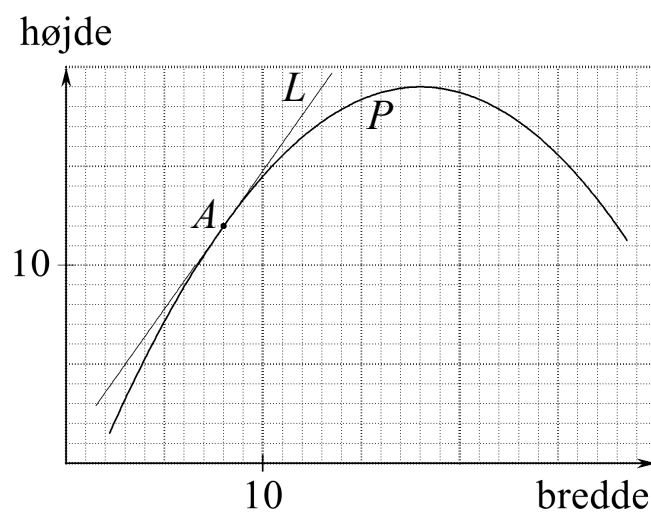


Differential- regning

Et oplæg



2009 Karsten Juul

Til eleven

Dette hæfte kan I bruge inden I starter på differentialregningen i lærebogen.

Det meste af hæftet er små spørgsmål med korte svar.

Spørgsmålene er indrettet sådan at du opdager indholdet af differentialregningen.

Det er vigtigt at du selv fumler dig frem til facitterne.

Det er vigtigt at der ikke er nogen der fortæller dig en smart måde at finde facitterne på.

Brug blyant og viskelæder når du skriver og tegner i hæftet, så du får et hæfte der er egnede til jævnlige opslag under dit videre arbejde med differentialregningen.

Indhold

Graf	1
Lineær graf	2
Tangent	3
Krum graf	4
Tangent på Nspire's grafskærm	5
Væksthastighed	7
Forskrift for tangenthældning	8
Differentialkvotient	9
Undersøge graf med y'	10
Hvad fortæller y' ?	12
Skrivemåderne $f(x)$ og $f'(x)$	13
Vokse og aftage.....	15

Differentialregning. Et oplæg.

1. udgave 2009

© 2009 Karsten Juul

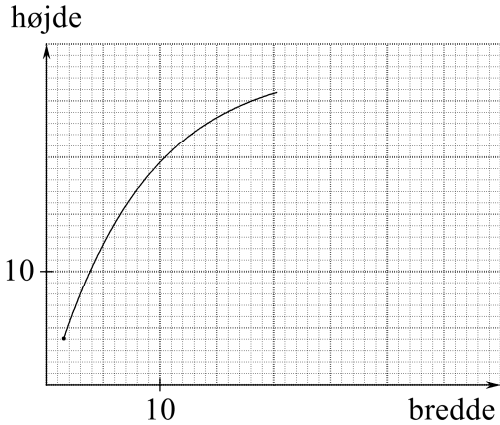
Dette hæfte kan downloades fra www.mat1.dk

Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til kj@mat1.dk som dels oplyser at dette hæfte benyttes, dels oplyser om klasse/hold, lærer og skole/kursus.

Graf

Øvelse 1

På en skærm er der et rektangel. Når vi ændrer bredden, ændres højden automatisk. Figuren nedenfor viser hvordan højden ændres.

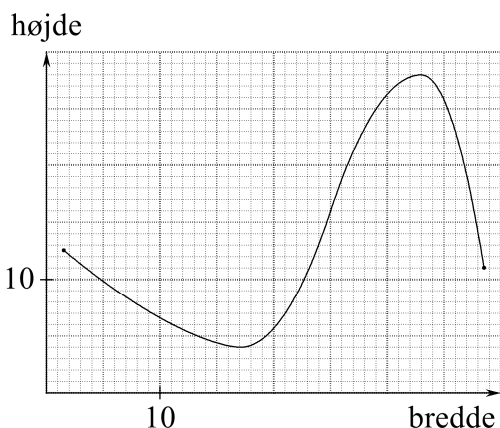


- Når bredden er 3, så er højden _____.
- Angiv på figuren det punkt *A* som giver denne oplysning.
- Når bredden er 18, så er højden _____.
- Angiv på figuren det punkt *B* som giver denne oplysning.

På figuren mangler en del af grafen.

- Vi trækker i rektanglet så bredden bliver 26, og ser at højden er 27. Tilføj på figuren det grafpunkt *C* som viser dette.
- Vi trækker i rektanglet så bredden bliver 37, og ser at højden er 28. Tilføj på figuren det grafpunkt *D* som viser dette.

Øvelse 2

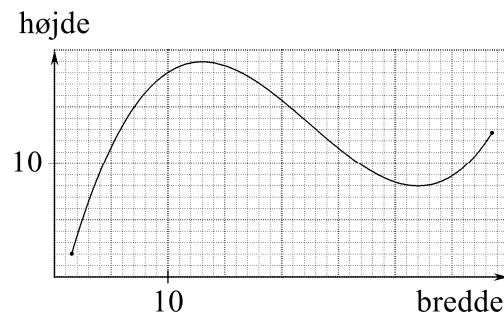


Figuren viser hvordan et rektangels højde ændres når vi ændrer bredden.

- Når bredden er 21, er højden _____.
- Højden er mindst når bredden er _____.
- Den mindste højde er _____.
- Den største højde er _____.
- Højden er størst når bredden er _____.

Øvelse 3

Figuren nedenfor viser hvordan et rektangels højde ændres når vi ændrer bredden.



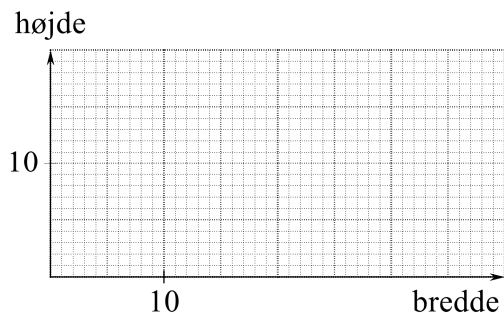
- Når bredden er 32, er højden _____.
- Hvis vi indstiller bredden til 23, får vi så en mindre højde end når vi indstiller bredden til 32? Svar: _____.
- Hvis vi indstiller bredden til 2, får vi så en mindre højde end når vi indstiller bredden til 32? Svar: _____.
- Hvilke bredder kan vi bruge hvis vi ikke vil have at højden er mindre end den er når bredden er 32?
Svar: _____.
- Hvilke bredder kan vi bruge hvis vi ikke vil have at højden er større end den er når bredden er 13?
Svar: _____.

Øvelse 4

I koordinatsystemet nedenfor skal du tegne en sammenhængende graf så følgende er opfyldt:

Når bredden er 10, er højden større end når bredden er 5 eller 20.

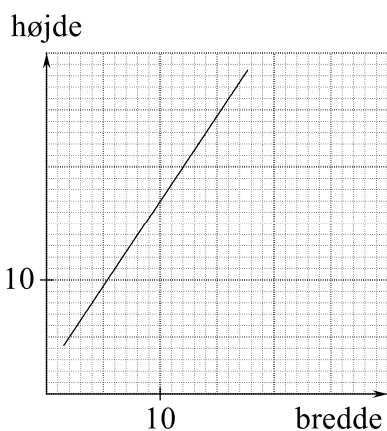
Når bredden er 30, er højden større end når bredden er 20 eller 35.



Lineær graf

Øvelse 5

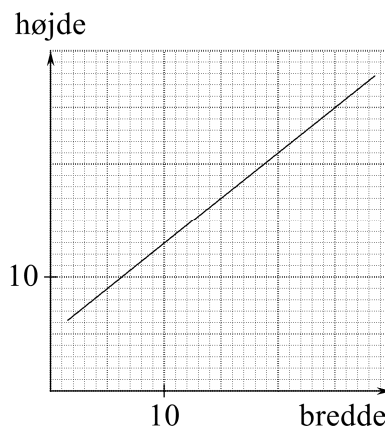
Figuren nedenfor viser hvordan et rektangels højde ændres når vi ændrer bredden.



- Når bredden er 6 er højden _____ .
- Når bredden er 8 er højden _____ .
- Når vi ændrer bredden fra 6 til 8, så bliver højden _____ enheder større.
- Når vi ændrer bredden fra 8 til 10, så bliver højden _____ enheder større.
- Når vi gør bredden 2 enheder større, så bliver højden _____ enheder større.
- Når vi gør bredden 1 enhed større, så bliver højden _____ enheder større.
- Grafens hældningskoefficient er _____ .
- Højden vokser _____ gange så hurtigt som bredden.

Øvelse 6

Figuren nedenfor viser hvordan et rektangels højde ændres når vi ændrer bredden.



- Når vi ændrer bredden fra 5 til 15, så bliver højden _____ enheder større.
- Når vi ændrer bredden fra 15 til 25, så bliver højden _____ enheder større.
- Når vi gør bredden 10 enheder større, så bliver højden _____ enheder større.
- Når vi gør bredden 1 enhed større, så bliver højden _____ enheder større.
- Grafens hældningskoefficient er _____ .
- Højden vokser _____ gange så hurtigt som bredden.

Øvelse 7

Om et rektangel gælder:

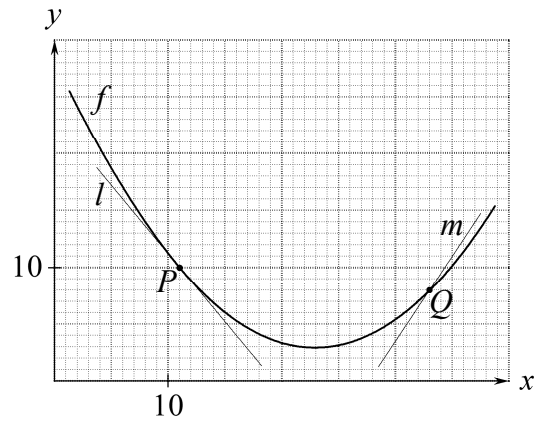
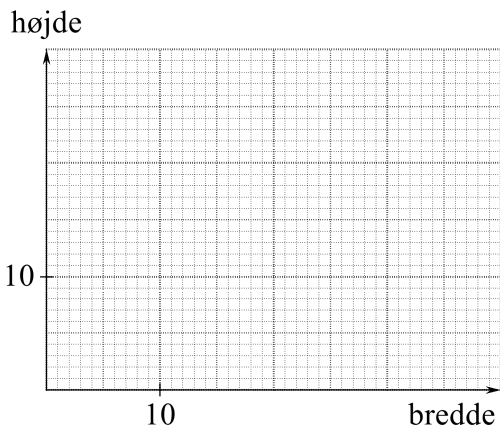
Når vi gør bredden 1 enhed større, så bliver højden 0,6 enheder større.

- Når vi gør bredden 10 enheder større, så bliver højden _____ enheder større.

Om rektanglet gælder også:

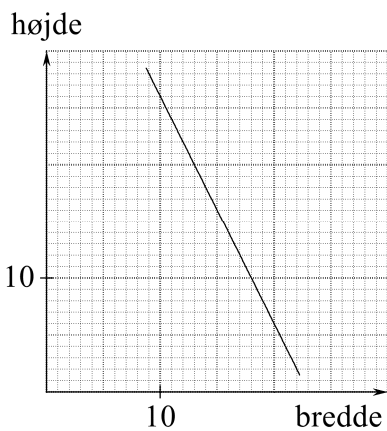
Når bredden er 2 enheder, er højden 5 enheder.

- I koordinatsystemet nedenfor skal du tegne grafen der viser sammenhængen mellem bredde og højde.
- Grafens hældningskoefficient er _____ .
- Højden vokser _____ gange så hurtigt som bredden.



Øvelse 8

Figuren nedenfor viser hvordan et rektangels højde ændres når vi ændrer bredden.



- Når vi ændrer bredden fra 11 til 12 enheder, så bliver højden _____ enheder mindre.
- Når vi gør bredden 1 enhed større, så bliver højden _____ enheder mindre.
- Grafens hældningskoefficient er _____.

Tangent

Teori 9 Tangent.

På figuren er P et punkt på f -graf, og l er en ret linje.

Der gælder

l er tangenten til grafen i P

da

l er den rette linje gennem P der bedst følger grafen nær P .

Bemærkninger:

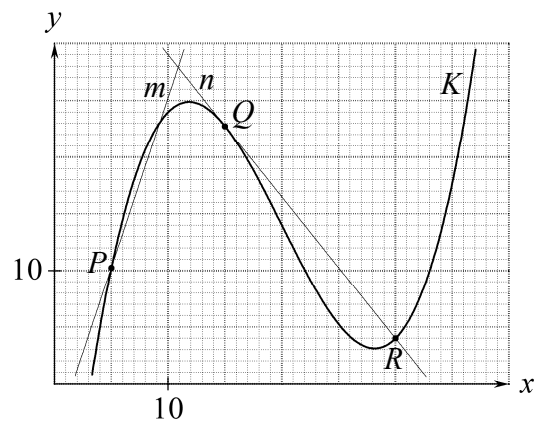
m er ikke tangenten til grafen i Q .

Tangenten i Q er den linje gennem Q der bedst følger grafen nær Q . Denne linje er ikke tegnet på figuren.

I ethvert punkt på den viste graf kan vi tegne en tangent.

Øvelse 10

På figuren nedenfor viser K -graf, hvordan en størrelse y ændres når vi ændrer en størrelse x .



Brug oplysningerne i Teori 9 til at finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser:

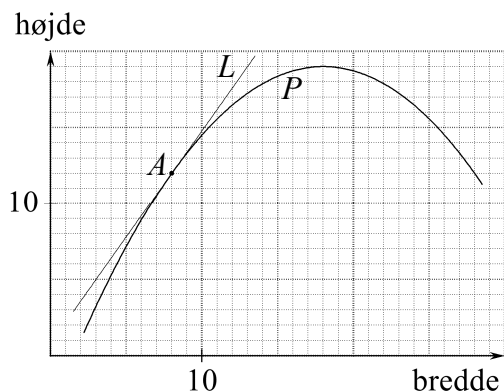
- Er linjen n tangent til K -graf, i punktet R ? Svar: _____.
- Er linjen n tangent til K -graf, i punktet Q ? Svar: _____.
- Er linjen m tangent til K -graf, i punktet P ? Svar: _____.

Krum graf

Øvelse 11

På figuren nedenfor viser den ene graf sammenhængen mellem bredde og højde for et rektangel L , og den anden graf viser sammenhængen mellem bredde og højde for et andet rektangel P .

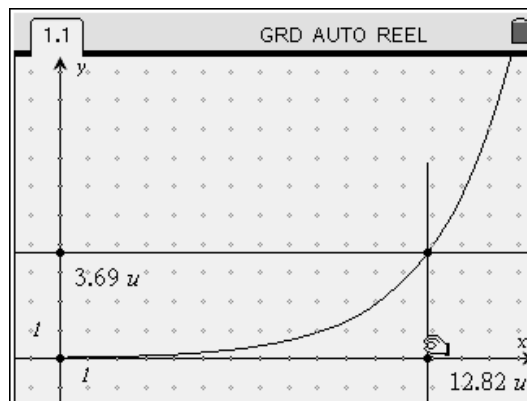
L -graften er tangent til P -graften i punktet A .



- Når vi ændrer bredden i L -rektangler fra 8 til 13, så bliver højden _____ enheder større.
 - Når vi gør L -rektanglerets bredde 1 enhed større, så bliver højden _____ enheder større.
 - For L -rektangleret gælder at højden vokser _____ gange så hurtigt som bredden.
 - De to grafer er næsten ens nær punktet A , så de to rektanglers højder vokser på ca. samme måde når bredden er ca. _____.**
 - For P -rektangleret gælder at når bredden er 8, så vokser højden _____ gange så hurtigt som bredden.
 - Når P -rektanglerets bredde er 8, så er dets højde _____.
- Brug svarene på (e) og (f) til at udregne svaret på (g):
- Når P -rektanglerets bredde er 8,2, så er dets højde ca. _____.

Øvelse 12

Åbn dokumentet diff-oplaeg-oev12.
Skærbilledet ser ud som vist nedenfor.



x -punktet viser en x -værdi (på figuren 12,82) og y -punktet viser den tilhørende værdi af y (på figuren 3.69).

- Træk x -punktet med konstant fart fra venstre side af skærmen til højre side af skærmen. Hvordan ændres y -punktets hastighed? Svar: _____
- y vokser med ca. samme hastighed som x når x er ca. _____ (helt tal).
- y vokser ca. halvt så hurtigt som x når x er ca. _____ (helt tal).
- y vokser ca. dobbelt så hurtigt som x når x er ca. _____ (helt tal).

Teori 13 Tangenthældning og hastighed.

Hvis

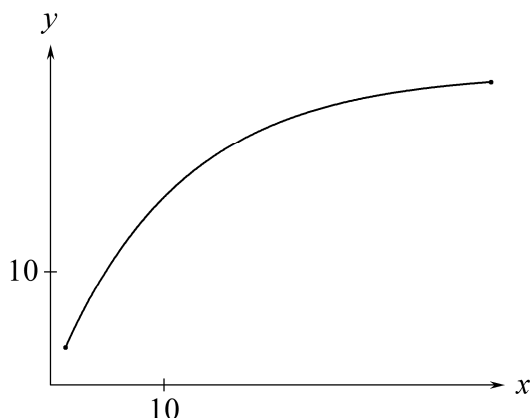
en graf viser hvordan en størrelse y ændres når vi ændrer en størrelse x , og tangenthældningen er t i grafpunktet med førstekoordinat p (hvor p og t står for bestemte tal)

så gælder:

y vokser t gange så hurtigt som x når x er p .

Øvelse 14

Nedenfor er vist en graf der overalt krummer samme vej. Grafen viser hvordan længden y af et linjestykke ændres når vi gør længden x af et andet linjestykke større.



Oplysningen i Teori 13 skal bruges i nogle af spørgsmålene.

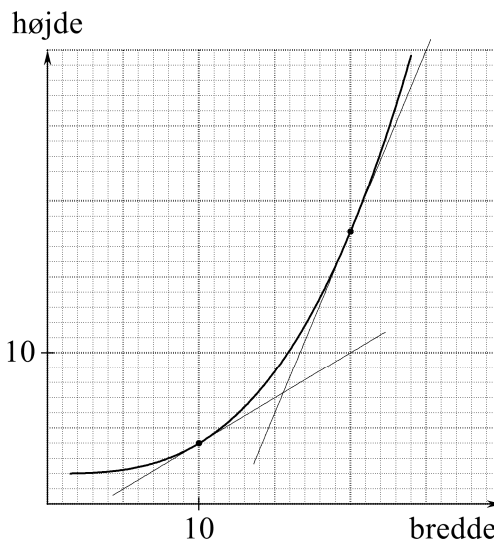
Tangenthældningen er $0,4$ i grafpunktet med førstekoordinat 20 .

- y vokser _____ gange så hurtigt som x når x er 20 .
- Er tangenthældningen i grafpunktet med førstekoordinat 21 større end eller mindre end tangenthældningen i grafpunktet med førstekoordinat 20 . Svar: _____.
- Bliver y altid større når vi gør x større? Svar: _____.
- Hvis vi lader x vokse med konstant fart, vil y så vokse med konstant fart, vokse langsommere og langsommere, eller vokse hurtigere og hurtigere? Svar: _____.

Øvelse 15

Den krumme graf nedenfor viser hvordan et rektangels højde ændres når vi ændrer bredden.

- I punktet med førstekoordinat 10 er tangenthældningen _____.
- I punktet med førstekoordinat 20 er tangenthældningen _____.
- Når bredden er 10 , er højden _____.
- Når bredden er 10 , så vokser højden _____ gange så hurtigt som bredden.



(e) Når bredden er 20 , er højden _____.

(f) Når bredden er 20 , så vokser højden _____ gange så hurtigt som bredden.

Brug svarene på (c)-(f) til at udregne svarene på (g) og (h):

(g) Når bredden er $10,1$, så er højden ca. _____.

(h) Når bredden er $19,8$, så er højden ca. _____.

Tangent på Nspire's grafskærm

Øvelse 16

I denne opgave skal du frembringe et skærbillede på Nspire og derefter bruge dette skærbillede til at løse nogle opgaver.

På en skærm er et rektangel. Vi kan ændre dets bredde x til ethvert tal i intervallet $0 < x \leq 5$.

Rektanglets højde beregner computeren ved at udføre følgende kommandoer:

A: Gang bredde med sig selv.

B: Gang A-resultat med $0,1$.

C: Læg $0,3$ til B-resultat.

(a) Udtryk højden ved x :

Højde = _____

Nu skal du frembringe skærbilledet på følgende måde:

Først skal du begynde helt forfra:

Tast og vælg 6:Nyt dokument.

Så skal du danne et koordinatsystem:

Vælg 2:Tilføj Grafer og Geometri.

Indstil koordinatsystemet:

Tast og vælg 4:Vindue 1:Dialogboks .

Sæt XMin=-0.5 XMax=5.5

X-skala=1 YMin=-0.5

YMax=3.5 Y-skala=1 .

Flyt mellem felter med eller . Afslut med eller .

Tast funktionen:

Slet $f1(x) =$ og skriv

$$h(x) = 0.1 \cdot x^2 + 0.3 \mid 0 < x \leq 5$$

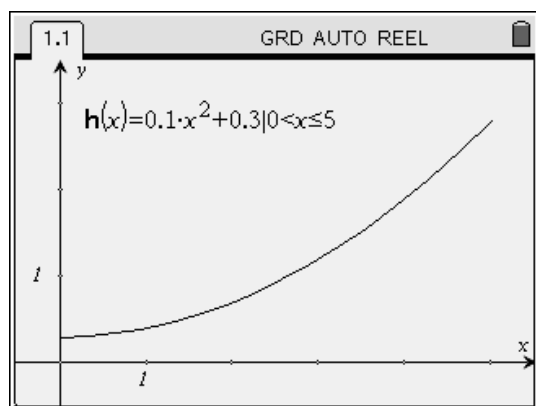
Tast .

Fjern indtastningslinjen:

Tast og vælg 2:Vis 6:Skjul indtastningslinje .

Du kan flytte forskriften sådan: Flyt markør til forskrift, hold nede til hånd lukker, flyt ved at trykke flere gange på ringen rundt om . Tast .

Nu skal skærmen se sådan ud:



Afsæt et punkt på grafen:

Tast og vælg 6:Punkter og linjer 2:Punkt på .

Flyt markør til graf så der står punkt på .

Tast .

Få tegnet tangenten i punktet:

Tast 6:Punkter og linjer 7:Tangentlinje

Flyt markøren til det punkt du lige har afsat, så der står punkt . ADVARSEL: Der må IKKE stå punkt på . Tast .

Få beregnet tangenthældningen:

Tast og vælg 7:Målinger 3:Hældning

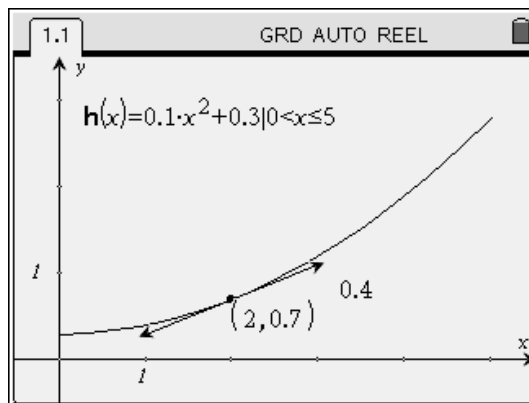
Flyt markør til den ene ende af tangent (for at undgå at hældning skrives oven i koordinater) så tangent blinker. Tast .

Ret punktets førstekoordinat til 2:

Flyt markør til førstekoordinat.

Tast . Slet tallet med , tast 2 og afslut med .

Nu skal skærmen se sådan ud:



På dette skærmbillede ser vi:

Når bredden er 2, er højden 0,7 .

Når bredden er 2, vokser højden 0,4 gange så hurtigt som bredden.

Du skal finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser nedenfor, ved at ændre førstekoordinaten til det punkt du har afsat på grafen:

(b) Når bredden er 2,01, så er højden _____ .

(c) Når bredden ændres fra 2 til 2,01, så bliver højden _____ enheder større.

(d) Når bredden er 2,5, er højden _____ .

(e) Når bredden er 2,5, så vokser højden _____ gange så hurtigt som bredden.

(f) Når bredden er 2,51, så er højden _____ .

(g) Når vi ændrer bredden fra 2,5 til 2,51, så bliver højden _____ enheder større.

(h) Gem dokumentet med filnavnet

diff-oplaeg-oev16.

For at gøre dette skal du

taste

vælge 1:Filer 3:Gem

taste filnavnet

taste

Væksthastighed

Teori 17 Væksthastighed.

Når tallene på x -aksen er tidspunkter, så bruger vi ikke et udtryk som

" y vokser 3 gange så hurtigt som x ".

I stedet udtrykker vi dette ved at sige

"væksthastigheden er 3".

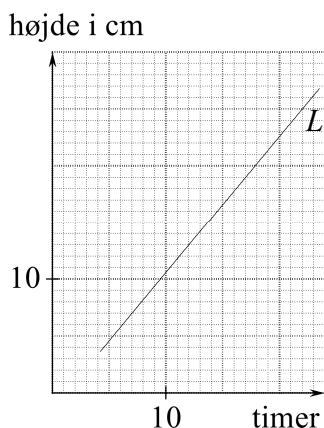
Altså er

Væksthastighed = tangenthældning.

Øvelse 18

På en skærm er der et rektangel L som ændrer højde, og et ur.

Grafen nedenfor viser hvordan højden ændres.



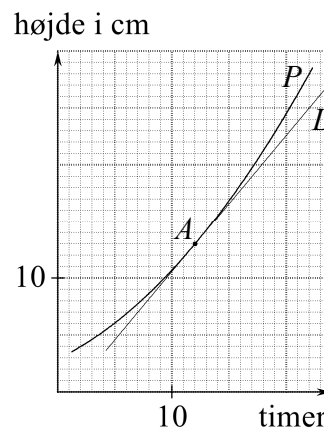
- Kl. 7 er højden _____ cm.
- Kl. 12 er højden _____ cm.
- I tidsrummet fra 7 til 12 bliver rektanglet _____ cm højere.
- I tidsrummet fra 12 til 17 bliver rektanglet _____ cm højere.
- På 5 timer bliver rektanglet _____ cm højere.
- På 1 time bliver rektanglet _____ cm højere.
- På 0,1 time bliver rektanglet _____ cm højere.
- På ethvert tidspunkt er højdens væksthastighed _____ cm pr. time

Øvelse 19

På figuren nedenfor viser P -grafnen hvordan højden af et rektangel vokser.

L -grafnen viser hvordan rektanglet fra øvelse 18 vokser.

L -grafnen er tangent til P -grafnen i punktet A .



- De to grafer er næsten ens nær punktet A , så de to rektanglers højder vokser på ca. samme måde når klokken er ca. _____.

- Kl. 12 er P -rektanglets højde _____ cm.

- Kl. 12 er P -rektanglets væksthastighed _____ cm pr. time.

Øvelse 20

Fra kl. 1 til kl. 11 vokser arealet af en figur.

Det er oplyst at

$$y = 6 - 10 \cdot 0.5^x$$

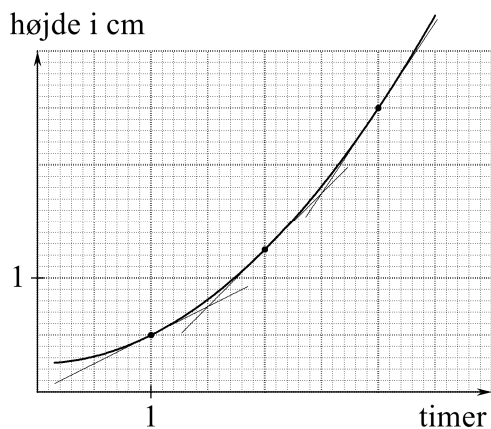
hvor y er arealet, og x er tiden (i timer).

- Lav for denne forskrift et Nspire-skærbillede af den type som du brugte til at finde svarene på (b)-(g) i øvelse 16.
- Kl. 2 er arealet _____.
- Kl. 2 er arealets væksthastighed _____.
- Kl. 4 er arealet _____.
- Kl. 4 er arealets væksthastighed _____.
- Kl. 8 er arealet _____.
- Kl. 8 er arealets væksthastighed _____.
- Gem dokumentet med filnavnet *diff-oplaeg-oev20*.

Forskrift for tangenthældning

Øvelse 21

Den krumme graf nedenfor viser hvordan højden af et rektangel vokser.



- (a) På figuren kan vi aflæse væksthastigheder. Udfyld den tomme plads i følgende tabel:

x (timer):	1	2	3
Væksthastighed:		1	1,5

- (b) Gæt ud fra tabellen en simpel metode til at udregne væksthastigheden når tidspunktet x er kendt. Skriv metoden som en formel:

$$\text{Væksthastighed} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

Brug formelen fra (b) til at finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser:

- (c) Kl. 4 er væksthastigheden $\underline{\hspace{1cm}}$.
 (d) Kl. $\underline{\hspace{1cm}}$ er væksthastigheden 3,5 enheder pr. time
 (e) I grafpunktet med førstekoordinat 4 er tangenthældningen $\underline{\hspace{1cm}}$.
 (f) I grafpunktet med førstekoordinat $\underline{\hspace{1cm}}$ er tangenthældningen 5.

Øvelse 22

På en graf er aflæst følgende tangenthældninger:

x :	1	2	3	4
Tangenthældning:	4	5	6	7

- (a) Gæt ud fra tabellen en simpel metode til at udregne tangenthældningen i et grafpunkt hvis førstekoordinat x er kendt. Skriv metoden som en formel:

$$\text{Tangenthældning} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

Brug formelen fra (a) til at finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser:

- (b) I grafpunktet med førstekoordinat 1,8 er tangenthældningen $\underline{\hspace{1cm}}$.
 (c) I grafpunktet med førstekoordinat $\underline{\hspace{1cm}}$ er tangenthældningen 9,5.

Øvelse 23

På en graf er aflæst følgende punkter (x, y) og tangenthældninger:

x :	1	2	3	4
y :	1	4	9	16
Tangenthældning:	2	4	6	8

- (a) Gæt formel ud fra tabellen:

$$y = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$\text{Tangenthældning} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

Brug formlerne fra (a) til at finde ud af hvad der skal stå på de tomme pladser:

- (b) Grafpunktet med førstekoordinat 1,5 har andenkoordinat $\underline{\hspace{1cm}}$.
 (c) I grafpunktet med førstekoordinat 1,5 er tangenthældningen $\underline{\hspace{1cm}}$.
 (d) I grafpunktet med førstekoordinat $\underline{\hspace{1cm}}$ er tangenthældningen 36.
 (e) Grafpunktet med positiv førstekoordinat $\underline{\hspace{1cm}}$ har andenkoordinat 36.

Øvelse 24

For en graf kan følgende formler bruges til at beregne andenkoordinat y og tangenthældning for et punkt hvis førstekoordinat x er kendt:

$$y = \frac{1}{x}$$

$$\text{Tangenthældning} = -\frac{1}{x^2} .$$


- (a) Grafpunktet med førstekoordinat 2 har andenkoordinat $\underline{\hspace{1cm}}$.

- (b) I grafpunktet med førstekoordinat 2 er tangenthældningen _____ .
- (c) I grafpunktet med positiv førstekoordinat _____ er tangenthældningen -4 .
- (d) Grafpunktet med førstekoordinat _____ har andenkoordinat $0,4$.

Differentialkvotient


Teori 25 Differentialkvotient.

En funktions differentialkvotient er en ny funktion som blandt andet kan bruges til at beregne tangenthældning og væksthastighed.


Vi kan få Nspire til at finde differentialkvotienten. Begynd på et nyt dokument ( 6) og vælg 1:Tilføj Grafregner .

Vi vil finde differentialkvotienten af

$$y = \frac{1}{x} .$$

Tast  og vælg 4:Calculus 1:Differentialkvotient. Så fremkommer symbolet:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\square}{\square} \right)$$

Skriv x i første felt, skriv forskriften i andet felt, og tast  :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) \quad \frac{-1}{x^2}$$

Her står at funktionen

$$y = \frac{1}{x}$$

har differentialkvotienten

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

Symbolet y' læses "y-mærke" og betyder differentialkvotienten af y .

Øvelse 26

Funktionen

$$y = \frac{x}{1-x}$$

har differentialkvotienten

$$y' = \underline{\hspace{2cm}}$$

Funktionen

$$y = \ln(x^2 + 1)$$

har differentialkvotienten

$$y' = \underline{\hspace{2cm}}$$

Teori 27 Graf og tangent.

I ligningerne

(1) $y = \frac{1}{x}$ ←

Dette er kun et eksempel. Normalt er der en ny forskrift i hver ny opgave.

(2) $y' = -\frac{1}{x^2}$ ←

Vi har fundet forskriften for y' ved at differentiere forskriften for y på Nspire.

er

x = førstekoordinat til et grafpunkt P

y = andenkoordinat til P

y' = tangenthældning i P

METODE: Når vi kender ét af disse tre tal kan vi sætte det ind i en af de to ligninger (1) og (2) og bestemme et andet af de tre tal.

Vi indsætter 4 for x i (2) og får y' ved at taste

$$\frac{-1}{x^2} |_{x=4} \quad \frac{-1}{16}$$

eller

$$\frac{-1}{4^2} \quad \frac{-1}{16}$$

Vi indsætter -4 for y' i (2) og får x ved at taste

$$\text{solve} \left(-4 = \frac{-1}{x^2}, x \right) \quad x = \frac{-1}{2} \text{ or } x = \frac{1}{2}$$

Øvelse 28

En funktion har forskriften

$$y = 0,5 \cdot 1,6^x .$$

Brug metoderne fra Teori 25 og Teori 27:

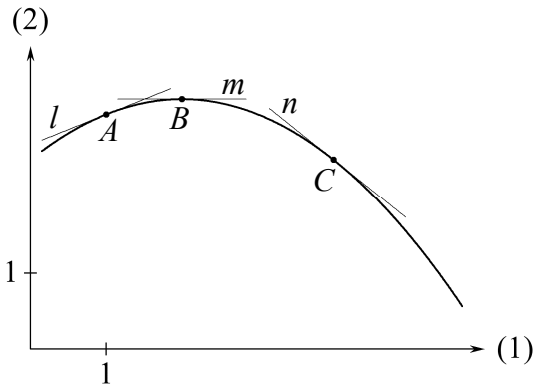
- (a) $y' = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (b) Når $x = 7,2$ er $y' = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (c) Når $x = 4,2$ er $y = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (d) Når $y = 5,0$ er $x = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (e) Når $y' = 9,2$ er $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

Øvelse 29

Figuren viser grafen for funktionen

$$y = -0,2x^2 + 0,8x + 2,5$$

samt tangenterne i grafpunkterne A , B og C .



Løs (a)-(g) på regneskærmen uden at bruge ekstremumsværktøjer. Du skal altså bruge metoderne fra Teori 25 og Teori 27.

- $y' =$ _____ .
- Førstekoorinat for A er 1.
I A er tangenthældningen _____ .
- A har andenkoordinaten _____ .
- I B er tangenthældningen 0.
 B har førstekoorinat _____ .
- B har andenkoordinaten _____ .
- C har andenkoordinaten 2,5.
 C har førstekoorinat _____ .
- I C er tangenthældningen _____ .

Teori 30 Funktion og væksthastighed.

For en plante gælder

$$(1) \quad y = 8 - 0,19 \cdot 0,9^x$$

og dermed

$$(2) \quad y' = 0,02 \cdot 0,9^x$$

hvor

$x =$ antal dage efter 1. juni

$y =$ plantens højde i cm

$y' =$ højdens væksthastighed

METODE: Når vi kender ét af disse tre tal kan vi sætte det ind i en af de to ligninger (1) og (2) og bestemme et andet af de tre tal.

Dette er kun et eksempel. Normalt er der en ny forskrift i hver ny opgave.

Vi har fundet forskriften for y' ved at differentiere forskriften for y på Nspire.

Øvelse 31

Et dyr vokser sådan at

$$y = 3,0 \cdot 1,31^x$$

hvor y er længden i mm og x er antal uger efter 1. maj.

(a) $y' =$ _____ .

Løs (b)-(e) på regneskærmen ved at bruge metoden fra Teori 30.

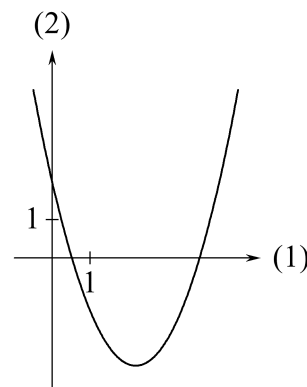
- 8 uger efter 1. maj er længden _____ mm.
- 8 uger efter 1. maj er væksthastigheden _____ mm pr. uge.
- _____ uger efter 1. maj er længden 14 mm.
- _____ uger efter 1. maj er væksthastigheden 4,7 mm pr. uge.

Undersøge graf med y'

Øvelse 32

Figuren viser grafen for funktionen

$$y = x^2 - 4,4x + 2$$

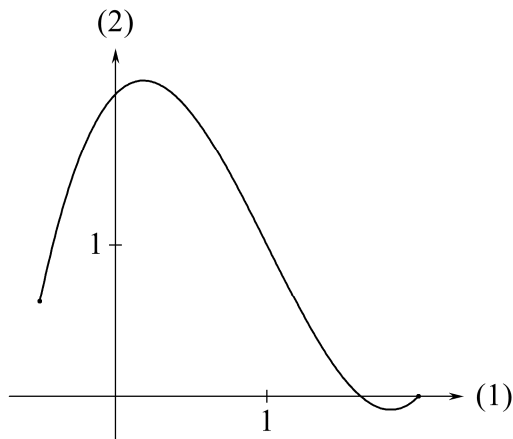


- $y' =$ _____ .
- I toppunktet er tangenthældningen _____ .
- Brug svarene på (a) og (b) til at udregne toppunktets førstekoorinat:
Toppunktets førstekoorinat er _____ .
- Skæringspunktet med andenaksen har førstekoorinat _____ .
- Når $x = 0$, er $y' =$ _____ .
- I skæringspunktet med andenaksen er tangenthældningen _____ .

Øvelse 33

Figuren viser grafen for funktionen

$$y = x^3 - 3x^2 + x + 2, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 2.$$



A er det grafpunkt hvis andenkoordinat er funktionens minimum.

B er det grafpunkt hvis andenkoordinat er funktionens maksimum.

- Angiv på figuren punkterne A og B .
 - I A er tangenthældningen _____.
 - I B er tangenthældningen _____.
- Løs (d)-(g) på regneskærmen uden brug af ekstremumsværktøjer.
- A har førstekoordinaten _____.
 - B har førstekoordinaten _____.
 - Funktionens maksimum er _____.
 - Funktionens minimum er _____.

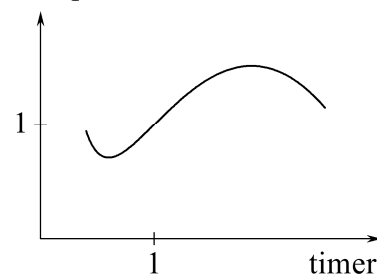
Øvelse 34

Temperaturen i en beholder ændres sådan at

$$y = -x^2 + 4x + \frac{1}{x} - 3, \quad 0,4 \leq x \leq 2,5$$

hvor y er temperaturen målt i $^{\circ}\text{C}$, og x er tiden målt i timer. Figuren viser grafen for denne sammenhæng.

Temperatur i $^{\circ}\text{C}$



- På det tidspunkt hvor temperaturen er højest, er $y' =$ _____.

Løs (b)-(d) på regneskærmen uden brug af ekstremumsværktøjer.

- Temperaturen er højest på tidspunktet _____ timer.
- Den højeste temperatur er _____ $^{\circ}\text{C}$.
- Den laveste temperatur er _____ $^{\circ}\text{C}$.

Øvelse 35

En linje l har hældningskoefficienten 3 og går gennem punktet $P(2, 1)$.

- l har ligningen _____.

Linjen m er tangent i punktet Q til grafen for funktionen $y = \sqrt{2x-1}$.

Q har førstekoordinaten 5.

Løs (b)-(d) på regneskærmen uden at bruge tangentværktøj.

- Q har andenkoordinaten _____.
- m har hældningskoefficienten _____.
- m har ligningen _____.

Øvelse 36

Linjen n er tangent i punktet R til grafen for funktionen $y = \sqrt{2x-1}$.

n har hældningskoefficienten $\frac{1}{4}$.

Løs (a)-(c) på regneskærmen uden at bruge tangentværktøj.

- R har førstekoordinaten _____.
- R har andenkoordinaten _____.
- n har ligningen _____.

Hvad fortæller y' ?

Øvelse 37

En population vokser sådan at

$$y = \frac{150}{1 + 24 \cdot e^{-0,13 \cdot x}}$$

hvor y er antallet af individer, og x er antal døgn efter 15. maj.

- 10 døgn efter 15. maj er antallet af individer _____ .
- 10 døgn efter 15. maj er væksthastigheden _____ individer pr. døgn.
- Når $x = 30$ er $y' =$ _____ .
- Når $x = 30$ er $y =$ _____ .
- Hvad fortæller facit i (c) om populationen? Svar: _____

- Hvad fortæller facit i (d) om populationen? Svar: _____

Øvelse 38

Temperaturen af en klods aftager sådan at

$$y = 28 \cdot 0,968^x - 7$$

hvor y er temperaturen i $^{\circ}\text{C}$, og x er antal minutter efter kl. 2.

- 5 minutter efter kl. 2 aftager temperaturen med hastigheden _____ $^{\circ}\text{C}$ pr. minut.
- 5 minutter efter kl. 2 er temperaturen _____ $^{\circ}\text{C}$.
- Når $x = 60$ er $y =$ _____ .
- Når $x = 60$ er $y' =$ _____ .
- Hvad fortæller facit i (c) om temperaturen? Svar: _____

- Hvad fortæller facit i (d) om temperaturen? Svar: _____

Øvelse 39

Et dyr løber i visse situationer sådan at

$$y = 9x - x \cdot 1,01^x + 11, \quad 2 \leq x \leq 50$$

hvor y er hvor langt dyret har løbet (målt i meter), og x er hvor lang tid dyret har løbet (målt i sekunder)

- Når dyret har løbet i 3 sekunder, er farten _____ meter pr. sekund.
- Når dyret har løbet i 3 sekunder, har det løbet _____ meter.
- Når $x = 40$, er $y =$ _____ .
- Når $x = 40$, er $y' =$ _____ .
- Hvad fortæller facit i (c) om dyret? Svar: _____

- Hvad fortæller facit i (d) om dyret? Svar: _____

Øvelse 40

Et bestemt træ vil under passende omstændigheder vokse sådan at

$$y = \frac{x}{0,95 - 0,085x}$$

hvor y er højden i meter, og x er diameteren i meter.

- Når diameteren er 5 meter, er højden _____ meter.
- Når diameteren er 5 meter, vokser højden _____ gange så hurtigt som diameteren.
- Når $x = 7,5$ er $y =$ _____ .
- Når $x = 7,5$ er $y' =$ _____ .
- Hvad fortæller facit i (c) om træet? Svar: _____

- Hvad fortæller facit i (d) om træet? Svar: _____

Øvelse 41

For en plante gælder at

$$y = 100 - \frac{100}{x}$$

hvor y er prisen i kr. og x er højden i meter.

- (a) Når højden (målt i meter) er 2, skal man gange en lille stigning i højden med _____ for at få den tilsvarende stigning i prisen (målt i kr.).
- (b) Når $x = 4$ er $y' =$ _____ .
- (c) Hvad fortæller facit i (b) om prisen?

Svar: _____

Skrivemåderne $f(x)$ og $f'(x)$

Teori 42 Skrivemåderne $f(x)$ og $f'(x)$.

Når p , q og r er tal, gælder om grafen for en funktion f :

$f(p)$ er andenkoordinaten til grafpunktet med førstekoordinat p

$f(p) = q$ betyder: q er andenkoordinaten til grafpunktet med førstekoordinat p .

$f'(p)$ er tangenthældningen i grafpunktet med førstekoordinat p

$f'(p) = r$ betyder: r er tangenthældningen i grafpunktet med førstekoordinat p .

Øvelse 43

Brug oplysningerne i Teori 42:

- (a) Om en funktion g gælder at $g(3) = 1,5$.

Hvad fortæller dette om grafen for g ?

Svar: _____

- (b) Om funktionen g gælder også at

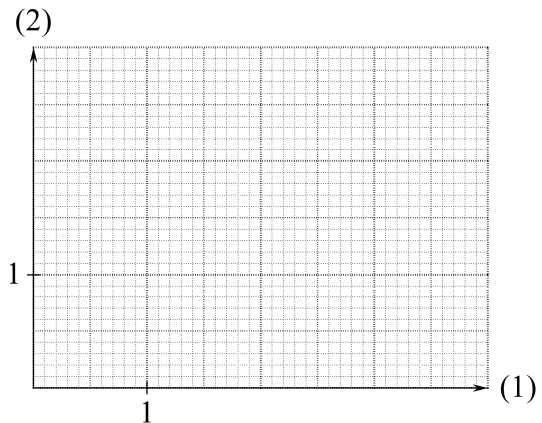
$$g'(3) = 2 \text{ .}$$

Hvad fortæller dette om grafen for g ?

Svar: _____

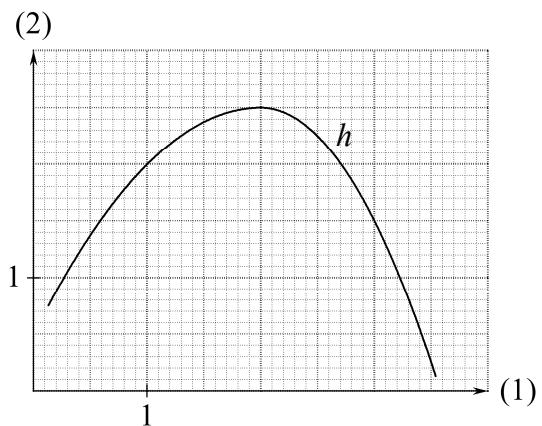
- (c) I koordinatsystemet nedenfor skal du tegne grafen for en funktion g sådan at hele grafen er krum, og så der gælder

$$g(1,8) = 0,5 \text{ , } g(3) = 1,5 \text{ og } g'(3) = 2 \text{ .}$$



Øvelse 44

Figuren viser grafen for en funktion h .



Brug oplysningerne i Teori 42:

- (a) $h(1) =$ _____ $h'(1) =$ _____ .
- (b) $h(2) =$ _____ $h'(2) =$ _____ .
- (c) Når $h'(x) = -2$, er $x =$ _____ .
- (d) Når $h(x) = 2$,
er $x =$ _____ eller $x =$ _____ .

Øvelse 45

En funktion f har forskriften

$$f(x) = x^2 + 2.$$

- (a) $f'(x) =$ _____ .
- (b) Når $x = 3$ er $x^2 + 2 =$ _____ .
- (c) Når $x = 3$ er $f(x) =$ _____ .
- (d) $f(3) =$ _____ .
- (e) Når $x = 3$ er $2x =$ _____ .
- (f) Når $x = 3$ er $f'(x) =$ _____ .
- (g) $f'(3) =$ _____ .

Brug oplysningerne i Teori 42:

- (h) Hvad fortæller facit i (d) om grafen?

Svar: _____

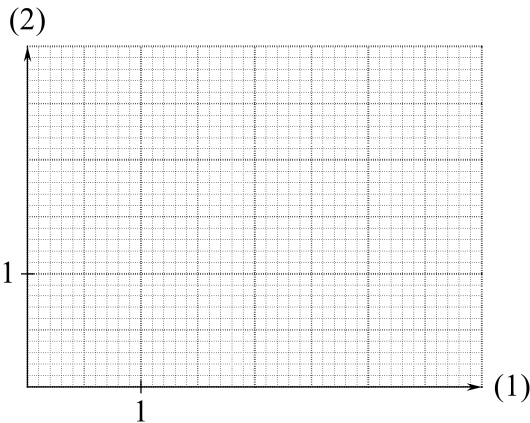
- (i) Hvad fortæller facit i (g) om grafen?

Svar: _____

Øvelse 46

Tegn en simpel krum graf for en funktion f sådan at der både gælder

$$f(2) < f(3) \quad \text{og} \quad f'(2) > f'(3).$$



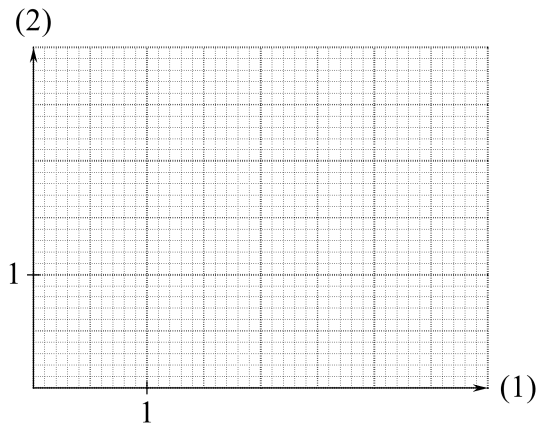
Øvelse 47

Tegn en simpel krum graf for en funktion g sådan at der både gælder

$$g(2) \text{ er } 1,5 \text{ enheder større end } g(1)$$

og

$$g'(2) \text{ er større end } g'(1).$$



Øvelse 48

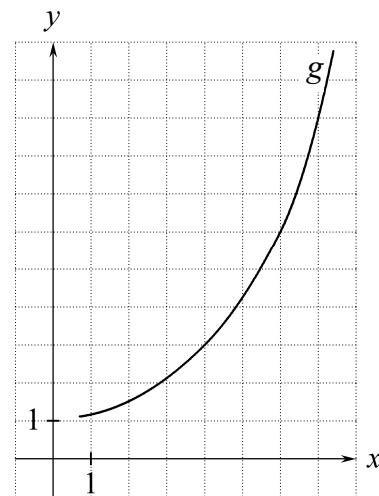
Om en funktion f er oplyst at

$$f(4) = 6 \quad \text{og} \quad f'(4) = 2.$$

- (a) Hvad fortæller dette om grafen for f ?

Svar: _____

Figuren viser grafen for en funktion g .



- (b) $g(4) =$ _____ og $g'(4) =$ _____ .

- (c) Når $g(x) = 9$, er $x =$ _____ .

- (d) Når $g'(x) = 2$, er $x =$ _____ .

En funktion h har forskriften $h(x) = x^3$.

- (e) Et punkt P på h -grafen har førstekoordinat 4.

P har andenkoordinat _____ .

I P er tangenthældningen _____ .

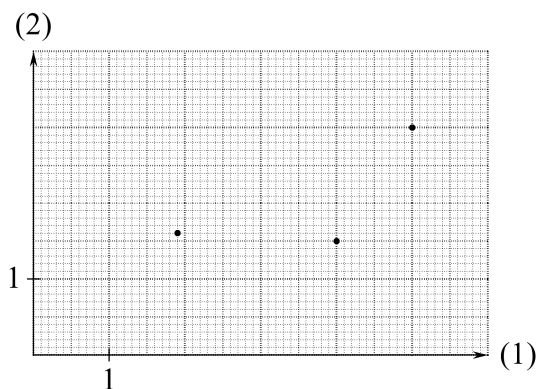
Opgaven fortsætter på næste side!

- (f) I et punkt Q på h -grafen er tangenthældningen 2. Q har førstekoordinat _____ eller _____ .
- (g) Et punkt R på h -grafen har andenkoordinat 6. R har førstekoordinat _____ .

Vokse og aftage

Øvelse 49

Figuren viser tre punkter på grafen for en funktion f .



$$f(x) = \text{hemmelig forskrift}$$

$$f'(x) = x - 3$$

- (a) For hvert af de tre punkter skal du udregne tangentens hældningskoefficient og tegne tangenten.
Hældninger: _____

- (b) Bemærk at det ikke kun er for x -værdierne 1,9, 4 og 5 at du kan udregne tangenthældningen. Du kan udregne tangenthældningen for enhver x -værdi.

Tangenthældningen er negativ når $x < \underline{\hspace{2cm}}$.

Tangenthældningen er positiv når $x > \underline{\hspace{2cm}}$.

Øvelse 50

For en funktion g gælder:

$$g(x) = \text{hemmelig forskrift}$$

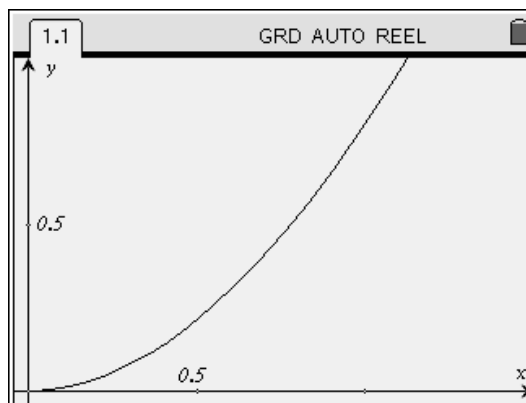
$$g'(x) = x^2 - 4$$

- (a) I det punkt på g -grafen hvis x -koordinat er 0, er tangenthældningen _____ .

- (b) De punkter på g -grafen hvori tangenthældningen er 0, har x -koordinaterne _____ og _____ .
- (c) Er g aftagende mellem disse to tal?
Svar: _____ .

Øvelse 51

Figuren viser en del af grafen for en funktion f .



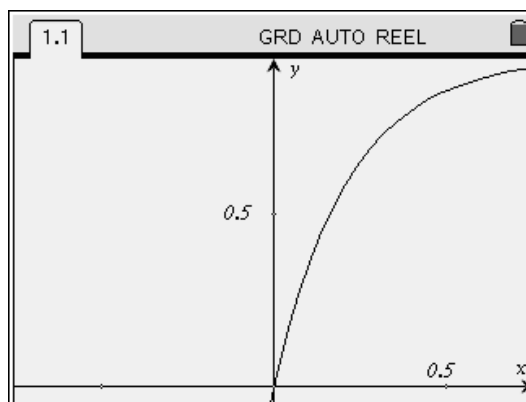
$$f(x) = \text{hemmelig forskrift}$$

$$f'(x) = \frac{3}{10}x \cdot (6 - x)$$

- (a) Er f voksende i hele intervallet $x > 0$?
Svar: _____ .

Øvelse 52

Figuren viser en del af grafen for en funktion f .



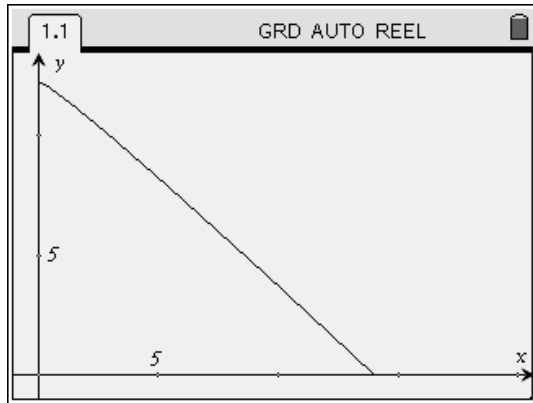
$$f(x) = \text{hemmelig forskrift}$$

$$f'(x) = \frac{4,4}{100^x}$$

- (a) Er f voksende?
Svar: _____ .

Øvelse 53

Figuren viser hele grafen for en funktion f .



$$f(x) = \text{hemmelig forskrift}, \quad 0 < x < 14$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{4} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x < 14.$$

(a) Er f voksende noget sted?

Svar: _____.

Teori 54

En funktion er voksende i et x -interval hvis der for alle x -værdier i dette interval gælder:

Jo større x er, jo større er $f(x)$.

Hvis vi skal vise at f ikke er voksende, så skal vi altså finde to x -værdier hvor den største af dem ikke har den største funktionsværdi.

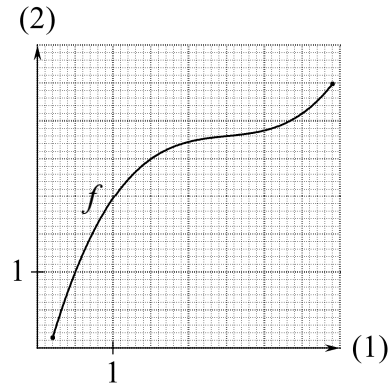
En funktion er aftagende i et x -interval hvis der for alle x -værdier i dette interval gælder:

Jo større x er, jo mindre er $f(x)$.

Hvis vi skal vise at f ikke er aftagende, så skal vi altså finde to x -værdier hvor den største af dem ikke har den mindste funktionsværdi.

Øvelse 55

Figuren viser grafen for en funktion f .

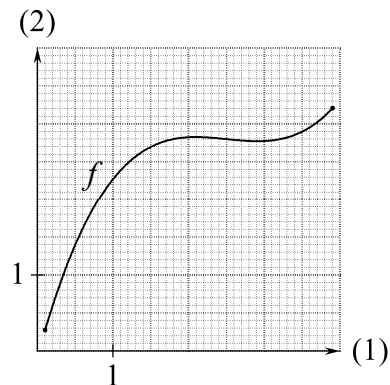


(a) Skriv at f er voksende, eller skriv to x -værdier hvor den største ikke har den største funktionsværdi.

Svar: _____.

Øvelse 56

Figuren viser grafen for en funktion f .



(a) Skriv at f er voksende, eller skriv to x -værdier hvor den største ikke har den største funktionsværdi.

Svar: _____.

Øvelse 57

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2 - x^{1.3} + 1,1^x, \quad x > 0.$$

(a) Skriv at f er aftagende, eller skriv to x -værdier hvor den største ikke har den mindste funktionsværdi.

Svar: _____.

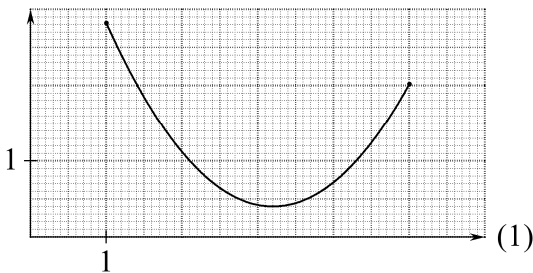
Øvelse 58

Figuren viser grafen for funktionen

$$f(x) = 0,5x^2 - 3,2x + 5,52, \quad 1 \leq x \leq 5.$$

(a) $f'(x) =$ _____.

(2)



(b) Af forskriften får vi $f(3,1) =$ _____.

(c) Når $f'(x) = 0$, er $x =$ _____.

(d) Skriv at f er aftagende i intervallet $1 \leq x \leq 3,2$, eller angiv to tal i intervallet hvor det største af dem ikke har den mindste funktionsværdi:
_____.

(e) Skriv at f er voksende i intervallet $3,2 \leq x \leq 5$, eller angiv to tal i intervallet hvor det største af dem ikke har den største funktionsværdi:
_____.

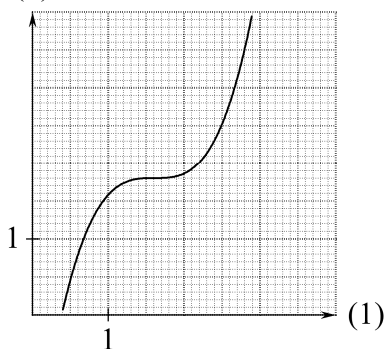
Øvelse 59

Figuren viser grafen for funktionen

$$f(x) = (x - 1,6)^3 + 1,8$$

(a) $f'(x) =$ _____.

(2)



(b) Af forskriften får vi $f(1,5) =$ _____.

(c) Af forskriften får vi $f(1,6) =$ _____.

(d) Når $f'(x) = 0$, er $x =$ _____.

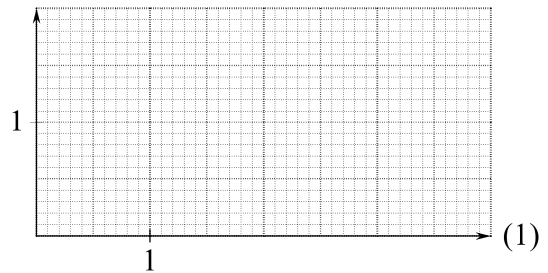
(e) Skriv at f er voksende, eller angiv to x -værdier hvor den største af dem ikke har den største funktionsværdi:
_____.

Øvelse 60

(a) Tegn grafen for en funktion f så

$f(x)$ er voksende, og
 $f'(x)$ er aftagende.

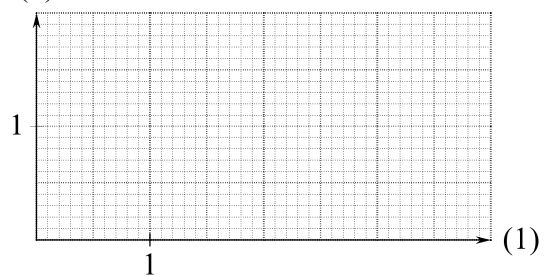
(2)



(b) Tegn grafen for en funktion g så

$g(x)$ er aftagende, og
 $g'(x)$ er aftagende.

(2)



(c) Tegn grafen for en funktion h der opfylder følgende fire betingelser:

$h(x)$ er aftagende i intervallet $x \leq 2$

$h(x)$ er voksende i intervallet $2 \leq x$

$h'(x)$ er voksende i intervallet $x \leq 3$

$h'(x)$ er aftagende i intervallet $3 \leq x$.

(2)

