får

$$x = 7,874$$

Øvelse 75

(a) Om et positivt tal t gælder

$$t^2 = 73$$

Vi kan skrive dette tal ved hjælp af rodtegn:

$$t =$$

Vi udregner kvadratroden på lommeregner og får

$$t =$$

(b) I ligningen står x og m for positive tal. Isolér x .

$$x^2 = m$$

(c) I ligningen står y , k og m for positive tal. Isolér y .

$$y^2 = k+m$$

Teori 76

Vi vil finde det positive tal x som er løsning til ligningen

$$13 + 3 \cdot x^2 = 20 .$$

Først isolerer vi x^2 :

$$13 + 3 \cdot x^2 - 13 = 20 - 13$$

$$3 \cdot x^2 = 7$$

$$\frac{3 \cdot x^2}{3} = \frac{7}{3}$$

$$x^2 = \frac{7}{3}$$

Af reglen fra teori 70 får vi

$$x = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Vi udregner kvadratroden på lommeregner og får

$$x = 1,528$$

dvs. 1,528 er det positive tal som er løsning til $13 + 3 \cdot x^2 = 20$.

Øvelse 77

(a) Find det positive tal x som er løsning til ligningen

$$6x^2 = 5$$

(b) Find det positive tal a som er løsning til ligningen

$$\frac{a^2}{4} = 9$$

(c) Find det positive tal N som er løsning til ligningen

$$N^2 - 5 = 76$$

Øvelse 78

(a) Find det positive tal t som er løsning til ligningen

$$t^2 + 2 = 123$$

(b) Find det positive tal p som er løsning til ligningen

$$42 - p^2 = 17$$

(c) Find det positive tal y som er løsning til ligningen

$$12 = 6 + 2y^2$$

Øvelse 79

I denne øvelse står c , h og x for positive tal.

(a) Isolér c i ligningen

$$h = c^2 - x$$

(b) Isolér x i ligningen

$$h = c^2 \cdot x$$

(c) Isolér h i ligningen

$$\frac{h}{c^2} = x$$

Øvelse 80

I denne øvelse står B , k , m og r for positive tal.

(a) Isolér m i ligningen

$$B = \frac{r^2 \cdot k}{m}$$

(b) Isolér k i ligningen

$$B = \frac{r^2 \cdot k}{m}$$

(c) Isolér r i ligningen

$$B = \frac{r^2 \cdot k}{m}$$

Øvelse 81

Vi kan finde rumfanget V af en bestemt type figurer ved hjælp af følgende opskrift:

A. Opløft tykkelsen d til anden.

B. Gang A-resultatet med højden h .

C. Gang B-resultatet med 5.

(a) Skriv denne opskrift som en ligning

$$V =$$

(b) Udregn rumfanget når tykkelsen er 2 og højden er 6.

$$V =$$

(c) Udregn tykkelsen når rumfanget er 72 og højden er 10.

Brøk 2. del

Teori 82 Brøkregler.

- (a) Vi ændrer ikke en brøks talværdi når vi forlænger (dvs. ganger tæller og nævner med samme tal) eller forkorter (dvs. dividerer tæller og nævner med samme tal):

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \quad \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}$$

- (b) Vi kan gange to brøker ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

- (c) Vi kan gange en brøk med et tal ved at gange brøkens tæller med tallet:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} \quad c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{b}$$

- (d) Vi kan dividere en brøk med et tal ved at gange nævneren med tallet:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

- (e) Vi kan dividere med en brøk ved at gange med den omvendte brøk:

$$c : \frac{a}{b} = c \cdot \frac{b}{a} \quad \frac{c}{\frac{a}{b}} = c \cdot \frac{b}{a}$$

- (f) Hvis brøkerne har samme nævner, kan vi sætte på fælles brøkstreg sådan:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Ellers må vi først forlænge brøkerne så de får samme nævner (se Teori 83).

Teori 83 Sådan kan vi sætte på fælles brøkstreg.

Her er to eksempler på hvordan vi kan sætte på fælles brøkstreg ved først at forlænge så brøkerne får samme nævner:

$$\frac{x}{6} + \frac{1}{2} = \frac{x}{6} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{x}{6} + \frac{3}{6} = \frac{x+3}{6}$$

$$\frac{3}{2x} - \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 2}{2x \cdot 2} - \frac{1 \cdot x}{4 \cdot x} = \frac{6}{4x} - \frac{x}{4x} = \frac{6-x}{4x}$$

Advarsel:

Der gælder $\frac{2}{5} - \frac{1+x}{5} = \frac{2-(1+x)}{5}$ ☺

Vi kan **ikke** omskrive $\frac{2}{5} - \frac{1+x}{5}$ til $\frac{2-1+x}{5}$ ☹

Øvelse 84

Sæt på fælles brøkstreg:

(a) $\frac{1}{3} - \frac{x}{12} =$

(d) $\frac{1}{x} - \frac{1}{2} =$

(b) $\frac{2x}{3} + \frac{1}{6} =$

(e) $\frac{x}{2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{4x} =$

(c) $\frac{5}{6} + \frac{x}{4} =$

(f) $\frac{2}{3} - \frac{x-2}{9} =$

Øvelse 85

Afgør hvilke af de otte udtryk der er lig hinanden.

(a) $\frac{h \cdot 3}{k \cdot 3}$

(b) $\frac{h}{k} \cdot \frac{3}{3}$

(c) $\frac{h}{k} \cdot 1$

(d) $\frac{h}{k}$

(e) $\frac{h}{k \cdot 3}$

(f) $\frac{h}{k} \cdot \frac{1}{3}$

(g) $\frac{h}{k} \cdot \frac{3}{1}$

(h) $\frac{h}{k} : 3$

Svar: _____

Øvelse 86

Afgør hvilke af de otte udtryk der er lig hinanden.

(a) $3 \cdot \frac{h}{k}$

(b) $\frac{h}{k} + \frac{h}{k} + \frac{h}{k}$

(c) $\frac{h+h+h}{k+k+k}$

(d) $\frac{3 \cdot h}{3 \cdot k}$

(e) $\frac{h+h+h}{k}$

(f) $\frac{3}{3} \cdot \frac{h}{k}$

(g) $\frac{h}{k}$

(h) $\frac{3 \cdot h}{k}$

Svar: _____

Øvelse 87

Afgør hvilke af de seks udtryk der er lig hinanden.

(a) $\frac{5}{\frac{2}{3}}$

(b) $5 : \frac{2}{3}$

(c) $5 \cdot \frac{2}{3}$

(d) $5 \cdot \frac{3}{2}$

(e) $\frac{\frac{5}{2}}{\frac{2}{3}}$

(f) $\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}$

Svar: _____

Øvelse 88

Reducér:

(a) $6 \cdot \frac{1}{2x} =$

(d) $\frac{3n}{x} - \frac{n}{x} =$

(b) $\frac{a}{\frac{1}{b}} : b =$

(e) $\frac{1}{h} + \frac{1+h}{h^2} =$

(c) $\frac{\frac{h}{200}}{\frac{k}{300}} =$

(f) $\frac{1+x}{x} - 1 =$

Gange to parenteser

Teori 89

Reglen for at gange to parenteser:

Vi kan gange to parenteser ved at gange hvert led i den ene med hvert led i den anden.

Forklaring på hvordan reglen skal forstås:

I udtrykket

$$(3 + x) \cdot (2 - a + 4 \cdot k)$$

indeholder første parentes de to led

$$3 \quad x$$

og anden parentes de tre led

$$2 \quad -a \quad 4k$$

Ved at gange første led i første parentes med hvert af leddene i anden parentes får vi de tre led:

$$6 \quad -3a \quad 12k$$

Ved at gange andet led i første parentes med hvert af leddene i anden parentes får vi:

$$2x \quad -ax \quad 4kx$$

De seks led vi har beregnet, lægger vi sammen og får:

$$(3 + x) \cdot (2 - a + 4 \cdot k) = 6 - 3a + 12k + 2x - ax + 4kx$$

Advarsel:

Der gælder at $4 - (a + 2)(b - 3) = 4 - (ab - 3a + 2b - 6)$ 😊

Vi kan **ikke** omskrive $4 - (a + 2)(b - 3)$ til $4 - ab - 3a + 2b - 6$ 😞

Øvelse 90

Hvilke af følgende udtryk er lig hinanden uanset hvilke tal a og b står for:

- (a) $(4a) \cdot (2b)$ (b) $8a \cdot 4ab$ (c) $4 \cdot a \cdot 2 \cdot b$
(d) $4 \cdot 2 \cdot a \cdot b$ (e) $(4 \cdot 2) \cdot (a \cdot b)$ (f) $8ab$

Svar: _____

Øvelse 91

Hvilke af følgende udtryk er lig hinanden uanset hvilke tal k og x står for:

- (a) $k \cdot (-3x)$ (b) $k \cdot (-3) \cdot x$ (c) $kx - 3$
(d) $-3 \cdot k \cdot x$ (e) $-3kx$ (f) $(k - 3)x$

Svar: _____

Øvelse 92

Gang parenteserne sammen:

- (a) $(2 + a)(b + 5) =$ (d) $(3 + 2a)(4 + b) =$
(b) $(a - 2)(b + 3) =$ (e) $(5a - 4)(-3b + 2) =$
(c) $(a - 1)(4 - b) =$ (f) $(a + 2)(3 - b - 4c) =$

Øvelse 93

(1) I hvilket af de fire udtryk nedenfor er det ikke smart at bruge reglen for at gange to parenteser?

(2) Reducér:

- (a) $(x - 4)(k - 3) - k(x - 3) =$
(b) $4 - (1 + x)(3 + k) + k =$
(c) $(5 - 4)(2x - 3k + 4) =$
(d) $(3 - k)(2x - 5) + (kx + 14) =$

Øvelse 96

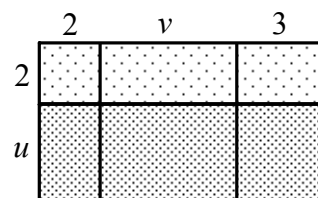
Et puslespil består af nogle grønne brikker og nogle røde brikker. Hver elev i en klasse får udleveret et eksemplar af puslespillet.

- (1) Skriv for hver af de fem følgende udregninger hvad det er den pågældende udregning udregner.
- (a) Træk antal drenge fra antal elever. Læg antal røde til antal grønne. Gang de to resultater.
Svar: _____
- (b) Læg antal røde til antal grønne, og gang antal elever med resultatet. Læg antal røde til antal grønne, og gang resultatet med antal drenge. Træk sidste gangeresultat fra første gangeresultat.
Svar: _____
- (c) Gang antal elever med antal grønne. Gang antal elever med antal røde. Læg de to resultater sammen.
Svar: _____
- (d) A: Gang antal elever med antal grønne. B: Gang antal elever med antal røde. C: Gang antal drenge med antal grønne. D: Gang antal drenge med antal røde. E: Læg resultat B til resultat A. F: Træk resultat C fra resultat E. Træk resultat D fra resultat F.
Svar: _____
- (e) Læg antal røde til antal grønne. Gang antal elever med resultatet.
Svar: _____

- (2) Skriv hver af de fem udregninger som et regneudtryk hvor e , d , g og r står for hhv. antal elever i klassen, antal drenge i klassen, antal grønne brikker i ét puslespil og antal røde brikker i ét puslespil.
- (a) _____ (d) _____
- (b) _____ (e) _____
- (c) _____
- (3) Afgør hvilke af regneudtrykkene der er lig hinanden, og skriv disse med lighedstegn imellem:

Øvelse 97

Figuren viser et rektangel der er delt op i seks mindre rektangler. For hvert af følgende regneudtryk skal du kort skrive hvad det udregner:



- (1) $2 + v + 3$
- (2) $(2 + u)(2 + v + 3)$
- (3) $4 + 2v + 6$
- (4) $2u + vu + 3u$

x^2, x^3, x^4 osv.

Teori 98 (Hvad betyder x^2, x^3, x^4 osv.?)

$$x^2 = x \cdot x$$

$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

osv.

Teori 99

Når du afleverer opgaver, skal du medtage en mellemregning som den i (8), men de andre mellemregninger behøver du ikke medtage.

$$(1) \quad a^3 + a^3 = 2a^3$$

$$(2) \quad a^3 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^6$$

$$(3) \quad (ab)^2 = (ab) \cdot (ab) = a \cdot a \cdot b \cdot b = a^2b^2$$

$$(4) \quad (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a \cdot a + a \cdot b + a \cdot b + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(5) \quad (a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^6$$

$$(6) \quad a^2 \cdot 3ab^2 = a \cdot a \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot b = 3a^3b^2$$

$$(7) \quad \frac{a^2b^3}{a^3b} = \frac{a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b}{a \cdot a \cdot a \cdot b} = \frac{b^2}{a}$$

$$(8) \quad \frac{a^2 + ab}{ab^2 + b^3} = \frac{a \cdot (a+b)}{b^2 \cdot (a+b)} = \frac{a}{b^2}$$

Øvelse 100

Skriv hvilke af de seks udtryk der er lig hinanden (se Teori 99).

(a) $3x^2 + 3 + x^2$

(d) $x \cdot x \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot 3$

(b) $x^2 \cdot 3x^2 \cdot 3$

(e) $9x^4$

(c) $x^2 + x^2 + x^2 + 3 + x^2$

(f) $4x^2 + 3$

Øvelse 101

Reducer de fire udtryk (se Teori 99).

(a) $4x - x^2 + x - 4x^2 =$

(b) $a^2b + 6ab + 2(a^2b - 3ab) =$

(c) $(2x)^2 - x(2 + 3x) + x =$

(d) $a(b^3 - b) - (1 + b^2)ab =$

Øvelse 102

Skriv hvilke af de seks udtryk der er lig hinanden (se Teori 99).

(a) $a^2 \cdot a^{10}$

(b) a^{20}

(c) a^{12}

(d) $a \cdot a \cdot a^{10}$

(e) $a^{10} \cdot a^{10}$

(f) $(a^{10})^2$

Øvelse 103

Skriv hvilke af de fire udtryk der er lig hinanden (se Teori 99).

(a) $\frac{(a^2)^3}{a^2 \cdot a^3}$

(c) $\frac{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}{a^2 \cdot a \cdot a \cdot a}$

(b) $\frac{a^2 + a^2 + a^2}{a^6}$

(d) $\frac{3a^2}{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2}$

Øvelse 104

Skriv hvilke af de seks udtryk der er lig hinanden (se Teori 99).

(a) $a^2 + a^2$

(b) $(a + a) \cdot a$

(c) $a + a^2$

(d) $(1 + 1) \cdot a^2$

(e) $2a^2$

(f) $(1 + a) \cdot a$

Øvelse 105

Reducer de to udtryk (se Teori 99 og Øvelse 104).

(a) $\frac{x^3}{x^2 \cdot x} + \frac{x^2 + x^2}{x \cdot x} =$

(b) $\frac{(x^4)^2}{x^4 \cdot x^4} =$

Øvelse 106

(a) Forkort $\frac{2 \cdot x}{3 \cdot x^2} =$

(b) Hvordan kan vi se på $\frac{2 \cdot x}{3 - x^2}$ at den ikke kan forkortes til $\frac{2}{3 - x}$?

Svar: _____

Øvelse 107

Skriv hvilke af de fire udtryk der er lig hinanden (se Teori 99).

$$(a) \frac{6-2x}{3x-x^2} \quad (b) \frac{2(3-x)}{x(3-x)} \quad (c) \frac{x^2-2x}{3x-x^2} \quad (d) \frac{(x-2)x}{(3-x)x}$$

Øvelse 108

Reducer de to udtryk (se Teori 99 og Øvelse 106 og Øvelse 107).

$$(a) \frac{x^2+2x}{x-x^3} =$$

$$(b) \frac{x-x^2}{3-3x} =$$

Øvelse 109

Skriv hvilke af de otte udtryk der er lig hinanden.

$$\begin{array}{ll} (a) & x^2 - 9 \\ (b) & (x-3)^2 \\ (c) & (x-3)(x-3) \\ (d) & x^2 - 6x + 9 \\ (e) & (x+3)(x-3) \\ (f) & (x+3)(x+3) \\ (g) & x^2 + 6x + 9 \\ (h) & (x+3)^2 \end{array}$$

Øvelse 110

Gang parenteserne sammen.

$$(a) (m+n)(m+n) =$$

$$(b) (m-n)(m-n) =$$

$$(c) (m+n)(m-n) =$$

Kvadratsætninger

Teori 111 (Kvadratsætninger)

Kvadratet på en sum: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Kvadratet på en differens: $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

To tals sum gange samme tals differens: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Gyldigheden af kvadratsætningerne følger af Øvelse 110 .

kvadratet på et tal = tallet opløftet til anden.

kvadratet på 4 = 16 og kvadratet på 3x = $9x^2$.

Kvadratet på en sum:

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 5^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5 = 9x^2 + 25 + 30x$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

Kvadratet på en differens:

$$(3x - 5)^2 = (3x)^2 + 5^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5 = 9x^2 + 25 - 30x$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$$

To tals sum gange samme tals differens:

$$(3x + 5)(3x - 5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Øvelse 112

Omskriv ved hjælp af formlen for kvadratet på en sum:

(a) $(x + 4)^2 =$

(b) $(1 + x)^2 =$

(c) $(3x + 2)^2 =$

(d) $(5 + 4x)^2 =$

(e) $(u + 2v)^2 =$

(f) $(2u + 3v)^2 =$

Øvelse 113

Omskriv ved hjælp af formlen for kvadratet på en differens:

(a) $(20 - x)^2 =$

(b) $(2x - 7)^2 =$

(c) $(4u - 6v)^2 =$

(d) $(ax - c)^2 =$

Øvelse 114

Omskriv ved hjælp af formlen for to tals sum gange samme tals differens:

(a) $(5 + 3x)(5 - 3x) =$

(b) $(4p + 3q)(4p - 3q) =$

(c) $(2pq + 1)(2pq - 1) =$

(d) $(x^2 + 1)(x^2 - 1) =$

Øvelse 115

Reducer:

(a) $(x + y)^2 - x^2 =$

(b) $(x - y)^2 + 2xy =$

(c) $(x + 2y)^2 - 4y^2 =$

(d) $y^2 + (x + y)(x - y) =$

(e) $y^2 - (x - y)^2 =$

(f) $9x^2 - (3x + 2y)(3x - 2y) =$

Øvelse 116

Figuren viser et stort kvadrat der er delt op i to små kvadrater og to rektangler. Skriv hvad følgende regneudtryk udregner.

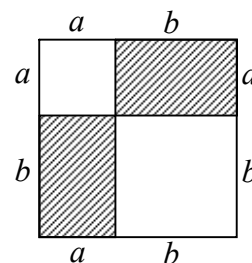
(1) $a + b$

(2) $(a + b)^2$

(3) $a^2 + b^2$

(4) $2ab$

(5) $a^2 + b^2 + 2ab$



Skriv hvad denne øvelse har at gøre med rammen Teori 111.

Svar: _____

Øvelse 117

- (1) Find ud af hvad der skal indsættes for a og b for at

$$a^2 + 2ab + b^2 = x^2 + 6x + 9 \quad a = \quad b =$$

- (2) Brug svaret på (1) til at omskrive $x^2 + 6x + 9$ til formen $(a + b)^2$:

$$x^2 + 6x + 9 =$$

- (3) Find ud af hvad der skal indsættes for a og b for at

$$a^2 + 2ab + b^2 = 1 + 12x + 36x^2 \quad a = \quad b =$$

- (4) Brug svaret på (3) til at omskrive $1 + 12x + 36x^2$ til formen $(a + b)^2$:

$$1 + 12x + 36x^2 =$$

- (5) Omskriv $16x^2 + 40kx + 25k^2$ til formen $(a + b)^2$

$$16x^2 + 40kx + 25k^2 =$$

Øvelse 118

- (1) Find ud af hvad der skal indsættes for a og b for at

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4 - 12x + 9x^2 \quad a = \quad b =$$

- (2) Brug svaret på (1) til at omskrive $4 - 12x + 9x^2$ til formen $(a - b)^2$:

$$4 - 12x + 9x^2 =$$

- (3) Omskriv $16a^2 - 16ab + 4b^2$ til formen $(a - b)^2$:

$$16a^2 - 16ab + 4b^2 =$$

Øvelse 119

- (1) Find ud af hvad der skal indsættes for a og b for at

$$a^2 - b^2 = x^2 - 9 \quad a = \quad b =$$

- (2) Brug svaret på (1) til at omskrive $x^2 - 9$ til formen $(a + b)(a - b)$:

$$x^2 - 9 =$$

- (3) Find ud af hvad der skal indsættes for a og b for at

$$a^2 - b^2 = 4 - 16x^2 \quad a = \quad b =$$

- (4) Brug svaret på (3) til at omskrive $4 - 16x^2$ til formen $(a + b)(a - b)$:

$$4 - 16x^2 =$$

- (5) Omskriv $u^2v^2 - 1$ til formen $(a + b)(a - b)$:

$$u^2v^2 - 1 =$$

Øvelse 120 Reducer:

(a) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} =$

(b) $\frac{a^2 - b^2}{3a + 3b} =$

(c) $\frac{x^2 - 16}{2x - 8} =$

(d) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4} =$

To ligninger med to ubekendte

Teori 121 (Løsning af ligningssystem ved substitution)

Opgave

Løs ligningssystemet

$$2x + y = 5$$

$$3x - 2y = -3$$

Besvarelse

I: $2x + y = 5$

II: $3x - 2y = -3$

Af I får vi:

III: $y = 5 - 2x$

Dette indsætter vi i II:

$$3x - 2(5 - 2x) = -3$$

$$3x - (10 - 4x) = -3$$

$$3x - 10 + 4x = -3$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

Dette indsætter vi i III:

$$y = 5 - 2 \cdot 1$$

$$y = 3$$

Løsning:

$$\underline{x = 1 \text{ og } y = 3}$$

Ordet

substituere

betyder

udskifte.

I besværelsen udskifter vi y i ligning II med $5 - 2x$.

Vi starter med at isolere x eller y i en af ligningerne.

Vi har her valgt at isolere y i den første ligning da det ser ud til at være nemmest.

Facit ville blive det samme selv om vi havde valgt en af de tre andre muligheder.

Vi indsætter i ligning II fordi vi isolerede i ligning I.

Hvis vi isolerer i ligning II, så skal vi indsætte i ligning I.

Vi kan kontrollere facit ved at indsætte 1 og 3 for x og y i ligningerne I og II:

$$2 \cdot 1 + 3 = 5$$

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -3$$

Vi ser at begge ligninger passer.

Øvelse 122

Løs ligningssystemet

$$x + y = 5$$

$$2x - y = -14$$

Øvelse 123

Løs ligningssystemet

$$3x + 4y = 16$$

$$x - y = 3$$

Øvelse 124

Løs ligningssystemet

$$2x - 4y = 2$$

$$3x - 2y = 11$$