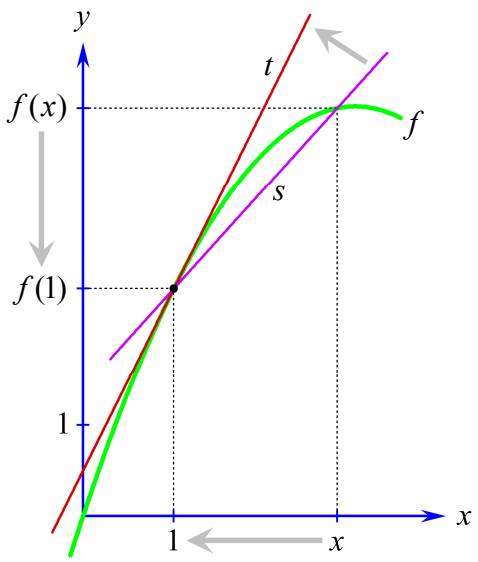
Differential-regning

for B-niveau i hf

udgave 3



2015 Karsten Juul

Differentialkvotient

1. Tangent og røringspunkt. 1
2. Funktionsværdi og differentialkvotient. 1
3. Fortolkning af $f'(x)$ vedr. graf. 2
4. Fortolkning af $f'(x)$ når x er tiden. 2
5. Fortolkning af $f'(x)$ når x ikke er tiden. 2
6. Fortolkninger af $f'(x)$ begrundet. 2
7. Bestem $f'(x)$ med Nspire. 3
8. Reglerne for at bestemme $f'(x)$ uden hjælpemidler. 3
9. Advarsler om regler fra ramme 8. 4
10. Eksempel på brug af regler fra ramme 8. 4
11. Aflæs tallet $f(r)$ på figur. 5
12. Aflæs tallet $f'(r)$ på figur. 5
13. Aflæs løsninger til $f(x)=t$ på figur. 6
14. Aflæs løsninger til $f'(x)=s$ på figur. 6

Tangent

15. Bestem ligning for tangent. 7
16. Bestem punkt på graf når vi kender x-koordinat 7
17. Bestem punkt på graf når vi kender y-koordinat 8
18. Bestem punkt på graf når vi kender tangenthældning 8
19. Bestem tangenthældning. 9
20. Har grafen en tangent med hældningskoefficienten a? 9
21. Er linjen tangent? 10
22. Bestem røringspunkt for tangent. 11

Væksthastighed

23. Væksthastighed. 12
24. Aflæs størrelsen når tidspunktet er kendt. 12
25. Aflæs væksthastigheden når tidspunktet er kendt. 13
26. Aflæs tidspunktet når størrelsen er kendt. 13
27. Aflæs tidspunktet når væksthastigheden er kendt. 14
28. Udregn størrelsen når tidspunktet er kendt. 14
29. Udregn væksthastigheden når tidspunktet er kendt. 14
30. Udregn tidspunktet når størrelsen er kendt. 15
31. Udregn tidspunktet når væksthastigheden er kendt. 15
32. Du skal ikke altid differentiere for at finde hastighed. 15

Monotoni

33. Voksende og aftagende. 16
34. Hvad er monotoniforhold? 17
35. Regel for at finde monotoniforhold. 17
36. Bestem monotoniforhold. 18
37. Gør rede for at f er voksende (eller at f er aftagende). 19
38. Tegn f-graf ud fra f'-fortegn m.m. 19

Ekstrema

39. Maksimum og minimum. 20
40. Bestem med $f'(x)$ den værdi af x hvor y er størst. 21
41. Bestem med $f'(x)$ den største værdi af y. 22
42. Bestem med $f'(x)$ den værdi af x hvor y er mindst. 23
43. Bestem med $f'(x)$ den mindste værdi af y 23
44. Bestem ekstrema. 23
45. Gør rede for at funktionen har et minimum (eller maksimum). 23
46. Lokalt maksimum og minimum. 24
47. Bestem lokale ekstrema. 25

Beviser

48. Differentiabel. 26
49. Grænseværdi. 27
50. Vi kan finde en differentialkvotient ved at udregne en grænseværdi. 28
51. Udledning af formlen for at differentiere x^2. 29
52. Udledning af formlen for at differentiere *udtryk plus udtryk* 29

Tidligere udgave af dette hæfte har skiftet adresse til:

http://mat1.dk/differentialregning_for_a_niveau_i_stx_udgave_1.pdf
http://mat1.dk/differentialregning_for_a_niveau_i_stx_udgave_2.pdf

Differentialregning for B-niveau i hf, udgave 3 , © 2015 Karsten Juul 15/8-2015
Nyeste version af dette hæfte kan downloades fra http://mat1.dk/noter.htm

Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til kj@mat1.dk som oplyser at dette hæfte benyttes, og oplyser hold, niveau, lærer og skole.

Differentialkvotient

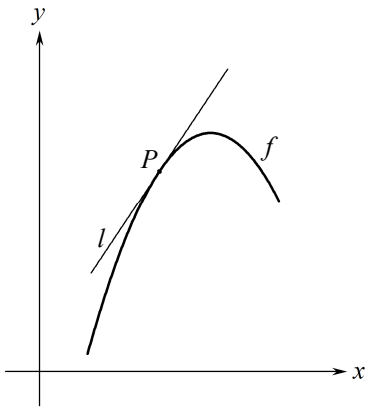
1. Tangent og røringspunkt.

1a. At l er **tangent** i P
betyder at l er linjen gennem P som følger grafen nær P.

1b. P kaldes tangentens **røringspunkt**.

1c. Grafpunkterne nær P ligger normalt ikke på tangenten
(selv om det ser sådan ud på en tegning da stregen ikke er uendelig tynd).

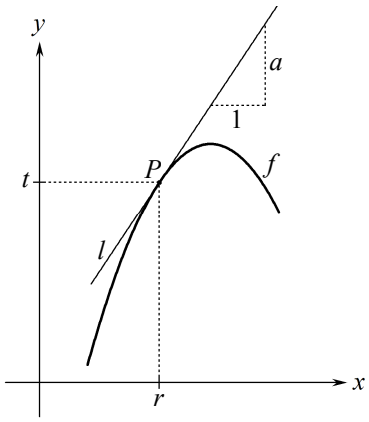
1d. På figuren er linje l tangent til f-graf i P.



2. Funktionsværdi og differentialkvotient.

2a. At t er **funktionsværdien** af r
betyder at t er **y-koordinaten** til grafpunktet
med x-koordinat r
og skrives $t = \boldsymbol{f(r)}$
som læses t er lig **f af r**

2b. At a er **differentialkvotienten** i r
betyder at a er **tangenthældningen** i grafpunktet
med x-koordinat r
og skrives $a = \boldsymbol{f'(r)}$
som læses a er lig **f mærke af r**



2c. $\boldsymbol{f(r)}$ = **y-koordinat** til f-grafs punkt med x-koordinat r.
2d. $\boldsymbol{f'(r)}$ = **tangents hældning** i f-grafs punkt med x-koordinat r.
2e. $\boldsymbol{f'(r)}$ = **væksthastighed** for $f(x)$ på tidspunkt r. (Hvis x er tid).
2f. Når x er lig r, og vi lægger et lille tal til x, så lægges ca. $\boldsymbol{f'(r)}$ gange dette lille tal til y.

2c og 2d er vedtægter.
2e og 2f er begrundet i ramme 6.

2g. I ligninger af typerne

$$f(m) = n \quad \text{og} \quad f'(m) = p$$

gælder:

Tallet på m's plads er en x-værdi.
Tallet på n's plads er en y-værdi.
Tallet på p's plads er en tangenthældning eller væksthastighed.

2h. Opgavetyperne i rammerne 16-22, 28-31 løses med følgende **metode**:

Skriv en ligning af en af typerne $f(m) = n$ og $f'(m) = p$.
Brug ligningen til at bestemme m eller n eller p eller *en konstant i forskriften*.

Denne metode indgår som en del af opgavetyperne i mange af de andre rammer.

3. Fortolkning af $f'(x)$ vedr. graf.

Opgave Fortolkning af f' vedr. grafen.

Løsningerne til ligningen $f'(x) = 2$ er $x = 3$ og $x = 7$. Hvad fortæller dette om grafen?

Besvarelse

$f'(x)$ = tangenthældning (se 2d) så det at løsningerne er $x = 3$ og $x = 7$, fortæller:
Det er grafpunkterne med x-koordinat 3 og 7 hvor tangenthældningen er 2.

4. Fortolkning af $f'(x)$ når x er tiden.

Opgave Fortolkning af f' vedr. noget fra virkeligheden når x er tiden.

Der er et tegnet dyr på skærmen. $f(x)$ er dyrets højde målt i mm, og x er tiden målt i minutter. Det er oplyst at $f'(20) = 2$. Gør rede for betydningen af dette.

Besvarelse

Jeg har brugt blå farve for at pege på udskiftningen. Du behøver ikke bruge farve.

Hvis du glemmer ordet "hastighed", så betyder sætningen at højden i løbet af et minut vokser 2 mm, og det er ikke det der er meningen.

Regel (se 2e):

$f'(r)$ er væksthastighed for $f(x)$ på tidspunkt r.

I denne regel indsætter vi de aktuelle ord og tal:

2 er væksthastighed for **højden** på tidspunktet **20**.

Dvs. På tidspunktet 20 minutter vokser dyrets højde med hastigheden 2 mm pr. minut.

5. Fortolkning af $f'(x)$ når x ikke er tiden.

Opgave Fortolkning af f' vedr. noget fra virkeligheden når x ikke er tiden.

Der er et tegnet dyr på skærmen. $f(x)$ er dyrets højde målt i mm, og x er længden målt i mm. Det er oplyst at $f'(20) = 2$. Gør rede for betydningen af dette.

Besvarelse

Jeg har brugt blå farve for at pege på udskiftningen. Du behøver ikke bruge farve.

Regel (Se 2f):

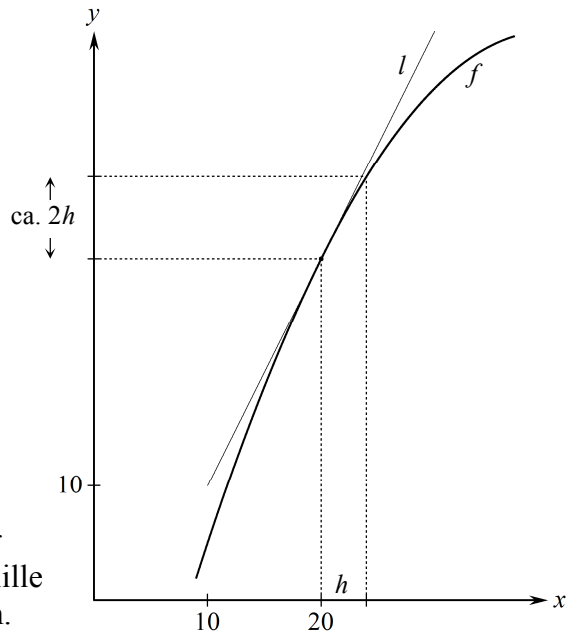
Når x er lig r, og vi lægger et lille tal til x, så lægges ca. $f'(r)$ gange dette lille tal til y.

I denne regel indsætter vi de aktuelle ord og tal:

Når **længde** lig **20**, og vi lægger et lille tal til **længde**, så lægges ca. **2** gange det lille tal til **højde**.

6. Fortolkninger af $f'(x)$ begrundet.

Symbolet $f'(20)$ betyder tangenthældning,
så $f'(20) = 2$ betyder tangenthældning er 2,
så på tangenten gælder:
når x bliver 1 større, så vil y blive 2 større.
For x nær 20 er graf og tangent næsten ens, så
(∗) når x er ca. 20 og x bliver 1 større,
så vil $f(x)$ blive ca. 2 større.



I ramme 4 betyder (∗) :
Når tidspunktet er ca. 20 minutter og der går ét minut, vil dyrets højde blive ca. 2 mm større.
dvs. væksthastigheden er ca. 2 mm pr. minut.

I ramme 5 betyder (∗) :
Når x er nær 20 og vi lægger et lille tal til x, så bliver der lagt ca. 2 gange dette lille tal til y, dvs. når vi lægger et lille tal til længden, så lægges 2 gange dette lille tal til højden.

7. Bestem $f'(x)$ med Nspire.

7a For at få Nspire til at differentiere $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ mht. x bruger vi skabelonen $\dfrac{d}{d\square}(\square)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{1}{(x+2)^2}$$

Udregnet af Nspire

HUSK at skrive dette!

7b Hvis forskrift indeholder cos eller sin:
Højreklik på matematikfelt, vælg Attributter og sæt vinkel til radianer.

7c For at udregne $f'(3)$ skal vi først bestemme forskriften for $f'(x)$ som vist i 7a.
Så indsætter vi 3 for x i denne forskrift:

$$f'(3) = \frac{1}{(3+2)^2} = \frac{1}{25}$$

Symbolet $\dfrac{d}{dx}$ kan IKKE skrives ved hjælp af en brøkstreg.

7d Eksempel

Dette er både korrekt matematiksprog og korrekt Nspiresprog.

$f(x)=x\cdot\ln(x)$ $\quad f'(x)=\dfrac{d}{dx}(x\cdot\ln(x)) = \ln(x)+1$ $\quad f'(2)=\ln(2)+1 = 1.69315$

7e Eksempel

Her fortæller vi til Nspire og til læseren at **fm** betyder **f'**.

$\mathbf{f}(x):=x\cdot\ln(x)$ ▸ *Udført* $\quad \mathbf{fm}(x):=\dfrac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$ ▸ *Udført* $\quad \mathbf{fm}(2) = 1.69315 \quad \mathbf{fm}(x) = \ln(x)+1$

:= bevirker at f(x) kommer til at betyde x·ln(x) så vi kan skrive f(x) og f(3) i stedet for x·ln(x) og 3·ln(3) .

8. Reglerne for at bestemme $f'(x)$ uden hjælpemidler.

8a $k' = 0$ når k er en konstant. **f.eks.** $4' = 0$ **og** $(\ln(2))' = 0$

8b $(kx)' = k$ **f.eks.** $x' = 1$ **og** $(4x)' = 4$

8c $(x^a)' = a\cdot x^{a-1}$ **f.eks.** $(x^4)' = 4x^3$ **og** $(x^{-3,6})' = -3{,}6x^{-4,6}$

8d $(e^x)' = e^x$ e er et bestemt tal (ligesom π). e ≈ 2,71828. e er ikke den sædvanlige e-tast. Brug tegn-palet.

8e $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$ Funktionen $\ln(x)$ kaldes "den naturlige logaritmefunktion".

8f $(k\cdot f(x))' = k\cdot f'(x)$ **f.eks.** $(7x^4)' = 7\cdot 4x^3 = 28x^3$ **og** $(7\ln(x))' = 7\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{7}{x}$

8g $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ **f.eks.** $(\ln(x)+4+7x^4)' = \dfrac{1}{x}+0+28x^3 = \dfrac{1}{x}+28x^3$

8h $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$ **f.eks.** $(\ln(x)+4-7x^4)' = \dfrac{1}{x}+0-28x^3 = \dfrac{1}{x}-28x^3$

8i Da $\frac{1}{x}=x^{-1}$ og $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ kan vi udregne $(\frac{1}{x})'$ og $(\sqrt{x})'$ med reglen $(x^a)' = a\cdot x^{a-1}$.

På de to næste sider er der flere eksempler på brug af reglerne 8a-8i.

9. Advarsler om regler fra ramme 8.

$(a^x)'$ er **IKKE** $x \cdot a^{x-1}$ og $(4^x)'$ er **IKKE** $x \cdot 4^{x-1}$.

$\left(x^2 \cdot e^x\right)'$ er **IKKE** $2x \cdot e^x$ og $\left(\frac{x^2}{e^x}\right)'$ er **IKKE** $\frac{2x}{e^x}$.

$\left((1-x)^3\right)'$ er **IKKE** $3(1-x)^2$ og $\left((1-x)^3\right)'$ er **IKKE** $3(-1)^2$.

$\left(\ln(1+x^2)\right)'$ er **IKKE** $\frac{1}{1+x^2}$ og $\left(\ln(1+x^2)\right)'$ er **IKKE** $\frac{1}{2x}$.

$(e^{1+x^2})'$ er **IKKE** e^{1+x^2} og $(e^{1+x^2})'$ er **IKKE** e^{2x} .

10. Eksempel på brug af regler fra ramme 8.

Opgave

En funktion f er givet ved $f(x) = \frac{8}{x} + \sqrt{x}$.

Bestem $f'(4)$. ← Her må vi først finde f '(x). Derefter indsætter vi 4 for x i det differentierede udtryk.

Besvarelse

$$f(x) = 8 \cdot x^{-1} + x^{\frac{1}{2}}$$

så

$$f'(x) = 8 \cdot (-1)x^{(-1)-1} + \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$f'(x) = -8x^{-2} + \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -8 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{-8}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Heraf får vi

$$f'(4) = \frac{-8}{4^2} + \frac{1}{2\sqrt{4}}$$

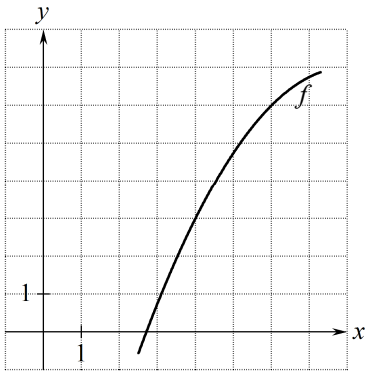
$$f'(4) = \frac{-8}{16} + \frac{1}{2 \cdot 2}$$

$$f'(4) = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

11. Aflæs tallet $f(r)$ på figur.

Opgave

Aflæs tallet $f(4)$ på figuren.



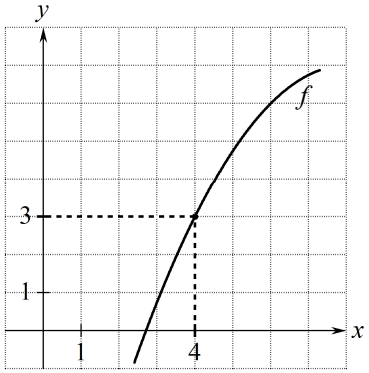
Sådan tænker vi

Der står 4 i parentesen, så vi skal vi finde det punkt på grafen hvor x-koordinaten er 4.
Der står $f(\ )$, så y-koordinaten er facit.

Besvarelse

$f(4)$ = y-koordinat til grafpunkt med x-koordinat 4

$\underline{\underline{f(4) = 3}}$. Se markering på figur.



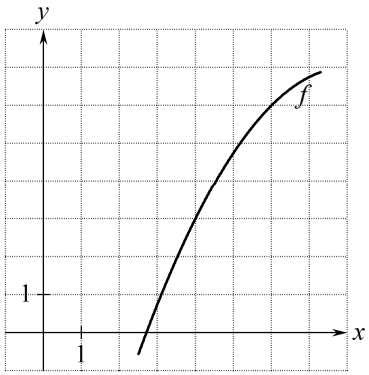
Husk

Når vi aflæser et tal på en figur, skal vi skrive tallet på figuren der hvor vi har aflæst det.
Hvis der ikke er plads, kan vi lave en pil fra tallet til det sted hvor det er aflæst.

12. Aflæs tallet $f'(r)$ på figur.

Opgave

Aflæs tallet $f'(4)$ på figuren.



Sådan tænker vi

Der står 4 i parentesen, så vi skal finde det punkt på grafen hvor x-koordinaten er 4.
Der står $f'(\ )$, så tangenthældningen er facit.

Besvarelse

$f'(4)$ = hældningskoefficient for tangent l i grafpunkt med x-koordinat 4.

Vi tegner l.

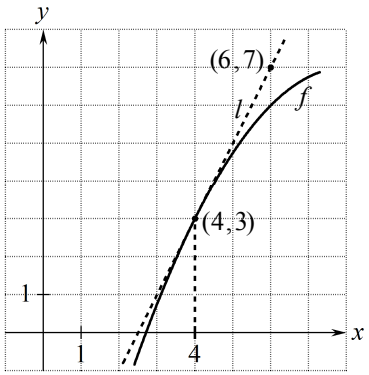
Vi aflæser punkterne $(4,3)$ og $(6,7)$ på l.

l's hældningskoefficient er

$$\frac{7-3}{6-4} = 2$$

så

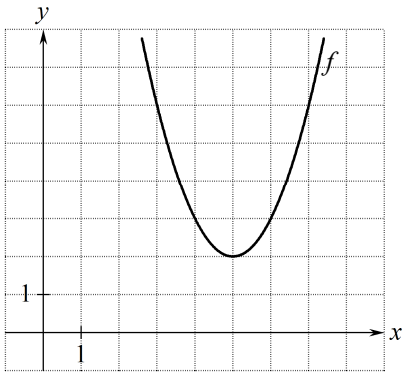
$$\underline{\underline{f'(4) = 2}}.$$



13. Aflæs løsninger til $f(x)=t$ på figur.

Opgave

Aflæs løsningerne til ligningen $f(x)=6$ på figuren



Sådan tænker vi

Der står $f(\ )=6$, så vi skal finde de punkter på grafen hvor y-koordinaten er 6 .
Der står x i parentesen, så facit er x-koordinaterne til de punkter vi har fundet.

Besvarelse

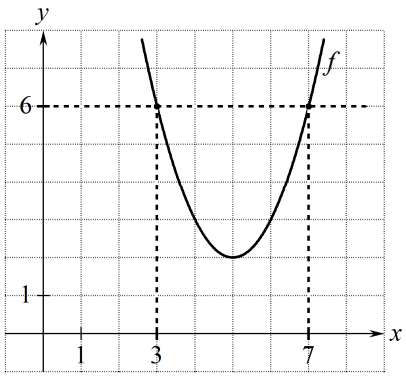
Vi skal løse $f(x)=6$.

$f(x)$ er y-koordinaten til et grafpunkt.

Vi finder de grafpunkter hvor y-koordinaten er 6 .

Vi aflæser x-koordinaten til hvert af disse punkter og får 3 og 7 . Se markeringen på figuren.

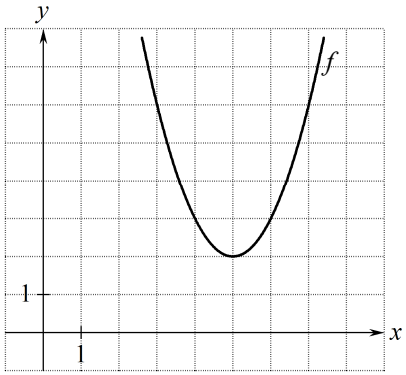
Løsningerne til $f(x)=6$ er $x=3$ eller $x=7$.



14. Aflæs løsninger til $f'(x)=s$ på figur.

Opgave

Aflæs løsningerne til ligningen $f'(x)=0$ på figuren.



Sådan tænker vi

Der står $f'(\ )=0$, så vi skal finde de punkter på grafen hvor tangenthældningen er 0 .
Der står x i parentesen, så facit er x-koordinaterne til de punkter vi har fundet.

Besvarelse

Vi skal løse $f'(x)=0$.

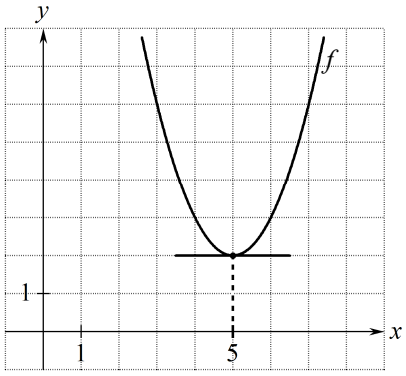
$f'(x)$ er tangenthældningen i et grafpunkt.

Vi finder det grafpunkt hvor tangenthældningen er 0.

Vi aflæser x-koordinaten til dette punkt og får 5 .

Se markeringen på figuren.

Løsningen til $f'(x)=0$ er $x=5$.



Husk at tegne tangenten og skrive at det givne tal er denne linjes hældningskoefficient.

Tangent

15. Bestem ligning for tangent.

Opgave

$f(x) = x^2 - x + 2$.

Bestem ligning for tangent til graf for f i punktet $(2, f(2))$.

Besvarelse

Grønne kommentarer er ikke en del af besvarelsen.

Du skal IKKE bruge tallene 2 og –1 i andre opgaver. I stedet skal du bruge de tal du finder ved at differentiere den givne funktion.

$f(x) = x^2 - x + 2$ er oplyst

$f'(x) = 2x - 1$ Se ramme 8.

(x_1, y_1) og a er røringspunkt og hældning for tangent:

$x_1 = \mathbf{2}$ er oplyst

$y_1 = f(2) = 2^2 - 2 + 2 = \mathbf{4}$ Se 2c og ramme 16.

$a = f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = \mathbf{3}$ Se 2d og ramme 19.

Tangent:

$y = a(x - x_1) + y_1$

$y = \mathbf{3}(x - \mathbf{2}) + \mathbf{4}$

$y = 3x - 6 + 4$

$y = 3x - 2$

Fra formelsamlingen:

Linjen gennem punktet (x_1, y_1) med hældningskoefficienten a har ligningen

$y = a(x - x_1) + y_1$.

Tangenten til grafen for f i punktet $(2, f(2))$ har ligningen $\underline{\underline{y = 3x - 2}}$.

Kontrol af tangentligning med Nspire

Vi angiver forskriften $x^2 - x + 2$ og x-koordinaten 2, og får Nspire til at bestemme tangentligning, og får $y = 3x - 2$.

$\text{tangentLine}(x^2 - x + 2, x, 2) \blacktriangleright 3 \cdot x - 2$

16. Bestem punkt på graf når vi kender x-koordinat .

Opgave

En funktion f er givet ved

$f(x) = x^3 - 3x^2$.

Bestem y-koordinaten til det punkt på grafen for f hvor x-koordinaten er 5 .

Bevarelse

y-koordinat $= f(5)$ Se 2c.

y-koordinat $= 5^3 - 3 \cdot 5^2$ da $f(x) = x^3 - 3x^2$

y-koordinat $= 50$

Det punkt på grafen for f hvor x-koordinaten er 5 , har y-koordinaten $\underline{\underline{50}}$.

17. Bestem punkt på graf når vi kender y-koordinat .

Opgave

$$f(x) = x^3 - 3x^2 \ .$$

Bestem x-koordinaten til hvert af de punkter på grafen for f hvor y-koordinaten er -4 .

Bevarelse

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

y-koordinat $= -4$

$f(x) = -4$ Se 2c.

$x^3 - 3x^2 = -4$

Nspire løser ligningen $x^3 - 3x^2 = -4$ mht. x og får

$x = -1$ eller $x = 2$

De punkter på grafen for f hvor y-koordinaten er -4 ,
har x-koordinaterne $\underline{\underline{-1}}$ og $\underline{\underline{2}}$.

Nspire: solve(x^3−3·x^2=-4,x) ▸ x=-1 or x=2

18. Bestem punkt på graf når vi kender tangenthældning .

Opgave

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 \ .$$

Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter på grafen for f hvor tangenthældningen er 9 .

Bevarelse

$$f(x) = x^3 - 3x^2 \ .$$

tangenthældning $= 9$

$f'(x) = 9$ Se 2d.

$3x^2 - 6x = 9$ Se ramme 7 og 8.

Nspire løser ligningen $3x^2 - 6x = 9$ mht. x og får

$x = -1$ eller $x = 3$

Nspire: solve(3·x^2−6·x=9,x) ▸ x=-1 or x=3

y-koordinat $= f(-1)$ | y-koordinat $= f(3)$ Se 2c.

y-koordinat $= (-1)^3 - 3(-1)^2$ | y-koordinat $= 3^3 - 3 \cdot 3^2$

y-koordinat $= -4$ | y-koordinat $= 0$

De punkter på grafen hvor tangenthældningen er 9, har koordinatsættene

$$\underline{\underline{(-1, -4) \quad \text{og} \quad (3, 0)}} \ .$$

19. Bestem tangenthældning.

Opgave

En funktion g er givet ved

$$g(x) = \tfrac{1}{3}\cdot x^3 + 3\cdot x \ .$$

Bestem tangenthældningen i graf-punktet med x-koordinat 1

Bevarelse

$$g(x) = \tfrac{1}{3}\cdot x^3 + 3\cdot x \ .$$

tangenthældning $= g'(1)$ Se 2d.

tangenthældning $= 1^2 + 3$ da $g'(x) = x^2 + 3$ Se ramme 7 og 8.

tangenthældning $= 4$

Tangenthældningen i graf-punktet med x-koordinat 1 er $\underline{\underline{4}}$.

20. Har grafen en tangent med hældningskoefficienten a?

Opgave

En funktion g er givet ved

$$g(x) = \tfrac{1}{3}\cdot x^3 + 3\cdot x \ .$$

Er der et punkt på g-grafen så tangenten i dette punkt har hældningskoefficienten 2 ?

Bevarelse

$$g(x) = \tfrac{1}{3}\cdot x^3 + 3\cdot x \ .$$

tangenthældning $= 2$

$g'(x) = 2$ Se 2d.

$x^2 + 3 = 2$ Se ramme 7 og 8.

$x^2 = -1$

Dette er ikke opfyldt for noget tal x da et tal i anden aldrig er negativt.

Der er ikke et punkt på grafen så tangenten i dette punkt har hældningskoefficienten 2.

21. Er linjen tangent?

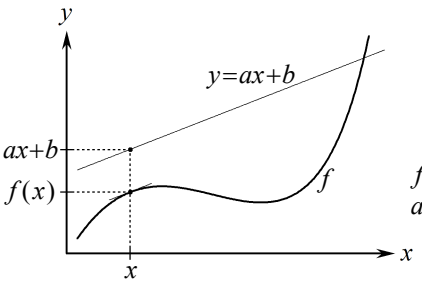
En linje er tangent til grafen for en funktion i et punkt netop hvis der både gælder at

y-koordinat er ens

og

tangenthældning er ens.

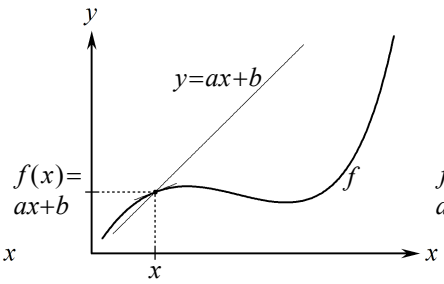
Dette er vist på de tre figurer.



y-koordinat er forskellig: $f(x) \neq ax+b$

Tangenthældning er ens: $f'(x) = a$

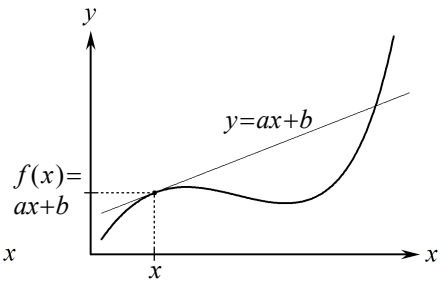
Linjen er ikke tangent.



y-koordinat er ens: $f(x) = ax+b$

Tangenthældn. er forskellig: $f'(x) \neq a$

Linjen er ikke tangent.



y-koordinat er ens: $f(x) = ax+b$

Tangenthældning er ens: $f'(x) = a$

Linjen er tangent.

Opgave

Er linjen $l:\ y = 9x+17$ tangent til grafen for funktionen $f(x) = x^3 - 3x + 1$?

Besvarelse

$l:\ y = 9x+17$ og $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

Hvis l er tangent til f-graf: I røringspunktet skal f-grafens tangenthældning $f'(x)$ være lig l's hældningskoefficient som er 9:

$f'(x) = 9$

$3x^2 - 3 = 9$

Nspire løser ligning $3x^2 - 3 = 9$ mht. x og får

$x = -2$ eller $x = 2$

Nspire: solve(3·x^2−3=9,x) ▸ x=-2 or x=2

Hvis $x = 2$ er

y-koordinat på f-graf lig f(2) = $2^3 - 3\cdot 2 + 1 = 3$

y-koordinat på l lig y = $9\cdot 2 + 17 = 35$

så y-koordinaterne er ikke ens,

så l er ikke tangent i grafpunktet med x-koordinat 2.

Hvis $x = -2$ er

y-koordinat på f-graf lig f(−2) = $(-2)^3 - 3\cdot -2 + 1 = -1$

y-koordinat på l lig y = $9\cdot -2 + 17 = -1$

Hvis du skriver i hånden, skal der parentes om -2 efter gangetegn.

så y-koordinaterne er ens, og vi vidste i forvejen at tangenthældningerne er ens,

så l er tangent i grafpunktet med x-koordinat 2.

Linjen l er tangent til grafen for f.

22. Bestem røringspunkt for tangent.

Opgave

Linjen $l: \ y = 9x + 17$ er tangent til grafen for funktionen $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Bestem koordinatsættet til røringspunktet.

Besvarelse

$l: \ y = 9x + 17$ er tangent til graf for $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

I røringspunktet skal f-grafens tangenthældning $f'(x)$ være lig l's hældningskoefficient som er 9:

$$f'(x) = 9$$

$$3x^2 - 3 = 9$$

Nspire løser ligning $3x^2 - 3 = 9$ mht. x og får

$x = -2$ eller $x = 2$

Nspire: $\text{solve}\left(3 \cdot x^2 - 3 = 9, x\right)$ ▸ $x = -2$ or $x = 2$

Hvis $x = 2$ er

y-koordinat på f-graf lig f(2) = $2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 3$

y-koordinat på l lig y = $9 \cdot 2 + 17 = 35$

så y-koordinaterne er ikke ens,

så grafpunkt med x-koordinat 2 er ikke røringspunkt.

Hvis $x = -2$ er

y-koordinat på f-graf lig f(−2) = $(-2)^3 - 3 \cdot -2 + 1 = -1$

y-koordinat på l lig y = $9 \cdot -2 + 17 = -1$

Hvis du skriver i hånden, skal der parentes om -2 efter gangetegn.

så y-koordinaterne er ens, og vi vidste i forvejen at tangenthældningerne er ens,

så grafpunkt med x-koordinat -2 er røringspunkt.

Koordinatsættet til røringspunktet er $\underline{\underline{(-2, -1)}}$.

Væksthastighed

23. Væksthastighed.

Figuren viser grafen for en funktion $f(x)$ hvor

x = antal dage efter at vi begyndte at måle

$f(x)$ = plantens højde i mm

På figuren ser vi at

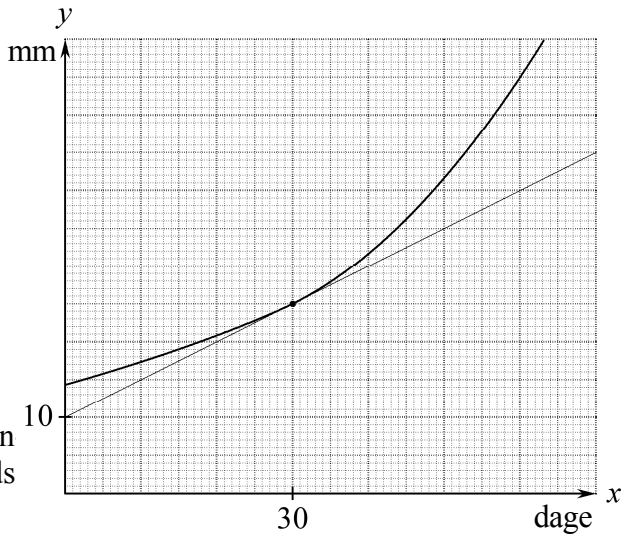
$f'(30) = 0{,}5$

og at omkring tidspunktet 30 dage vil plantens højde blive ca. 0,5 mm højere pr. dag.

Vi siger at

på <u>tidspunktet</u> 30 dage efter at vi begyndte at måle, er <u>væksthastigheden</u> lig 0,5 mm pr. dag.

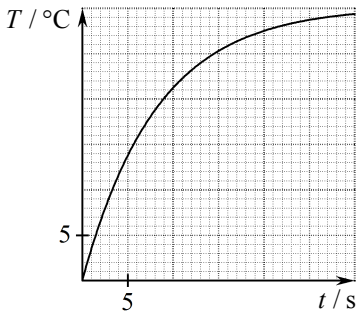
I et lille tidsum på x-aksen er grafen næsten sammenfaldende med den tegnede tangent. Det er i dette tidsrum at væksthastigheden er ca. 0,5 mm pr. dag.



24. Aflæs størrelsen når tidspunktet er kendt.

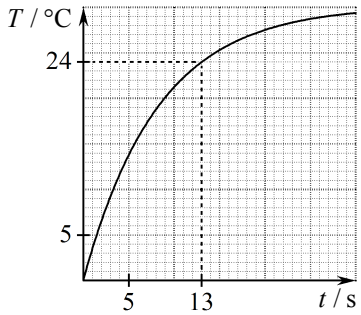
<u>Opgave</u>

Grafen viser hvordan temperaturen T er vokset.
Tiden t måles i sekunder.
Bestem temperaturen på tidspunktet 13 sekunder.



<u>Besvarelse</u>

Vi finder grafpunktet hvor $t = 13$, og aflæser at for dette punkt er $T = 24$.
Dette har vi vist på skitsen.

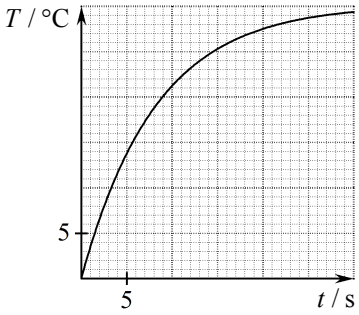


På tidspunktet 13 sekunder er temperaturen $\underline{\underline{24\,°\mathrm{C}}}$.

25. Aflæs væksthastigheden når tidspunktet er kendt.

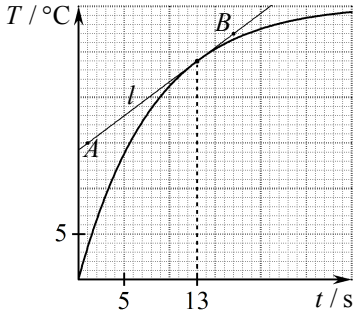
Opgave

Grafen viser hvordan temperaturen T er vokset.
Tiden t måles i sekunder.
Bestem temperaturens væksthastighed på tidspunktet 13 sekunder.



Besvarelse

Vi finder grafpunktet hvor $t = 13$, og
vi tegner tangenten l i dette punkt, og
på l aflæser vi punkterne $A(1, 15)$ og $B(17, 27)$.
Alt dette har vi vist på skitsen.



***l* 's hældningskoefficient er temperaturens væksthastighed på tidspunktet 13 sekunder.**

l 's hældningskoefficient er

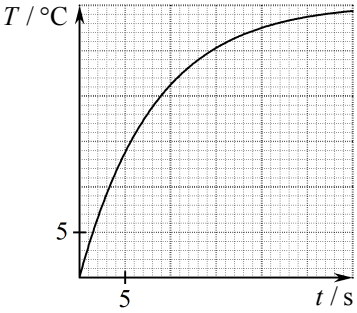
$$\frac{27-15}{17-1} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Temperaturens væksthastighed på tidspunktet 13 sekunder er $\underline{\underline{0{,}75\ °\text{C pr. sekund}}}$.

26. Aflæs tidspunktet når størrelsen er kendt.

Opgave

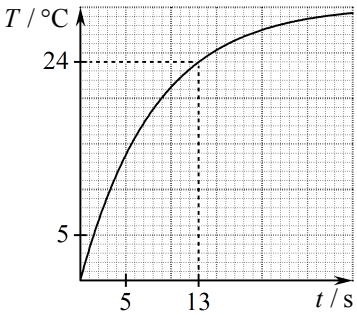
Grafen viser hvordan temperaturen T er vokset.
Tiden t måles i sekunder.
Bestem det tidspunkt hvor temperaturen er 24 °C.



Besvarelse

Vi finder grafpunktet hvor $T = 24$, og
aflæser at for dette punkt er $t = 13$.
Dette har vi vist på skitsen.

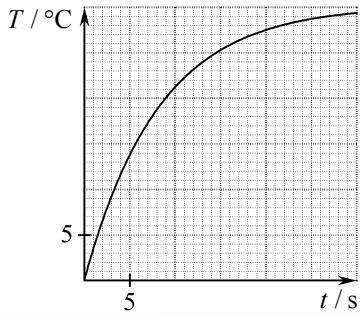
Temperaturen er 24 °C på tidspunktet $\underline{\underline{13\,\text{sekunder}}}$.



27. Aflæs tidspunktet når væksthastigheden er kendt.

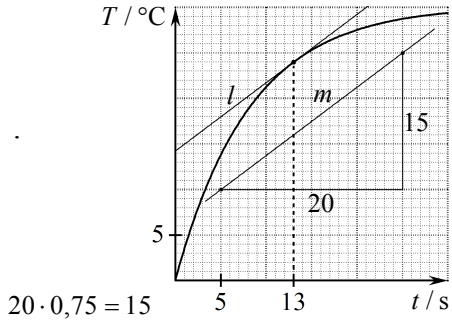
Opgave

Grafen viser hvordan temperaturen T er vokset.
Tiden t måles i sekunder.
Bestem det tidspunkt hvor temperaturens væksthastighed er 0,75 °C pr. sekund.



Besvarelse

Vi tegner en linje m som har hældningskoefficient $0{,}75$, og vi lægger en lineal langs m og parallelforskyder til linjen er en tangent l til grafen, og vi aflæser at for røringspunktet er $t = 13$.
Alt dette har vi vist på figuren.
Væksthastigheden for $t = 13$ er l's hældningskoefficient:
På tidspunktet $\underline{\underline{13 \text{ sekunder}}}$ er temperaturens væksthastighed 0,75 °C pr. sekund.



$20 \cdot 0{,}75 = 15$

28. Udregn størrelsen når tidspunktet er kendt.

Opgave

Vægten af et dyr kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$$

hvor x er dage og $f(x)$ er vægten i gram.
Bestem dyrets vægt på tidspunktet 30 dage.

Besvarelse

$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$ er dyrets vægt på tidspunktet x dage.

$$f(30) = 56 \cdot (1.02)^{30} + 240 = 341.436$$

Hvis du skriver i hånden, skal der ikke parentes om 1,02 .

Dyrets vægt er $\underline{\underline{341 \text{ gram}}}$ på tidspunktet 30 dage.

29. Udregn væksthastigheden når tidspunktet er kendt.

Opgave

Vægten af et dyr kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$$

hvor x er dage og $f(x)$ er vægten i gram.

Bestem den hastighed hvormed dyrets vægt vokser på tidspunktet 30 dage.

Besvarelse

$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$ er dyrets vægt på tidspunktet x dage.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(56 \cdot (1.02)^x + 240\right) = 1.10895 \cdot (1.02)^x$$

udregnet af Nspire

$$f'(30) = 1.10895 \cdot (1.02)^{30} = 2.00871$$

Hvis du skriver i hånden, skal der ikke parentes om 1,02 .

På tidspunktet 30 dage vokser dyrets vægt med hastigheden $\underline{\underline{2{,}0 \text{ gram pr. dag}}}$.

30. Udregn tidspunktet når størrelsen er kendt.

Opgave

Vægten af et dyr kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$$

hvor x er dage og $f(x)$ er vægten i gram.

Bestem det tidspunkt hvor dyrets vægt er 500 gram.

Besvarelse

$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$ er dyrets vægt på tidspunktet x dage.

vægt = 500

$f(x) = 500$

$56 \cdot 1{,}02^x + 240 = 500$

solve$\left(56 \cdot (1.02)^x + 240 = 500, x\right)$ ▸ $x = 77.5316$

Nspire løser ligning $56 \cdot 1{,}02^x + 240 = 500$ mht. x og får $x = 77{,}5316$.

Dyrets vægt er 500 gram på tidspunktet $\underline{\underline{78}}$ dage.

31. Udregn tidspunktet når væksthastigheden er kendt.

Opgave

Vægten af et dyr kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$$

hvor x er dage og $f(x)$ er vægten i gram.

Bestem det tidspunkt hvor dyrets vægt vokser med hastigheden 4 gram pr. dag.

Besvarelse

$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$ er dyrets vægt på tidspunktet x dage.

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(56 \cdot (1.02)^x + 240\right) = 1.10895 \cdot (1.02)^x$ *udregnet af Nspire*

Hvis du skriver i hånden, skal der ikke parentes om 1,02 .

Vi får

hastighed = 4

$f'(x) = 4$ Se 2e.

$1{,}10895 \cdot 1{,}02^x = 4$

solve$\left(1.10895 \cdot (1.02)^x = 4, x\right)$ ▸ $x = 64.7834$

Nspire løser ligningen $1{,}10895 \cdot 1{,}02^x = 4$ mht. x og får $x = 64{,}7834$.

På tidspunktet $\underline{\underline{65 \text{ dage}}}$ vokser dyrets vægt med hastigheden 4 gram pr. dag.

32. Du skal ikke altid differentiere for at finde hastighed!

Opgave Et linjestykkes længde ændres sådan at $f(x) = x^2$ hvor $f(x)$ er længden på tidspunktet x .

Hvor hurtigt ændres længden på tidspunktet 3 ?

Besvarelse $f(x)$ er længden på tidspunktet x .

$f(x) = x^2$. $f'(x) = 2x$. $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$. På tidspunktet 3 ændres længden med hastigheden $\underline{\underline{6}}$.

Opgave Et linjestykkes længde ændres sådan at $f(x) = x^2$ hvor $f(x)$ er den hastighed som længden ændres med på tidspunktet x .

Hvor hurtigt ændres længden på tidspunktet 3 ?

Besvarelse $f(x)$ er den hastighed som længden ændres med på tidspunktet x .

$f(x) = x^2$. $f(3) = 3^2 = 9$. På tidspunktet 3 ændres længden med hastigheden $\underline{\underline{9}}$.

Monotoni

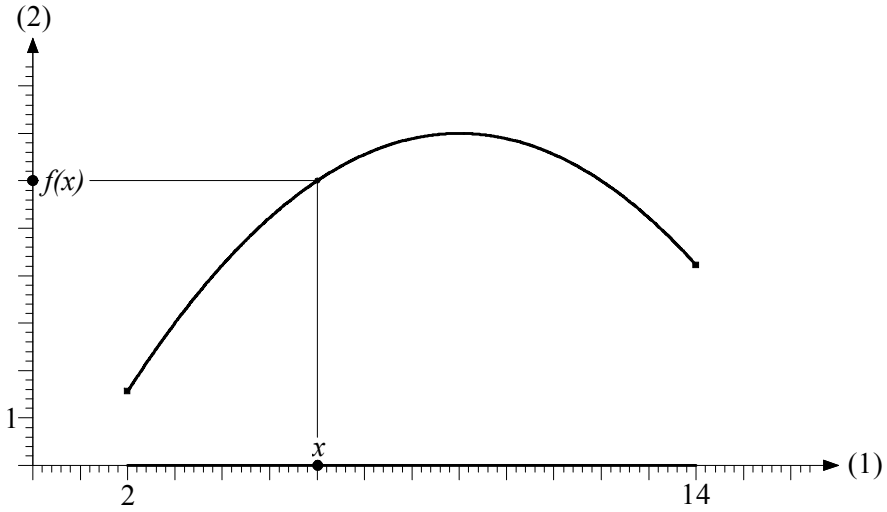
33. Voksende og aftagende.

Figuren viser en interaktiv figur fra en computerskærm. Når vi trækker x-punktet hen på et tal x kan vi aflæse funktionsværdien $f(x)$.

På figuren kan vi se:

Når vi trækker $\boldsymbol{x}$ gennem tallene fra og med 2 til og med 9, vil $\boldsymbol{f(x)}$ hele tiden blive større.

Når vi trækker $\boldsymbol{x}$ gennem tallene fra og med 9 til og med 14, vil $\boldsymbol{f(x)}$ hele tiden blive mindre.



Som bekendt siger man:

$f(x)$ er voksende i intervallet $2 \le x \le 9$

$f(x)$ er aftagende i intervallet $9 \le x \le 14$

<u>Er $f(x)$ både aftagende og voksende i 9 ?</u>

Nej, vi taler ikke om at en funktion er voksende i <u>ét tal</u>. Vi taler om at en funktion er voksende i et <u>interval</u>. Der skal være mindst to y-værdier hvis vi skal kunne tale om at y er blevet større eller mindre.

<u>At</u> $f(x)$ er voksende i intervallet $2 \le x \le 9$

<u>betyder at</u> når vi i intervallet vælger større og større x-værdi, så bliver y-værdien $f(x)$ større og større.

<u>At</u> $f(x)$ er aftagende i intervallet $9 \le x \le 14$

<u>betyder at</u> når vi i intervallet vælger større og større x-værdi, så bliver y-værdien $f(x)$ mindre og mindre.

34. Hvad er monotoniforhold?

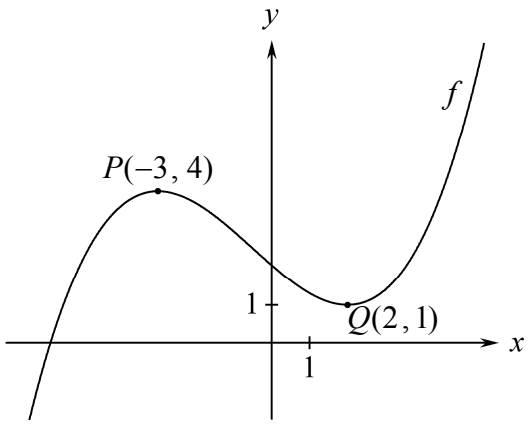
I nogle opgaver står at vi skal

<u>bestemme monotoniforholdene</u>

for en funktion.

<u>Det betyder at vi skal skrive</u>

i hvilke x-intervaller funktionen aftager, og
i hvilke x-intervaller funktionen vokser.



På figuren er vist grafen for et tredjegradspolynomium.

<u>Monotoniforholdene kan vi skrive sådan:</u>

$f(x)$ er voksende i intervallet $x \le -3$

$f(x)$ aftagende i intervallet $-3 \le x \le 2$

$f(x)$ voksende i intervallet $2 \le x$

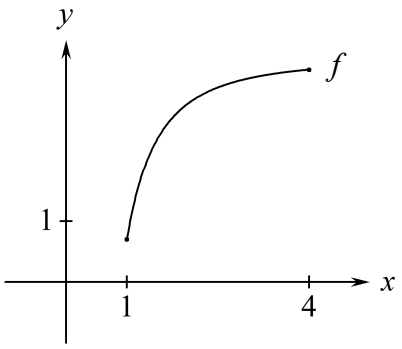
35. Regel for at finde monotoniforhold.

<u>Hvis $f'(x)$ er positiv</u>

$(*)$ tangenthældningen $f'(x)$ er positiv for hvert tal x i intervallet $1 \le x \le 4$.

$(**)$ $f(x)$ er voksende i intervallet $1 \le x \le 4$.

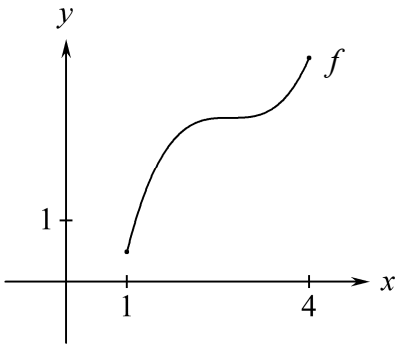
Hvis man prøver at tegne grafen sådan at $(*)$, men ikke $(**)$ gælder, så bliver man overbevist om at det ikke kan lade sig gøre. Man kan bevise at hvis $(*)$ gælder, så gælder $(**)$ også.



<u>Hvis der er undtagelser fra at $f'(x)$ er positiv</u>

Funktionen $f(x)$ på nederste figur er voksende selv om der er ét punkt hvori tangenthældningen er 0.

Selv om der er enkelte undtagelser fra $(*)$, kan man slutte at $(**)$ gælder.



<u>Sætning 35.1</u>

Hvis $f'(x)$ er <u>positiv</u> for alle x i et interval, evt. med endeligt mange undtagelser,
så er $f(x)$ <u>voksende</u> i intervallet.

Hvis $f'(x)$ er <u>negativ</u> for alle x i et interval, evt. med endeligt mange undtagelser,
så er $f(x)$ <u>aftagende</u> i intervallet.

36. Bestem monotoniforhold.

Opgave

Bestem monotoniforholdene for funktionen

$$f(x)=\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{7}{3}\ .$$

Besvarelse 1

$$f(x)=\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{7}{3}$$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\cdot x^4+\frac{2}{3}\cdot x^3+\frac{7}{3}\right)=x^3+2\cdot x^2 \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

$f'(x)$ kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor $f'(x)=0$, dvs. hvor $x^3+2x^2=0$.

Nspire løser ligningen $x^3+2x^2=0$ mht. x og får $x=-2$ eller $x=0$:

$$\text{solve}\left(x^3+2\cdot x^2=0,x\right) \blacktriangleright x=-2 \text{ or } x=0$$

Disse to tal deler tallinjen op i tre intervaller. I hvert af disse vælger vi et tal og udregner f' :

$f'(-3) = (-3)^3+2(-3)^2 = -9$ så $f'(x)$ negativ for $x<-2$

$f'(-1) = (-1)^3+2(-1)^2 = 1$ så $f'(x)$ positiv for $-2<x<0$

$f'(1) = 1^3+2\cdot 1^2 = 3$ så $f'(x)$ positiv for $0<x$

Af dette følger at monotoniforholdene er følgende:

$f(x)$ er aftagende i intervallet $x\le -2$

$f(x)$ er voksende i intervallet $-2\le x$

Husk at kontrollere at tallene der afgrænser intervallerne, er de tal du fik som løsning til $f'(x)=0$.

Oversigt:

x :		-2		0	
$f'(x)$:	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$:	↘		↗		

Besvarelse 2

$$f(x):=\frac{1}{4}\cdot x^4+\frac{2}{3}\cdot x^3+\frac{7}{3} \blacktriangleright \textit{Udført}$$

$$fm(x):=\frac{d}{dx}(f(x)) \blacktriangleright \textit{Udført} \qquad fm(x)=x^3+2\cdot x^2 \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

f'(x) kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor f'(x)=0.

Nspire løser ligningen f'(x)=0 mht. x og får $x=-2$ eller $x=0$:

$$\text{solve}(fm(x)=0,x) \blacktriangleright x=-2 \text{ or } x=0$$

De to tal −2 og 0 deler tallinjen op i tre intervaller.

I hvert af disse vælger vi et tal og udregner f':

$fm(-3)=-9$ så f'(x) er negativ for x<−2

$fm(-1)=1$ så f'(x) er positiv for −2<x<0

$fm(1)=3$ så f'(x) er positiv for 0<x

Af dette følger at monotoniforholdene er følgende:

f(x) er aftagende i intervallet x≤−2 og f(x) er voksende i intervallet −2≤x

37. Gør rede for at f er voksende (eller at f er aftagende).

Opgave En funktion f er givet ved $f(x) = 22 + 14x - e^{-4x}$.

Bestem $f'(x)$ og gør rede for at f er voksende.

Besvarelse $f(x) = 22 + 14x - e^{-4x}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(22 + 14\cdot x - e^{-4\cdot x}\right) = 4\cdot e^{-4\cdot x} + 14$$ *udregnet af Nspire*

Da e^{-4x} altid er positiv, er $f'(x)$ positiv, og så er f voksende.

Bemærkning: Hvis $f(x) = e^{-4x} - x$, er $f'(x) = -4e^{-4x} - 1$.

Da e^{-4x} altid er positiv, er $f'(x)$ negativ, så f er aftagende.

38. Tegn f-graf ud fra f'-fortegn m.m.

Opgave

Tegn for $-6 \le x \le 10$ en mulig graf for en funktion f der opfylder at

$f(-3) = 6$ og $f(8) = -2$

og hvor fortegn og nulpunkter for f' er som vist på tallinjen:

x:	-6		-3		3		8		10
$f'(x)$:		+	0	–	0	–	0	+	

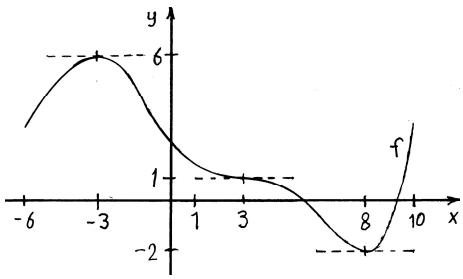
Besvarelse

Når $f(m) = n$, går f-grafen gennem punktet (m, n) .

f er aftagende i x-intervaller hvor $f'(x)$ er negativ.

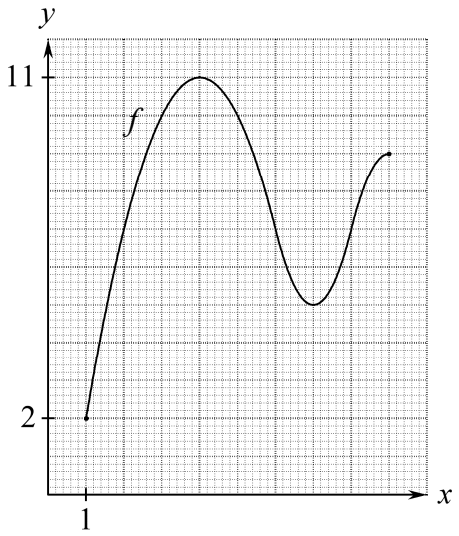
f er voksende i x-intervaller hvor $f'(x)$ er positiv.

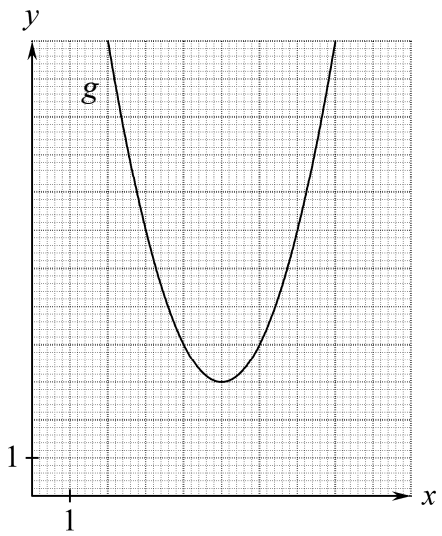
For de x-værdier hvor $f'(x)$ er 0 , har grafen vandret tangent.



Ekstrema

39. Maksimum og minimum.





Maksimum for f er den største y-koordinat til et punkt på f-grafen. Vi ser at

maksimum for f er 11.

Minimum for f er den mindste y-koordinat til et punkt på f-grafen. Vi ser at

minimum for f er 2.

Grafen for g er en parabel hvor grenene går uendelig højt op.

Der er ikke noget punkt på grafen der har den største y-koordinat
da man altid kan afsætte et punkt højere oppe på grafen, så

funktionen g har ikke noget maksimum.

Når vi skriver hvad maksimum eller minimum er,
så skriver vi normalt også hvad punktets x-koordinat er:

f har maksimum for $x = 4$ og maksimum er $y = 11$

f har minimum for $x = 1$ og minimum er $y = 2$

Undertiden er det skrevet kortere, f.eks:

f har maksimum **i** 4 og maksimum **er** 11 .

f har minimum **i** 1 og minimum **er** 2 .

Størsteværdi og mindsteværdi for en funktion er det samme som hhv. maksimum og minimum.

I nogle opgaver står at vi skal bestemme ekstrema. Dette betyder at vi skal finde maksimum hvis der er et maksimum, og minimum hvis der er et minimum.

Ekstremum er en fællesbetegnelse for maksimum og minimum. Ordet ekstremum hedder i flertal ekstremummer eller ekstrema. Det er den sidste form der bruges i eksamensopgaver.

40. Bestem med $f'(x)$ den værdi af x hvor y er størst.

Opgave Højden af en figur er givet ved $f(x) = 86 - x^2 - \frac{16}{x}$, $\frac{1}{5} < x < 9$,

hvor x er figurens bredde, og $f(x)$ er figurens højde.
Bestem bredden så højden bliver størst mulig.

Besvarelse 1 $f(x) = 86 - x^2 - \frac{16}{x}$, $\frac{1}{5} < x < 9$, hvor figurs bredde og højde er x og $f(x)$.

Vi bestemmer monotoniforholdene for f:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(86 - x^2 - \frac{16}{x}\right) = \frac{16}{x^2} - 2\cdot x \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

$f'(x)$ kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor $f'(x) = 0$, dvs. hvor $\frac{16}{x^2} - 2x = 0$.

Nspire løser ligningen $x^3 + 2x^2 = 0$ mht. x for $\frac{1}{5} < x < 9$ og får $x = -2$:

$$\text{solve}\left(\frac{16}{x^2} - 2\cdot x = 0, x\right) \,|\, \frac{1}{5} < x < 9 \;\blacktriangleright\; x = 2$$

Vi udregner $f'(x)$ i en x-værdi på hver side af 2:

$f'(1) = \frac{16}{1^2} - 2\cdot 1 = 14$ så $f'(x)$ er positiv for $\frac{1}{5} < x < 2$

$f'(4) = \frac{16}{4^2} - 2\cdot 4 = -7$ så $f'(x)$ er negativ for $2 < x < 9$.

Heraf slutter vi følgende monotoniforhold:

f er voksende i intervallet $\frac{1}{5} < x \le 2$ og f er aftagende i intervallet $2 \le x < 9$.

Vi bestemmer bredden så højden er størst mulig:

Af monotoniforholdene følger: $f(x)$ er størst mulig når $x = 2$, dvs.

Højden bliver størst mulig når bredden er $\underline{\underline{2}}$.

Besvarelse 2 Vi bestemmer monotoniforholdene for f:

$$f(x) := 86 - x^2 - \frac{16}{x} \;\blacktriangleright\; \textit{Udført} \qquad \frac{1}{5} < x < 9$$

$$fm(x) := \frac{d}{dx}(f(x)) \;\blacktriangleright\; \textit{Udført} \qquad fm(x) = \frac{16}{x^2} - 2\cdot x \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

f'(x) kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor f'(x)=0.

Nspire løser ligningen f'(x)=0 mht. x og får $x=2$:

$$\text{solve}(fm(x) = 0, x) \;\blacktriangleright\; x = 2$$

Vi udregner f '(x) i en x−værdi på hver side af 2:

$fm(1) = 14$ så f '(x) er positiv for $\frac{1}{5} < x < 2$

$fm(4) = -7$ så f '(x) er negativ for $2 < x < 9$

Heraf slutter vi følgende monotoniforhold:

f er voksende i intervallet $\frac{1}{5} < x \le 2$ og f er aftagende i intervallet $2 \le x < 9$

Vi bestemmer bredden så højden er størst mulig:

Af monotoniforholdene følger: f(x) er størst mulig når x=2, dvs.

Højden bliver størst mulig når bredden er 2 .

41. Bestem med $f'(x)$ den største værdi af y.

Opgave Højden af en figur er givet ved $f(x) = 86 - x^2 - \frac{16}{x}$, $\frac{1}{5} < x < 9$,

hvor x er figurens bredde, og $f(x)$ er figurens højde.
Bestem den størst mulige højde.

Besvarelse 1 $f(x) = 86 - x^2 - \frac{16}{x}$, $\frac{1}{5} < x < 9$, hvor figurs bredde og højde er x og $f(x)$.

Vi bestemmer monotoniforholdene for f:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(86 - x^2 - \frac{16}{x}\right) = \frac{16}{x^2} - 2\cdot x \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

$f'(x)$ kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor $f'(x) = 0$, dvs. hvor $\frac{16}{x^2} - 2x = 0$.

Nspire løser ligningen $x^3 + 2x^2 = 0$ mht. x for $\frac{1}{5} < x < 9$ og får $x = -2$:

$$\text{solve}\left(\frac{16}{x^2} - 2\cdot x = 0, x\right) \,|\, \frac{1}{5} < x < 9 \;\blacktriangleright\; x = 2$$

Vi udregner $f'(x)$ i en x-værdi på hver side af 2:

$f'(1) = \frac{16}{1^2} - 2\cdot 1 = 14$ så $f'(x)$ er positiv for $\frac{1}{5} < x < 2$

$f'(4) = \frac{16}{4^2} - 2\cdot 4 = -7$ så $f'(x)$ er negativ for $2 < x < 9$.

Heraf slutter vi følgende monotoniforhold:

f er voksende i intervallet $\frac{1}{5} < x \le 2$ og f er aftagende i intervallet $2 \le x < 9$.

Vi bestemmer den størst mulige højde:

Af monotoniforholdene følger: $f(x)$ er størst mulig når $x = 2$. $f(2) = 86 - 2^2 - \frac{16}{2} = 74$

Den størst mulige højde er $\underline{\underline{74}}$.

Besvarelse 2 Vi bestemmer monotoniforholdene for f:

$$f(x) := 86 - x^2 - \frac{16}{x} \;\blacktriangleright\; \textit{Udført} \qquad \frac{1}{5} < x < 9$$

$$fm(x) := \frac{d}{dx}(f(x)) \;\blacktriangleright\; \textit{Udført} \qquad fm(x) = \frac{16}{x^2} - 2\cdot x \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

f'(x) kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor f'(x)=0.

Nspire løser ligningen f'(x)=0 mht. x og får $x=2$:

$$\text{solve}(fm(x) = 0, x) \;\blacktriangleright\; x = 2$$

Vi udregner f '(x) i en x−værdi på hver side af 2:

$fm(1) = 14$ så f '(x) er positiv for $\frac{1}{5} < x < 2$

$fm(4) = -7$ så f '(x) er negativ for $2 < x < 9$

Heraf slutter vi følgende monotoniforhold:

f er voksende i intervallet $\frac{1}{5} < x \le 2$ og f er aftagende i intervallet $2 \le x < 9$

Vi bestemmer den størst mulige højde:

Af monotoniforholdene følger: f(x) er størst mulig når x=2. $f(2) = 74$

Den størst mulige højde er 74 .

42. Bestem med $f'(x)$ den værdi af x hvor y er mindst.

Dette gøres som vist i ramme 40 bortset fra at monotoniforholdene nu er aftagende-voksende i stedet for voksende-aftagende, og at vi nu skriver mindst i stedet for størst.

43. Bestem med $f'(x)$ den mindste værdi af y .

Dette gøres som vist i ramme 41 bortset fra at monotoniforholdene nu er aftagende-voksende i stedet for voksende-aftagende, og at vi nu skriver mindst i stedet for størst.

44. Bestem ekstrema.

Når der står "Bestem ekstrema", så skal vi bestemme minimum hvis der er et minimum, og vi skal bestemme maksimum hvis der er et maksimum. Se ramme 41 og 43.

45. Gør rede for at funktionen har et minimum (eller maksimum).

Opgave

Gør rede for at funktionen

$$f(x) = x^3 - 9x + 12 \quad , \qquad x > 0$$

har et minimum.

Metode

Vi bestemmer monotoniforhold for $f(x)$ med metoden fra ramme 36. Herefter skriver vi:

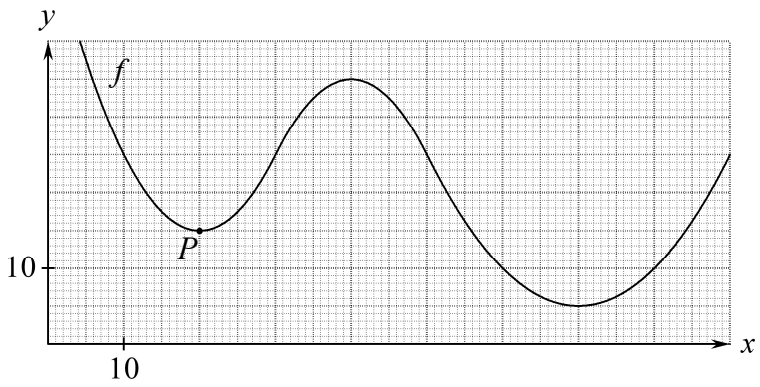
Da $f(x)$ er

aftagende i intervallet $0 < x \le \sqrt{3}$ og voksende i intervallet $\sqrt{3} \le x$

kan vi slutte at

$f(x)$ har minimum for $x = \sqrt{3}$.

46. Lokalt maksimum og minimum.



Figuren viser grafen for en funktion f. I de to ender fortsætter grafen uendelig højt op.

P er grafpunktet med x-koordinat 20 og y-koordinat 15.

Vi kan vælge et stykke af grafen omkring P sådan at 15 er mindste y-koordinat på dette stykke. Vi siger derfor at

f har lokalt minimum for $x = 20$ og det lokale minimum er $y = 15$.

15 er ikke minimum da der andre steder på grafen er y-koordinater som er mindre.

Hvis $Q(x_0, y_0)$ er et punkt på grafen for en funktion, og vi kan vælge et stykke af grafen omkring Q sådan at y_0 er mindste y-koordinat på dette stykke, så siger vi at

funktionen har <u>lokalt minimum</u> for $x = x_0$ og det lokale minimum er $y = y_0$

Hvis $Q(x_0, y_0)$ er et punkt på grafen for en funktion, og vi kan vælge et stykke af grafen omkring Q sådan at y_0 er største y-koordinat på dette stykke, så siger vi at

funktionen har <u>lokalt maksimum</u> for $x = x_0$ og det lokale maksimum er $y = y_0$

Om funktionen fra figuren ovenfor gælder:

f har lokalt minimum for $x = 20$ og det lokale minimum er $y = 15$.

f har lokalt maksimum for $x = 40$ og det lokale maksimum er $y = 35$.

f har lokalt minimum for $x = 70$ og det lokale minimum er $y = 5$.

f har minimum for $x = 70$ og minimum er $y = 5$.

Undertiden er det skrevet kortere, f.eks:

f har minimum **i** 70 og minimum **er** 5.

f har lokalt maksimum **i** 40 og det lokale maksimum **er** 35.

I nogle opgaver står at vi skal bestemme <u>lokale ekstrema</u>. Dette betyder at vi skal finde både de lokale minimummer og de lokale maksimummer.

Ordet ekstremum hedder i flertal ekstremummer eller ekstrema. Det er den sidste form der bruges i eksamensopgaver.

47. Bestem lokale ekstrema.

Opgave Bestem de lokale ekstrema for funktionen $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-18x-90$.

Besvarelse 1 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-18x-90$

Vi bestemmer monotoniforholdene for f:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{3}{2}\cdot x^2-18\cdot x-90\right)=x^2+3\cdot x-18$$ *udregnet af Nspire*

$f'(x)$ kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor $f'(x)=0$, dvs. hvor $x^2+3x-18 = 0$.

Nspire løser ligningen $x^2+3x-18=0$ mht. x og får $x=-6$ eller $x=3$.

$\text{solve}\left(x^2+3\cdot x-18=0,x\right)$ ▸ $x=-6$ or $x=3$

-6 og 3 deler tallinjen op i tre intervaller. I hvert af disse vælger vi et tal og udregner f':

Da $f'(-7) = (-7)^2+3(-7)-18 = 10$ er $f'(x)$ positiv for $x<-6$

Da $f'(0) = 0^2+3\cdot 0-18 = -18$ er $f'(x)$ negativ for $-6<x<3$

Da $f'(4) = 4^2+3\cdot 4-18 = 10$ er $f'(x)$ positiv for $3<x$

Af dette følger at monotoniforholdene er følgende:

$f(x)$ er voksende i intervallet $x\le -6$,
aftagende i intervallet $-6\le x\le 3$ og
voksende i intervallet $3\le x$.

x:		-6		3	
$f'(x)$:	+	0	–	0	+
$f(x)$:	voks		aft		voks

Vi bestemmer de lokale ekstrema: Af monotoniforholdene følger:

der er lokalt maksimum for $x=-6$ og lokalt minimum for $x=3$.

$f(-6) = \frac{1}{3}(-6)^3+\frac{3}{2}(-6)^2-18(-6)-90 = 0$

$f(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3+\frac{3}{2}\cdot 3^2-18\cdot 3-90 = -\frac{243}{2}$

$f(x)$ har lokalt maksimum for $x=-6$ og det lokale maksimum er $y=0$

$f(x)$ har lokalt minimum for $x=3$ og det lokale minimum er $y=-\frac{243}{2}$

Besvarelse 2

Vi bestemmer monotoniforholdene for f:

$\mathbf{f}(x):=\frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{3}{2}\cdot x^2-18\cdot x-90$ ▸ *Udført* $\mathbf{fm}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$ ▸ *Udført* $\mathbf{fm}(x)=x^2+3\cdot x-18$ *udregnet af Ns*

f '(x) kan skifte fortegn i de x hvor f '(x)=0. Nspire løser ligningen f '(x)=0 mht. x og får $x=-6$ eller $x=3$:

$\text{solve}(\mathbf{fm}(x)=0,x)$ ▸ $x=-6$ or $x=3$

−6 og 3 deler tallinjen op i tre intervaller. I hvert af disse vælger vi et tal og udregner f ' :

$\mathbf{fm}(-7)=10$ så f '(x) er positiv for x<−6

$\mathbf{fm}(0)=-18$ så f '(x) er negativ for −6<x<3

$\mathbf{fm}(4)=10$ så f '(x) er positiv for 3<x

Af dette følger at monotoniforholdene er følgende:

f(x) er voksende i intervallet x≤−6, aftagende i intervallet −6≤x≤3 og voksende i intervallet 3≤x .

Vi bestemmer lokale ekstrema:

Af monotoniforhold følger: der er lokalt maksimum for x = −6 og lokalt minimum for x = 3 .

$\mathbf{f}(-6)=0$ og $\mathbf{f}(3)=\frac{-243}{2}$

f(x) har lokalt maksimum for x = −6 og det lokale maksimum er y = 0 .

f(x) har lokalt minimum for x = 3 og det lokale minimum er $y=\frac{-243}{2}$.

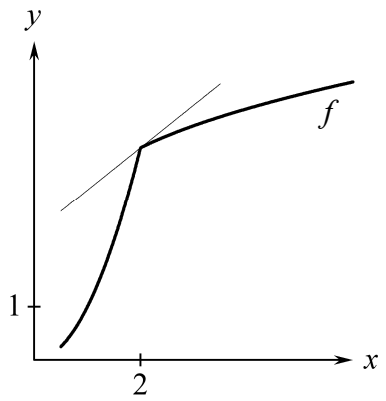
Beviser

48. Differentiabel.

Grafen for f har et knæk i punktet med x-koordinat 2.
Derfor har grafen ikke nogen tangent i dette punkt.
(Tangenten er en linje der følger grafen nær punktet).

Funktionen f har ikke nogen differentialkvotient i 2, for differentialkvotienten er tangentens hældningskoefficient, og der er ikke nogen tangent.

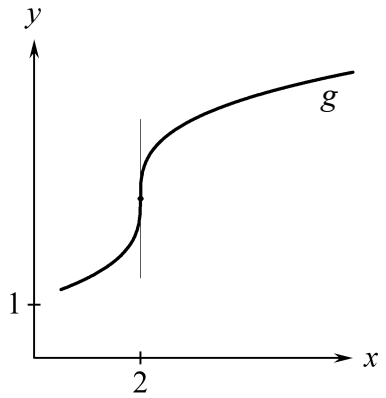
Der gælder altså at $f'(2)$ ikke eksisterer.



Grafen for g har en lodret tangent i punktet med x-koordinat 2.
En lodret linje har ikke nogen hældningskoefficient.

Funktionen g har ikke nogen differentialkvotient i 2, for differentialkvotienten er tangentens hældningskoefficient, og tangenten har ikke nogen hældningskoefficient.

Der gælder altså at $g'(2)$ ikke eksisterer.



<u>Definition 48.1</u>

Man siger at en funktion er <u>differentiabel</u> i et tal x_o
hvis funktionen har en differentialkvotient i x_o
dvs. hvis $f'(x_o)$ eksisterer.

49. Grænseværdi.

49.1

Udtrykket $u = \dfrac{3x^2 - 6x}{x-2}$ kan vi ikke regne ud for $x = 2$ da nævneren bliver 0.

Vi kan udregne u for værdier af x som er tæt på 2 :

x	1,98	1,999	2	2,001	2,02
u	5,94	5,997		6,003	6,06

Ved at vælge værdien af x tilstrækkelig tæt på 2 kan vi få værdien af u så tæt det skal være på 6.

Vi siger: **grænseværdien for x gående mod 2 af u** er lig 6

Med symboler skriver vi dette sådan: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 6x}{x-2} = 6$

Metode 49.2

Vi kan regne os frem til denne grænseværdi ved at bruge følgende metode: Vi faktoriserer brøkens tæller og forkorter brøken. Så får vi et udtryk som vi kan udregne når x er 2:

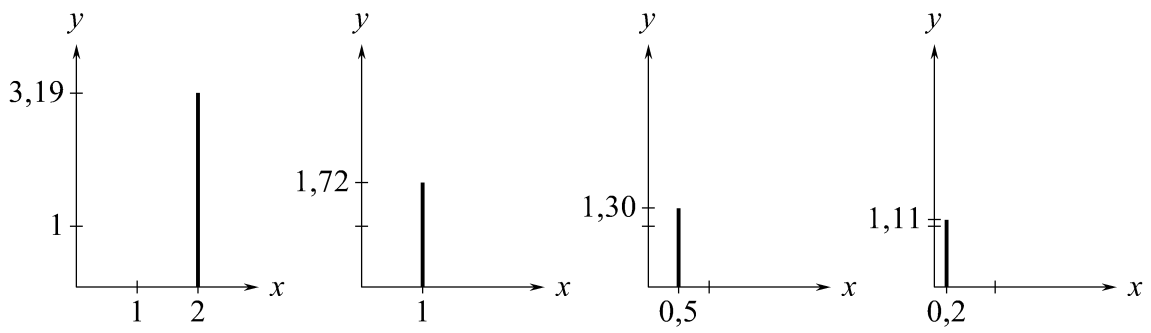
For $x \neq 2$ er $\dfrac{3x^2 - 6x}{x-2} = \dfrac{3x(x-2)}{x-2} = 3x$

så $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 6x}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} 3x$ og $\lim\limits_{x \to 2} 3x = 3 \cdot 2 = 6$

Regel 49.3 $\lim\limits_{x \to x_0} \left(k \cdot udtryk\right) = k \cdot \lim\limits_{x \to x_0} udtryk$ når k er en konstant

Regel 49.4 $\lim\limits_{x \to x_0} \left(udtryk1 + udtryk2\right) = \lim\limits_{x \to x_0} udtryk1 + \lim\limits_{x \to x_0} udtryk2$

49.5 Udregning af grænseværdi med Nspire.



Højden af stolpen er $h = \dfrac{e^x - 1}{x}$ hvor x er det tal stolpen står i. På figuren ser det ud til at stolpens højde nærmer sig 1 når vi trækker stolpen hen mod $x = 0$, hvor stolpen ikke eksisterer.
Vi får Nspire til at udregne grænseværdien af højden for x gående mod 0:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

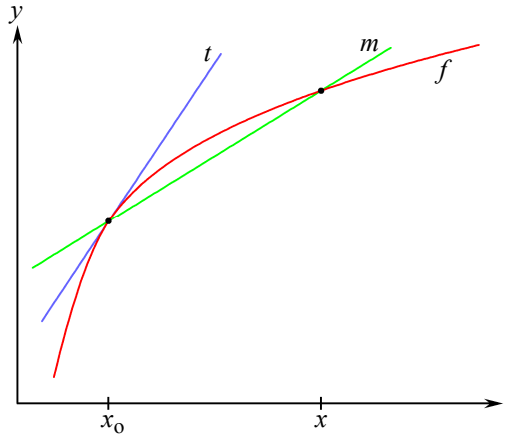
På Nspire kan vi vælge grænseværdi-skabelonen på skabelonpaletten. Skabelonen ser sådan ud: $\lim\limits_{\square \to \square} (\square)$ Vi behøver ikke skrive noget i det tredje felt.

50. Vi kan finde en differentialkvotient ved at udregne en grænseværdi.

Hvis f er differentiabel i x_o, så gælder

50.1 $$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Begrundelse for 50.1:



t er tangent til f-grafen.

$f'(x_o)$ = t's hældk. Dette er definitionen på differentialkvotient.

Vi tegner en linje m der skærer f-grafen i punkterne med x-koordinater x_o og x.
y-koordinater til disse punkter er $f(x_o)$ og $f(x)$. Så

$$m\text{'s hældk.} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$ ifølge formlen $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Når x nærmer sig til x_o
vil m's hældk. nærme sig til t's hældk., så

$$t\text{'s hældk.} = \lim_{x \to x_o} (m\text{'s hældk.}) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Vi har nu indset at både venstre og højre side i ligningen i 50.1 er lig t's hældk.,
så ligningen gælder.

51. Udledning af formlen for at differentiere x^2.

Når $f(x) = x^2$ er

$$
\begin{aligned}
f'(x_o) &= \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} && \text{ifølge 50.1} \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{x^2 - {x_o}^2}{x - x_o} \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{(x + x_o) \cdot (x - x_o)}{x - x_o} && \text{ifølge en af kvadratsætningerne} \\
&= \lim_{x \to x_o} (x + x_o) && \text{vi har forkortet med } x - x_o \\
&= x_o + x_o && \text{ifølge metode 49.2} \\
&= 2x_o
\end{aligned}
$$

Vi har nu fundet frem til følgende:

<u>51.1:</u> $\left(x^2\right)' = 2x$

52. Udledning af formlen for at differentiere *udtryk plus udtryk* .

Når $f(x) = g(x) + h(x)$ er

$$
\begin{aligned}
f'(x_o) &= \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} && \text{ifølge 50.1} \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{\left(g(x) + h(x)\right) - \left(g(x_o) + h(x_o)\right)}{x - x_o} \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{\left(g(x) - g(x_o)\right) + \left(h(x) - h(x_o)\right)}{x - x_o} \\
&= \lim_{x \to x_o} \left(\frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} + \frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} \right) \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} + \lim_{x \to x_o} \frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} && \text{ifølge 49.4} \\
&= g'(x_o) + h'(x_o) && \text{ifølge 50.1}
\end{aligned}
$$

Vi har nu fundet frem til følgende:

<u>52.1:</u> $\left(g(x) + h(x)\right)' = g'(x) + h'(x)$

Stikordsregister

aftagende 16, 17, 19
differentiabel 26
differentialkvotient 1, 3, 28
differentialkvotient på graf 5
differentialkvotient, udledning 29
differentialkvotients forskrift 3
differentialkvotients fortolkning 2
differentiationsregler 3
ekstrema 20, 23
ekstremum 20
fortolkning af differentialkvotient 2
funktionsværdi 1
funktionsværdi på graf 5
graf 19
grænseværdi 27, 28
hældningskoefficient 7, 9, 13, 14, 26
lokale ekstrema 24, 25
lokalt maksimum 24, 25
lokalt minimum 24, 25
løs ligning ud fra graf 6
maksimum 20, 23
mindsteværdi 20, 23
minimum 20, 23
monotoniforhold 17, 18
Nspire 3, 7, 8, 11, 15, 18, 22, 25, 27
røringspunkt 1, 2, 11
størsteværdi 20, 21, 22
tangent 1, 7, 9, 10, 12, 26
tangenthældning 8, 9, 10
voksende 16, 17, 19
væksthastighed 12, 13, 14, 15