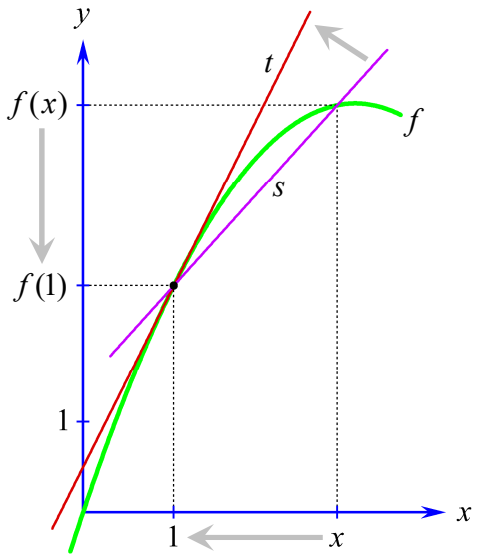
# Differential-regning

for B-niveau i stx

udgave 3




2017 Karsten Juul

**Differentialkvotient**


1. Tangent og røringspunkt. ... 1
2. Funktionsværdi og differentialkvotient. ... 1
3. Fortolkning af $f'(x)$ vedr. graf. ... 2
4. Fortolkning af $f'(x)$ når $x$ er tiden. ... 2
5. Fortolkning af $f'(x)$ når $x$ ikke er tiden. ... 2
6. Fortolkninger af $f'(x)$ begrundet. ... 2
7. Bestem $f'(x)$ med Nspire. ... 3
8. Reglerne for at bestemme $f'(x)$ uden hjælpemidler. ... 3
9. Advarsler om regler fra ramme 8. ... 3
10a. Eksempel på brug af regler fra ramme 8. ... 4
10b. Eksempel på brug af regler fra ramme 8. ... 4
11. Vinkel og tangent. ... 4
12. Aflæs tallet $f(r)$ på figur. ... 5
13. Aflæs tallet $f'(r)$ på figur. ... 5
14. Aflæs løsninger til $f(x)=t$ på figur. ... 6
15. Aflæs løsninger til $f'(x)=s$ på figur. ... 6
16. Er det grafen for den afledede, dvs. $f'$ ? ... 7


**Tangent**


17. Bestem ligning for tangent. ... 8
18. Bestem punkt på graf når vi kender $x$-koordinat . ... 8
19. Bestem punkt på graf når vi kender $y$-koordinat . ... 9
20a. Bestem $x$-koordinat når vi kender tangenthældning . ... 9
20b. Bestem punkt på graf når vi kender tangenthældning . ... 9
21. Bestem tangenthældning. ... 10
22. Bestem røringspunkt for tangent. ... 10


**Væksthastighed**


23. Væksthastighed. ... 11
24. Aflæs størrelsen når tidspunktet er kendt. ... 11
25. Aflæs væksthastigheden når tidspunktet er kendt. ... 12
26. Aflæs tidspunktet når størrelsen er kendt. ... 12
27. Aflæs tidspunktet når væksthastigheden er kendt. ... 13
28. Udregn størrelsen når tidspunktet er kendt. ... 13
29. Udregn væksthastigheden når tidspunktet er kendt. ... 13
30. Udregn tidspunktet når størrelsen er kendt. ... 14
31. Udregn tidspunktet når væksthastigheden er kendt. ... 14
32. Du skal ikke altid differentiere for at finde hastighed. ... 14


**Monotoni**


33. Voksende og aftagende. ... 15
34. Hvad er monotoniforhold? ... 15
35. Regel for at finde monotoniforhold. ... 16
36. Tegn $f$-graf ud fra $f'$-fortegn m.m. ... 16
37. Bestem monotoniforhold. ... 17
38. Bestem monotoniforhold for $f$ ud fra $f$-graf. ... 18
39. Bestem monotoniforhold for $f$ ud fra $f'$-graf. ... 18


**Ekstrema**


40. Maksimum og minimum. ... 19
41. Bestem med $f'(x)$ den værdi af $x$ hvor $y$ er størst. ... 20
42. Bestem med $f'(x)$ den største værdi af $y$. ... 21
43. Bestem med $f'(x)$ den værdi af $x$ hvor $y$ er mindst. ... 22
44. Bestem med $f'(x)$ den mindste værdi af $y$ . ... 22
45. Bestem ekstrema. ... 22
46. Gør rede for at funktionen har et minimum (eller maksimum). ... 22
47. Lokalt maksimum og minimum. ... 23
48. Bestem lokale ekstrema. ... 24
49. Bestem for hver værdi af $a$ antal løsninger til $f(x) = a$ ... 25


**Beviser**


50. Differentiabel. ... 26
51. Grænseværdi. Kontinuert ... 27
52. Vi kan finde en differentialkvotient ved at udregne en grænseværdi. ... 28
53. Udledning af formlen for at differentiere $x^2$. ... 29
54. Udledning af formlen for at differentiere *udtryk plus udtryk* . ... 29


Tidligere udgave af dette hæfte har skiftet adresse til: http://mat1.dk/differentialregning_for_a_niveau_i_stx_udgave_2.pdf


**Differentialregning for B-niveau i stx, udgave 3 ,** **© 2017 Karsten Juul .** Nyeste version af dette hæfte kan downloades fra http://mat1.dk/noter.htm . Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren sender en e-mail til kj@mat1.dk som oplyser at dette hæfte benyttes, og oplyser hold, niveau, lærer og skole.

4/8-2017

# Differentialkvotient

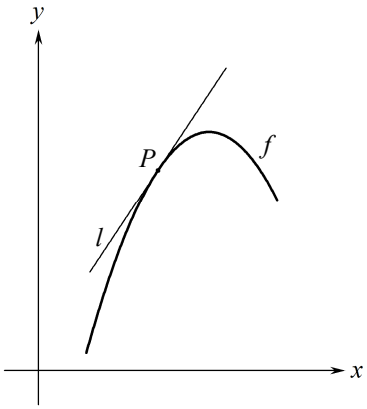
## 1. Tangent og røringspunkt.

1a. At $l$ er **tangent** i $P$
betyder at $l$ er linjen gennem $P$ som følger grafen nær $P$.

1b. $P$ kaldes tangentens **røringspunkt**.

1c. Grafpunkterne nær $P$ ligger normalt ikke på tangenten
(selv om det ser sådan ud på en tegning da stregen ikke er uendelig tynd).

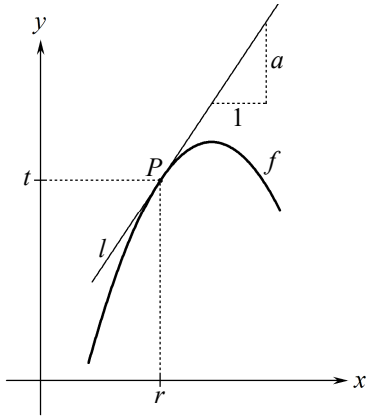
1d. På figuren er linje $l$ tangent til $f$-graf i $P$.




## 2. Funktionsværdi og differentialkvotient.

2a. At $t$ er **funktionsværdien** af $r$
betyder at $t$ er **$y$-koordinaten** til grafpunktet med $x$-koordinat $r$
og skrives $t = f(r)$
som læses $t$ er lig **$f$ af $r$**

2b. At $a$ er **differentialkvotienten** i $r$
betyder at $a$ er **tangenthældningen** i grafpunktet med $x$-koordinat $r$
og skrives $a = f'(r)$
som læses $a$ er lig **$f$ mærke af $r$**




2c. $f(r)$ = **$y$-koordinat** til $f$-grafs punkt med $x$-koordinat $r$.
2d. $f'(r)$ = **tangents hældning** i $f$-grafs punkt med $x$-koordinat $r$.
2e. $f'(r)$ = **væksthastighed** for $f(x)$ på tidspunkt $r$. (Hvis $x$ er tid).
2f. Når $x$ er lig $r$, og vi lægger et lille tal til $x$, så lægges ca. $f'(r)$ gange dette lille tal til $y$.

2c og 2d er vedtægter.
2e og 2f er begrundet i ramme 6.

2g. I ligninger af typerne

$f(m) = n$ og $f'(m) = p$

gælder:

Tallet på $m$'s plads er en $x$-værdi.
Tallet på $n$'s plads er en $y$-værdi.
Tallet på $p$'s plads er en tangenthældning eller væksthastighed.

2h. Opgavetyperne i rammerne 18-22, 28-31 løses med følgende **metode**:

Skriv en ligning af en af typerne $f(m) = n$ og $f'(m) = p$.
Brug ligningen til at bestemme $m$ eller $n$ eller $p$ eller *en konstant i forskriften*.

Denne metode indgår som en del af opgavetyperne i mange af de andre rammer.

## 3. Fortolkning af $f'(x)$ vedr. graf.

**Opgave** Fortolkning af $f'$ vedr. grafen.

Løsningerne til ligningen $f'(x) = 2$ er $x = 3$ og $x = 7$. Hvad fortæller dette om grafen?

**Besvarelse**

$f'(x)$ = tangenthældning (se 2d) så det at løsningerne er $x = 3$ og $x = 7$, fortæller:
Det er grafpunkterne med $x$-koordinat 3 og 7 hvor tangenthældningen er 2.

## 4. Fortolkning af $f'(x)$ når $x$ er tiden.

**Opgave** Fortolkning af $f'$ vedr. noget fra virkeligheden når $x$ er tiden.

Der er et tegnet dyr på skærmen. $f(x)$ er dyrets højde målt i mm, og $x$ er tiden målt i minutter. Det er oplyst at $f'(20) = 2$ . Gør rede for betydningen af dette.

**Besvarelse**

Jeg har brugt blå farve for at pege på udskiftningen. Du skal ikke bruge farve.

Regel (se 2e):

$f'(r)$ er vækshastighed for $f(x)$ på tidspunkt $r$.

Hvis du glemmer ordet "hastighed", så betyder sætningen at højden i løbet af et minut vokser 2 mm, og det er ikke det der er meningen.

I denne regel indsætter vi de aktuelle ord og tal:

**2** er vækshastighed for **højden** på tidspunktet **20**.

Dvs. På tidspunktet 20 minutter vokser dyrets højde med hastigheden 2 mm pr. minut.

## 5. Fortolkning af $f'(x)$ når $x$ ikke er tiden.

**Opgave** Fortolkning af $f'$ vedr. noget fra virkeligheden når $x$ ikke er tiden.

Der er et tegnet dyr på skærmen. $f(x)$ er dyrets højde målt i mm, og $x$ er længden målt i mm. Det er oplyst at $f'(20) = 2$ . Gør rede for betydningen af dette.

**Besvarelse**

Jeg har brugt blå farve for at pege på udskiftningen. Du behøver ikke bruge farve.

Regel (Se 2f):

Når $x$ er lig $r$, og vi lægger et lille tal til $x$, så lægges ca. $f'(r)$ gange dette lille tal til $y$.

I denne regel indsætter vi de aktuelle ord og tal:

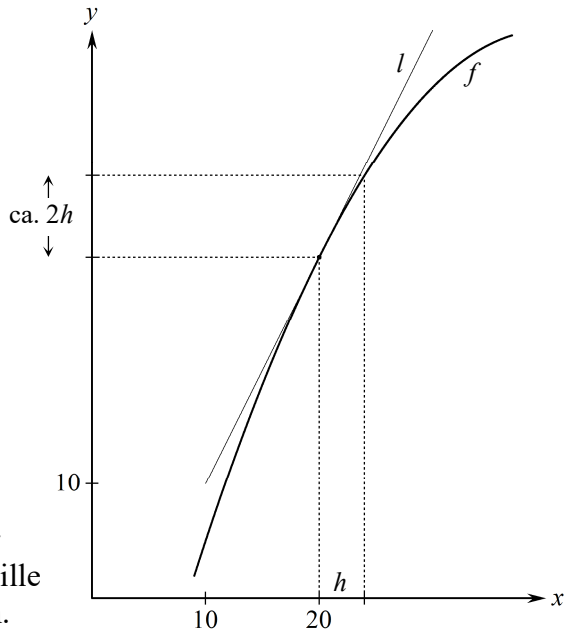
Når **længde** lig **20**, og vi lægger et lille tal til **længde**, så lægges ca. **2** gange det lille tal til **højde**.

## 6. Fortolkninger af $f'(x)$ begrundet.

Symbolet $f'(20)$ betyder tangenthældning,
så $f'(20) = 2$ betyder tangenthældning er 2,
så på tangenten gælder:
når $x$ bliver 1 større, så vil $y$ blive 2 større.
For $x$ nær 20 er graf og tangent næsten ens, så
(∗) når $x$ er ca. 20 og $x$ bliver 1 større,
så vil $f(x)$ blive ca. 2 større.

I ramme 4 betyder (∗) :
Når tidspunktet er ca. 20 minutter og der går ét minut, vil dyrets højde blive ca. 2 mm større.
dvs. vækshastigheden er ca. 2 mm pr. minut.

I ramme 5 betyder (∗) :
Når $x$ er nær 20 og vi lægger et lille tal til $x$, så bliver der lagt ca. 2 gange dette lille tal til $y$, dvs. når vi lægger et lille tal til længden, så lægges 2 gange dette lille tal til højden.



# 7. Bestem $f'(x)$ med Nspire.

**7a** For at få Nspire til at differentiere $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ mht. $x$ bruger vi skabelonen $\frac{d}{d\square}(\square)$ :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{1}{(x+2)^2}$$ *Udregnet af Nspire*

HUSK at skrive dette!

**7b** For at udregne $f'(3)$ skal vi først bestemme forskriften for $f'(x)$ som vist i 7a.
Så indsætter vi 3 for $x$ i denne forskrift:

$$f'(3) = \frac{1}{(3+2)^2} = \frac{1}{25}$$

Symbolet $\frac{d}{dx}$ kan IKKE skrives ved hjælp af en brøkstreg.

**7c Eksempel**

Dette er både korrekt matematiksprog og korrekt Nspiresprog.

$f(x)=x\cdot\ln(x)$ $\quad f'(x)=\frac{d}{dx}(x\cdot\ln(x)) = \ln(x)+1$ $\quad f'(2)=\ln(2)+1 = 1.69315$

**7d Eksempel**

Her fortæller vi til Nspire og til læseren at **fm** betyder **f '** .

$f(x):=x\cdot\ln(x)$ ▸ *Udført* $\quad fm(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Udført* $\quad fm(2) = 1.69315$ $\quad fm(x) = \ln(x)+1$

**:=** bevirker at f(x) kommer til at betyde x·ln(x) så vi kan skrive f(x) og f(3) i stedet for x·ln(x) og 3·ln(3) .

# 8. Reglerne for at bestemme $f'(x)$ uden hjælpemidler.

**8a** $k' = 0$ når $k$ er en konstant. **f.eks.** $4' = 0$ **og** $(\ln(2))' = 0$

**8b** $(kx)' = k$ **f.eks.** $x' = 1$ **og** $(4x)' = 4$

**8c** $(x^a)' = a\cdot x^{a-1}$ **f.eks.** $(x^4)' = 4x^3$ **og** $(x^{-3,6})' = -3{,}6x^{-4,6}$

**8d** $(e^x)' = e^x$ e er et bestemt tal (ligesom π). e ≈ 2,71828. e er ikke den sædvanlige e-tast. Brug tegn-palet.

**8e** $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ Funktionen ln(x) kaldes "den naturlige logaritmefunktion".

**8f** $(k\cdot f(x))' = k\cdot f'(x)$ **f.eks.** $(7x^4)' = 7\cdot 4x^3 = 28x^3$ **og** $(7\ln(x))' = 7\cdot\frac{1}{x} = \frac{7}{x}$

**8g** $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ **f.eks.** $(\ln(x)+4+7x^4)' = \frac{1}{x}+0+28x^3 = \frac{1}{x}+28x^3$

**8h** $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$ **f.eks.** $(\ln(x)+4-7x^4)' = \frac{1}{x}+0-28x^3 = \frac{1}{x}-28x^3$

**8i** Da $\frac{1}{x} = x^{-1}$ og $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ kan vi udregne $(\frac{1}{x})'$ og $(\sqrt{x})'$ med reglen $(x^a)' = a\cdot x^{a-1}$ .

På de to næste sider er der flere eksempler på brug af reglerne 8a-8i.

# 9. Advarsler om regler fra ramme 8.

$(a^x)'$ er **IKKE** $x\cdot a^{x-1}$

$(4^x)'$ er **IKKE** $x\cdot 4^{x-1}$

$(x^2\cdot e^x)'$ er **IKKE** $2x\cdot e^x$

$\left(\frac{x^2}{e^x}\right)'$ er **IKKE** $\frac{2x}{e^x}$

$((1-x)^3)'$ er **IKKE** $3(1-x)^2$

$((1-x)^3)'$ er **IKKE** $3(-1)^2$

$(\ln(1+x^2))'$ er **IKKE** $\frac{1}{1+x^2}$

$(\ln(1+x^2))'$ er **IKKE** $\frac{1}{2x}$

$(e^{1+x^2})'$ er **IKKE** $e^{1+x^2}$

$(e^{1+x^2})'$ er **IKKE** $e^{2x}$

## 10a. Eksempel på brug af regler fra ramme 8.

**Opgave** En funktion $f$ er givet ved

$$f(x) = 2 \cdot x^3 + 4 \,.$$

Bestem $f'(3)$ . ← Her må vi først finde f '(x). Derefter indsætter vi 1 for x i det differentierede udtryk.

**Besvarelse** Da $f(x) = 2 \cdot x^3 + 4$

er $f'(x) = (2 \cdot x^3)' + 4'$ Vi differentierer på hver side af + (regel 8g) .

$= 2 \cdot (x^3)' + 0$ Konstant skal ikke differentieres når den er ganget med $x$-udtryk (regel 8f) , og konstant differentieret er 0 (regel 8a) .

$= 2 \cdot 3x^{3-1}$ Potens differentieres ved at gøre eksponent 1 mindre og gange med den oprindelige eksponent (regel 8c) .

$= 6x^2$

så $f'(3) = 6 \cdot 3^2 = 6 \cdot 9 = \underline{\underline{54}}$

## 10b. Eksempel på brug af regler fra ramme 8.

**Opgave** En funktion $f$ er givet ved $f(x) = \frac{8}{x} + \sqrt{x}$ .

Bestem $f'(4)$ . ← Her må vi først finde f '(x). Derefter indsætter vi 4 for x i det differentierede udtryk.

**Besvarelse**

$$f(x) = 8 \cdot x^{-1} + x^{\frac{1}{2}}$$

så

$$f'(x) = 8 \cdot (-1)x^{(-1)-1} + \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$f'(x) = -8x^{-2} + \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -8 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{-8}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Heraf får vi

$$f'(4) = \frac{-8}{4^2} + \frac{1}{2\sqrt{4}}$$

$$f'(4) = \frac{-8}{16} + \frac{1}{2 \cdot 2}$$

$$f'(4) = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

## 11. Vinkel og tangent.

**Opgave** Linjen $l$ er tangent til grafen for $f(x) =$ i punktet $P(4, 3)$.
Bestem vinklen $v$ mellem vandret og tangenten $l$ .

**Besvarelse**

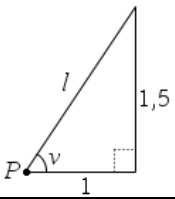
Figuren viser grafen for $f(x) = 0{,}1875x^2$ og tangenten $l$ i punktet $P(4, 3)$ og vinklen $v$ mellem vandret og $l$ .

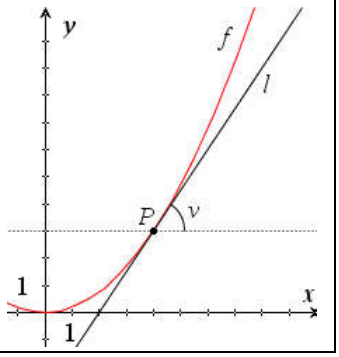
$f'(x) = 0{,}1875 \cdot 2x = 0{,}375x$ så $l$ 's hældningskoefficient er $f'(4) = 0{,}375 \cdot 4 = 1{,}5$ .

Af den viste trekant får vi

$\tan(v) = 1{,}5$ så $v = \tan^{-1}(1{,}5) = 56{,}3099°$

dvs. $\underline{\underline{v = 56{,}3°}}$ .

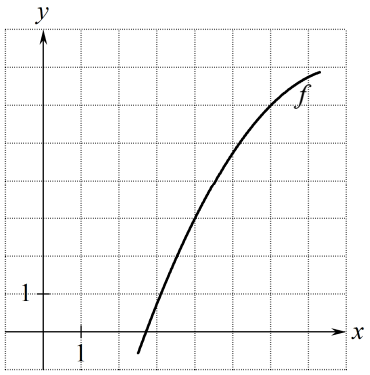


# 12. Aflæs tallet $f(r)$ på figur.

**Opgave**

Aflæs tallet $f(4)$ på figuren.



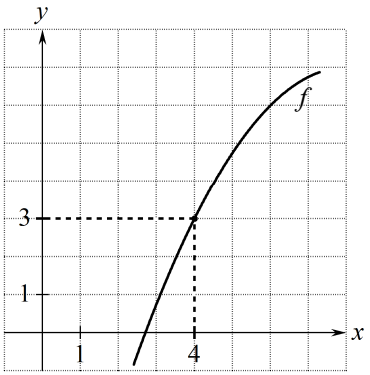

**Sådan tænker vi**

Der står 4 i parentesen, så vi skal finde det punkt på grafen hvor $x$-koordinaten er 4.
Der står $f(\ )$, så $y$-koordinaten er facit.

**Besvarelse**

$f(4)$ = $y$-koordinat til grafpunkt med $x$-koordinat 4

$\underline{\underline{f(4) = 3}}$. Se markering på figur.



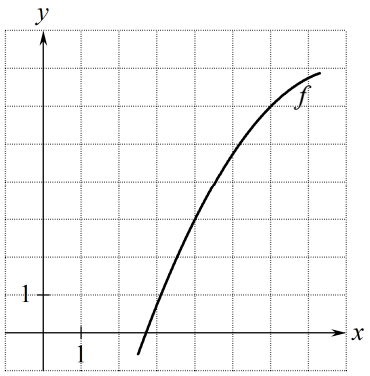

**Husk**

Når vi aflæser et tal på en figur, skal vi skrive tallet på figuren der hvor vi har aflæst det.
Hvis der ikke er plads, kan vi lave en pil fra tallet til det sted hvor det er aflæst.

# 13. Aflæs tallet $f'(r)$ på figur.

**Opgave**

Aflæs tallet $f'(4)$ på figuren.




**Sådan tænker vi**

Der står 4 i parentesen, så vi skal finde det punkt på grafen hvor $x$-koordinaten er 4.
Der står $f'(\ )$, så tangenthældningen er facit.

**Besvarelse**

$f'(4)$ = hældningskoefficient for tangent $l$ i grafpunkt med $x$-koordinat 4.

Vi tegner $l$.

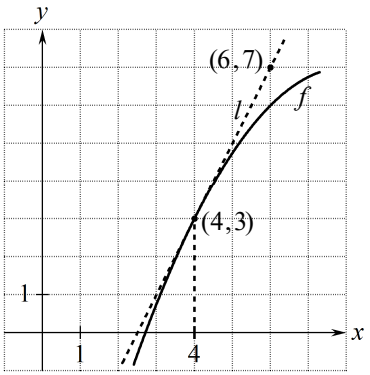
Vi aflæser punkterne $(4,3)$ og $(6,7)$ på $l$.

$l$'s hældningskoefficient er

$$\frac{7-3}{6-4} = 2$$

så

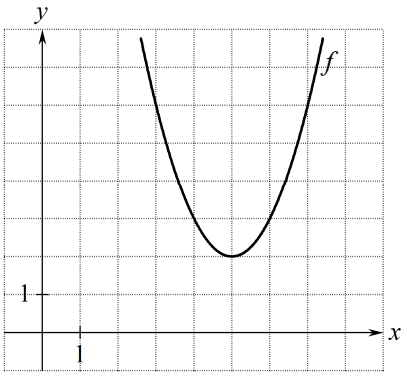
$$\underline{\underline{f'(4) = 2}}.$$



# 14. Aflæs løsninger til $f(x)=t$ på figur.

**Opgave**

Aflæs løsningerne til ligningen $f(x)=6$ på figuren




**Sådan tænker vi**

Der står $f(\ )=6$ , så vi skal finde de punkter på grafen hvor *y*-koordinaten er $6$ .
Der står *x* i parentesen, så facit er *x*-koordinaterne til de punkter vi har fundet.

**Besvarelse**

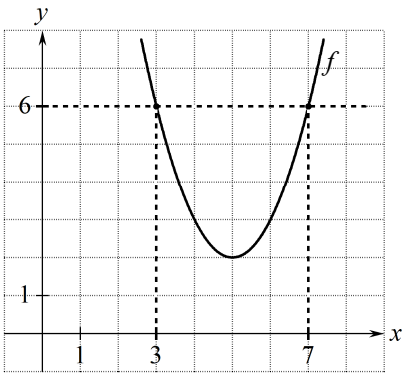
Vi skal løse $f(x)=6$ .

$f(x)$ er *y*-koordinaten til et grafpunkt.

Vi finder de grafpunkter hvor *y*-koordinaten er $6$ .

Vi aflæser *x*-koordinaten til hvert af disse punkter og får $3$ og $7$ . Se markeringen på figuren.

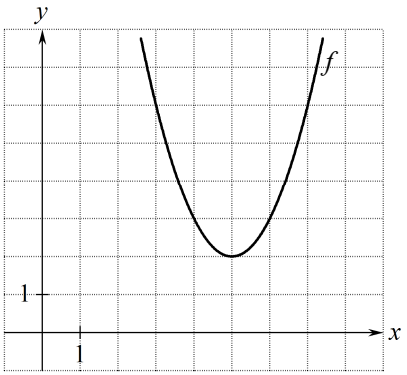
Løsningerne til $f(x)=6$ er $x=3$ eller $x=7$ .




# 15. Aflæs løsninger til $f'(x)=s$ på figur.

**Opgave**

Aflæs løsningerne til ligningen $f'(x)=0$ på figuren.




**Sådan tænker vi**

Der står $f'(\ )=0$ , så vi skal finde de punkter på grafen hvor tangenthældningen er $0$ .
Der står *x* i parentesen, så facit er *x*-koordinaterne til de punkter vi har fundet.

**Besvarelse**

Vi skal løse $f'(x)=0$ .

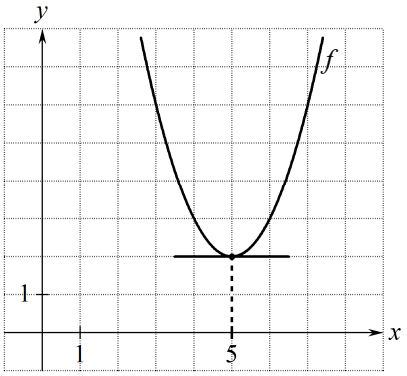
$f'(x)$ er tangenthældningen i et grafpunkt.

Vi finder det grafpunkt hvor tangenthældningen er 0.

Vi aflæser *x*-koordinaten til dette punkt og får $5$ .

Se markeringen på figuren.

Løsningen til $f'(x)=0$ er $x=5$ .

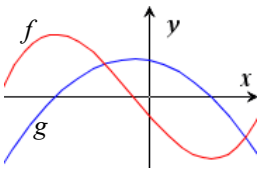



**Husk** at tegne tangenten og skrive at det givne tal er denne linjes hældningskoefficient.

# 16. Er det grafen for den afledede, dvs. $f'$ ?

**16.1 Opgave**

Gør rede for at $g$ ikke er $f'$.

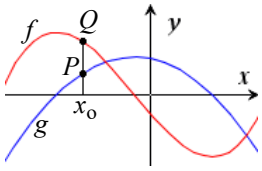



**Besvarelse** Se figur.

$g(x_o) = P$ 's $y$-koordinat så $g(x_o)$ er positiv

$f'(x_o)$ = tangenthældning i $Q$ så $f'(x_o)$ er negativ

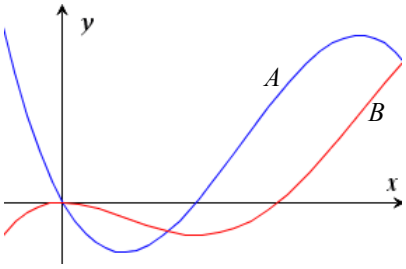
Da $g(x_o) \neq f'(x_o)$ er $g$ ikke den afledede af $f$.




**16.2 Opgave**

Figuren viser grafen for to funktioner $f(x)$ og $f'(x)$.

Gør rede for hvilken graf der hører til hvilken funktion.

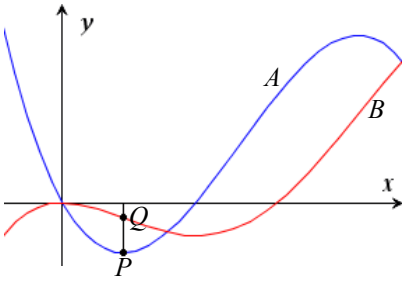



**Besvarelse**

Tangenten i $P$ har hældningskoefficient 0, så hvis $A$ var $f$-graf, og $B$ var $f'$-graf, så skulle $y$-koordinaten til $Q$ være 0. Det er den ikke. Så må det omvendte gælde:

$B$ er $f$-graf, og $A$ er $f'$-graf .

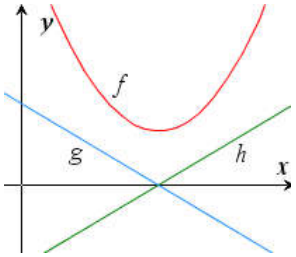
I opgaver af disse typer skal man altid vise at det ene ikke kan være rigtigt. Så har man vist at det modsatte gælder.




**16.3 Opgave**

Figuren viser graferne for tre funktioner $f$, $g$ og $h$.

Gør rede for hvilken af funktionerne $g$ og $h$ der er $f'$.



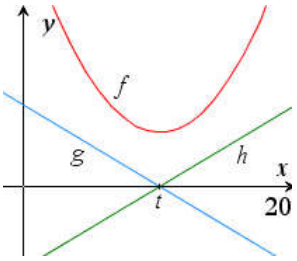

**Besvarelse**

Se figur.

For $x < t$ er $f$-grafens tangenthældning $f'(x)$ negativ.

For $x < t$ er $g(x)$ positiv
så $g(x)$ kan ikke være $f'(x)$.

Det er $h$ der er den afledede af $f$ .



# Tangent

## 17. Bestem ligning for tangent.

**Opgave** En funktion $f$ er givet ved $f(x) = x^2 - x + 2$ .
Bestem ligning for tangent til graf for $f$ i punktet $(2, f(2))$.

**Besvarelse** med brug af formel

Grønne kommentarer er ikke en del af besvarelsen.

Du skal IKKE bruge tallene 2 og –1 i andre opgaver. I stedet skal du bruge de tal du finder ved at differentiere den givne funktion.

$f(x) = x^2 - x + 2$ er oplyst

$f'(x) = 2x - 1$ Se ramme 8.

$(x_1 , y_1)$ og $a$ er røringspunkt og hældning for tangent:

$x_1 = \mathbf{2}$ er oplyst

$y_1 = f(2) = 2^2 - 2 + 2 = \mathbf{4}$ Se 2c og ramme 18.

$a = f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = \mathbf{3}$ Se 2d og ramme 21.

Tangent:

$y = a(x - x_1) + y_1$

$y = \mathbf{3}(x - \mathbf{2}) + \mathbf{4}$

$y = 3x - 6 + 4$

$y = 3x - 2$

Fra formelsamlingen:

Linjen gennem punktet $(x_1, y_1)$ med hældningskoefficienten $a$ har ligningen

$y = a(x - x_1) + y_1$ .

Tangenten til grafen for $f$ i punktet $(2, f(2))$
har ligningen $y = 3x - 2$ .

**Besvarelse** med brug af Nspire-kommando

$f(x) = x^2 - x + 2$ er oplyst

Vi skal bestemme en ligning for tangenten til grafen for $f$ i punktet $(2, f(2))$.

Nspire bestemmer tangentligning ud fra forskriften $x^2 - x + 2$ og $x$-koordinaten 2 :

Nspire: $\text{tangentLine}(x^2 - x + 2, x, 2) \blacktriangleright 3 \cdot x - 2$

Tangenten til grafen for $f$ i punktet $(2, f(2))$ har ligningen $y = 3x - 2$ .

## 18. Bestem punkt på graf når vi kender $x$-koordinat .

**Opgave** En funktion $f$ er givet ved $f(x) = x^3 - 3x^2$ .
Bestem $y$-koordinaten til det punkt på grafen for $f$ hvor $x$-koordinaten er 5 .

**Bevarelse**

$f(x) = x^2 - x + 2$ er oplyst

Vi skal bestemme $y$-koordinat til grafpunkt med $x$-koordinat 5.

$y$-koordinat $= f(5)$ Se 2c.

$y$-koordinat $= 5^3 - 3 \cdot 5^2$

$y$-koordinat $= 50$

Det punkt på grafen for $f$ hvor $x$-koordinaten er 5 , har $y$-koordinaten 50 .

## 19. Bestem punkt på graf når vi kender $y$-koordinat .

**Opgave** En funktion $f$ er givet ved $f(x) = x^3 - 3x^2$ .
Bestem $x$-koordinaten til de punkter på grafen for $f$ hvor $y$-koordinaten er $-4$ .

**Bevarelse** $f(x) = x^3 - 3x^2$

$y$-koordinat = $-4$

$f(x) = -4$ Se 2c.

$x^3 - 3x^2 = -4$

Nspire løser ligningen $x^3 - 3x^2 = -4$ mht. $x$ og får

$x = -1$ eller $x = 2$

Nspire: solve($x^3-3\cdot x^2=-4,x$) ▸ $x=-1$ or $x=2$

De punkter på grafen for $f$ hvor $y$-koordinaten er $-4$ ,
har $x$-koordinaterne $\underline{\underline{-1}}$ og $\underline{\underline{2}}$ .

## 20a. Bestem $x$-koordinat når vi kender tangenthældning .

**Opgave** En funktion $f$ er givet ved $f(x) = x^3 - 3x^2$ .
Bestem $x$-koordinat til hvert punkt på grafen for $f$ hvor tangenthældningen er 9 .

**Bevarelse** $f(x) = x^3 - 3x^2$ .

tangenthældning = 9

$f'(x) = 9$ Se 2d.

$3x^2 - 6x = 9$ Se ramme 7 og 8.

Nspire løser ligningen $3x^2 - 6x = 9$ mht. $x$ og får

$x = -1$ eller $x = 3$

Nspire: solve($3\cdot x^2-6\cdot x=9,x$) ▸ $x=-1$ or $x=3$

Det er punkterne med $x$-koordinat $\underline{\underline{-1 \text{ og } 3}}$ $-1$ hvor tangenthældning er 9 .

## 20b. Bestem punkt på graf når vi kender tangenthældning .

**Opgave** En funktion $f$ er givet ved $f(x) = x^3 - 3x^2$ .
Bestem koordinatsættet til hvert punkt på grafen for $f$ hvor tangenthældningen er 9 .

**Bevarelse** Først bestemmer vi $x$-koordinat som i 20a. Derefter:

$y$-koordinat = $f(-1)$ $y$-koordinat = $f(3)$ Se 2c.

$y$-koordinat = $(-1)^3 - 3(-1)^2$ $y$-koordinat = $3^3 - 3\cdot 3^2$

$y$-koordinat = $-4$ $y$-koordinat = $0$

De punkter på grafen hvor tangenthældningen er 9, har koordinatsættene

$\underline{\underline{(-1, -4) \quad \text{og} \quad (3, 0)}}$ .

# 21. Bestem tangenthældning.

**Opgave**

En funktion $g$ er givet ved

$$g(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 + 3\cdot x \ .$$

Bestem tangenthældningen i graf-punktet med $x$-koordinat 1

**Bevarelse**

$$g(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 + 3\cdot x \ .$$

tangenthældning = $g'(1)$ Se 2d.

tangenthældning = $1^2 + 3$ da $g'(x) = x^2 + 3$ Se ramme 7 og 8.

tangenthældning = 4

Tangenthældningen i graf-punktet med $x$-koordinat 1 er $\underline{\underline{4}}$ .

# 22. Bestem røringspunkt for tangent.

**Opgave**

Linjen $l: \ y = 9x + 17$ er tangent til grafen for funktionen $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .

Bestem koordinatsættet til røringspunktet.

**Besvarelse**

$l: \ y = 9x + 17$ er tangent til graf for $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

I røringspunktet skal $f$-grafens tangenthældning $f'(x)$ være lig $l$'s hældningskoefficient som er 9:

$$f'(x) = 9$$

$$3x^2 - 3 = 9$$

Nspire løser ligning $3x^2 - 3 = 9$ mht. $x$ og får

$$x = -2 \quad \text{eller} \quad x = 2$$

Nspire: $\text{solve}(3\cdot x^2 - 3 = 9, x)$ ▸ $x = -2$ or $x = 2$

Hvis $x = 2$ er

$y$-koordinat på $f$-graf lig $f(2) = 2^3 - 3\cdot 2 + 1 = 3$

$y$-koordinat på $l$ lig $y = 9\cdot 2 + 17 = 35$

så $y$-koordinaterne er ikke ens,

så grafpunkt med $x$-koordinat 2 er ikke røringspunkt.

Hvis $x = -2$ er

$y$-koordinat på $f$-graf lig $f(-2) = (-2)^3 - 3\cdot -2 + 1 = -1$

$y$-koordinat på $l$ lig $y = 9\cdot -2 + 17 = -1$

Hvis du skriver i hånden, skal der parentes om -2 efter gangetegn.

så $y$-koordinaterne er ens, og vi vidste i forvejen at tangenthældningerne er ens,

så grafpunkt med $x$-koordinat $-2$ er røringspunkt.

Koordinatsættet til røringspunktet er $\underline{\underline{(-2, -1)}}$ .

# Væksthastighed

## 23. Væksthastighed.

Figuren viser grafen for en funktion $f(x)$ hvor

$x$ = antal dage efter at vi begyndte at måle

$f(x)$ = plantens højde i mm

På figuren ser vi at

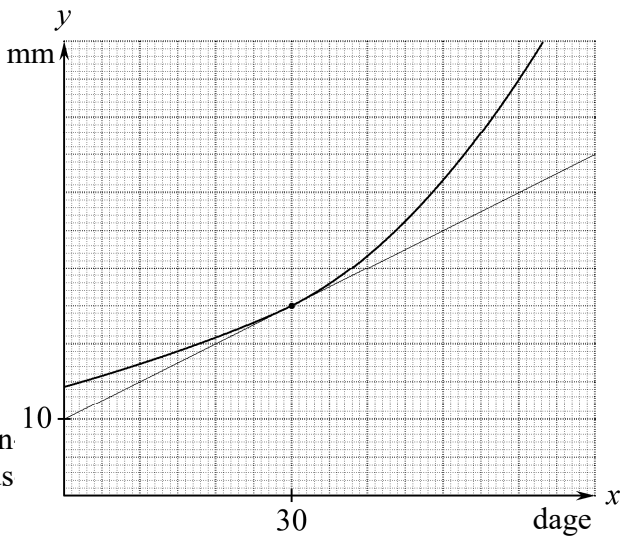
$f'(30) = 0{,}5$

og at omkring tidspunktet 30 dage vil plantens højde blive ca. 0,5 mm højere pr. dag.

Vi siger at

på tidspunktet 30 dage efter at vi begyndte at måle, er væksthastigheden lig 0,5 mm pr. dag.

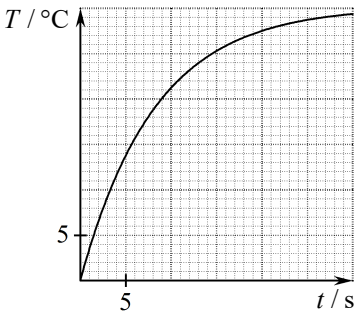
I et lille tidsum på $x$-aksen er grafen næsten sammenfaldende med den tegnede tangent. Det er i dette tidsrum at væksthastigheden er ca. 0,5 mm pr. dag.




## 24. Aflæs størrelsen når tidspunktet er kendt.

**Opgave**

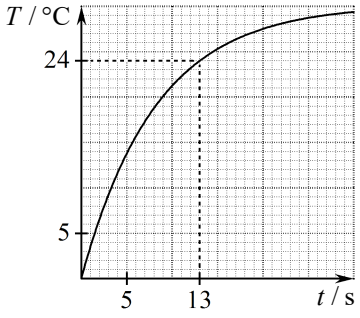
Grafen viser hvordan temperaturen $T$ er vokset.
Tiden $t$ måles i sekunder.
Bestem temperaturen på tidspunktet 13 sekunder.




**Besvarelse**

Vi finder grafpunktet hvor $t = 13$, og aflæser at for dette punkt er $T = 24$ .
*Dette har vi vist på skitsen.*

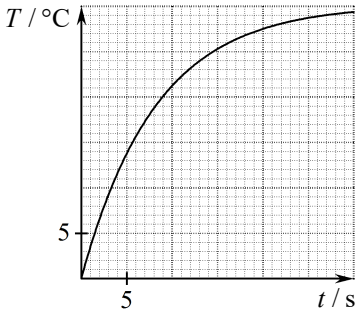
På tidspunktet 13 sekunder er temperaturen $\underline{\underline{24\,°C}}$ .



# 25. Aflæs væksthastigheden når tidspunktet er kendt.

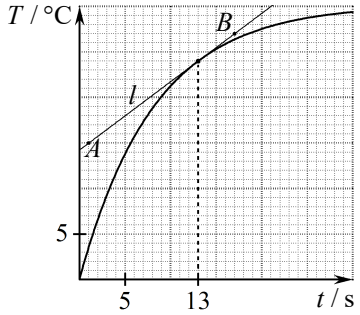
**Opgave**

Grafen viser hvordan temperaturen $T$ er vokset.
Tiden $t$ måles i sekunder.
Bestem temperaturens væksthastighed på tidspunktet 13 sekunder.




**Besvarelse**

Vi finder grafpunktet hvor $t = 13$, og
vi tegner tangenten $l$ i dette punkt, og
på $l$ aflæser vi punkterne $A(1, 15)$ og $B(17, 27)$.
*Alt dette har vi vist på skitsen.*




***l* 's hældningskoefficient er temperaturens væksthastighed på tidspunktet 13 sekunder.**

*l* 's hældningskoefficient er

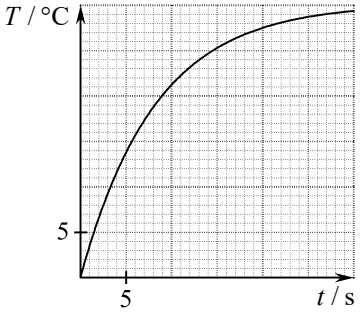
$$\frac{27-15}{17-1} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Temperaturens væksthastighed på tidspunktet 13 sekunder er $\underline{\underline{0{,}75\ °\text{C pr. sekund}}}$.

# 26. Aflæs tidspunktet når størrelsen er kendt.

**Opgave**

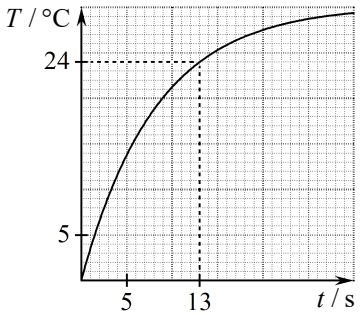
Grafen viser hvordan temperaturen $T$ er vokset.
Tiden $t$ måles i sekunder.
Bestem det tidspunkt hvor temperaturen er 24 °C.




**Besvarelse**

Vi finder grafpunktet hvor $T = 24$, og
aflæser at for dette punkt er $t = 13$.
*Dette har vi vist på skitsen.*

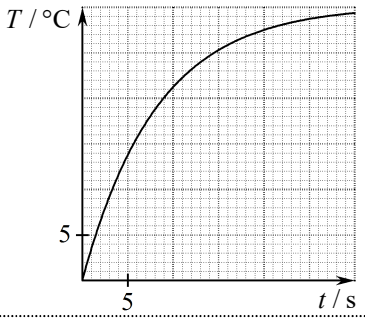
Temperaturen er 24 °C på tidspunktet $\underline{\underline{13\,\text{sekunder}}}$.



# 27. Aflæs tidspunktet når væksthastigheden er kendt.

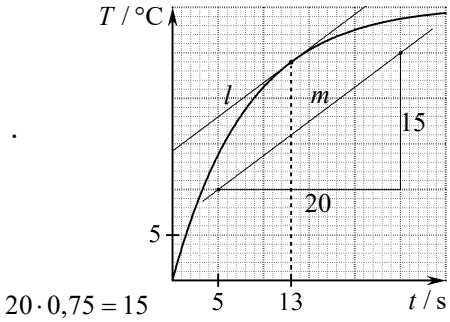
**Opgave**

Grafen viser hvordan temperaturen $T$ er vokset.
Tiden $t$ måles i sekunder.
Bestem det tidspunkt hvor temperaturens væksthastighed er 0,75 °C pr. sekund.




**Besvarelse**

Vi tegner en linje $m$ som har hældningskoefficient 0,75 , og vi lægger en lineal langs $m$ og parallelforskyder til linjen er en tangent $l$ til grafen, og vi aflæser at for røringspunktet er $t = 13$ .
*Alt dette har vi vist på figuren.*
Væksthastigheden for $t = 13$ er $l$'s hældningskoefficient:
På tidspunktet 13 sekunder er temperaturens væksthastighed 0,75 °C pr. sekund.




# 28. Udregn størrelsen når tidspunktet er kendt.

**Opgave**

Vægten af et dyr kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$$

hvor $x$ er dage og $f(x)$ er vægten i gram.
Bestem dyrets vægt på tidspunktet 30 dage.

**Besvarelse**

$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$ er dyrets vægt på tidspunktet $x$ dage.

f(30) = $56 \cdot (1.02)^{30} + 240 = 341.436$

Hvis du skriver i hånden, skal der ikke parentes om 1,02 .

Dyrets vægt er 341 gram på tidspunktet 30 dage.

# 29. Udregn væksthastigheden når tidspunktet er kendt.

**Opgave**

Vægten af et dyr kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$$

hvor $x$ er dage og $f(x)$ er vægten i gram.

Bestem den hastighed hvormed dyrets vægt vokser på tidspunktet 30 dage.

**Besvarelse**

$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$ er dyrets vægt på tidspunktet $x$ dage.

f '(x) = $\frac{d}{dx}\left(56 \cdot (1.02)^x + 240\right) = 1.10895 \cdot (1.02)^x$ *udregnet af Nspire*

f '(30) = $1.10895 \cdot (1.02)^{30} = 2.00871$

Hvis du skriver i hånden, skal der ikke parentes om 1,02 .

På tidspunktet 30 dage vokser dyrets vægt med hastigheden 2,0 gram pr. dag .

## 30. Udregn tidspunktet når størrelsen er kendt.

**Opgave**

Vægten af et dyr kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$$

hvor $x$ er dage og $f(x)$ er vægten i gram.

Bestem det tidspunkt hvor dyrets vægt er 500 gram.

**Besvarelse**

$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$ er dyrets vægt på tidspunktet $x$ dage.

vægt = 500

$f(x) = 500$

$56 \cdot 1{,}02^x + 240 = 500$

solve(56·(1.02)^x+240=500,x) ▸ x=77.5316

Nspire løser ligning $56 \cdot 1{,}02^x + 240 = 500$ mht. $x$ og får $x = 77{,}5316$ .

Dyrets vægt er 500 gram på tidspunktet 78 dage.

## 31. Udregn tidspunktet når væksthastigheden er kendt.

**Opgave**

Vægten af et dyr kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$$

hvor $x$ er dage og $f(x)$ er vægten i gram.

Bestem det tidspunkt hvor dyrets vægt vokser med hastigheden 4 gram pr. dag.

**Besvarelse**

$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$ er dyrets vægt på tidspunktet $x$ dage.

f '(x) = $\frac{d}{dx}\left(56 \cdot (1.02)^x + 240\right) = 1.10895 \cdot (1.02)^x$ *udregnet af Nspire*

Hvis du skriver i hånden, skal der ikke parentes om 1,02 .

Vi får

hastighed = 4

$f'(x) = 4$ Se 2e.

$1{,}10895 \cdot 1{,}02^x = 4$

solve(1.10895·(1.02)^x=4,x) ▸ x=64.7834

Nspire løser ligningen $1{,}10895 \cdot 1{,}02^x = 4$ mht. $x$ og får $x = 64{,}7834$ .

På tidspunktet 65 dage vokser dyrets vægt med hastigheden 4 gram pr. dag.

## 32. Du skal ikke altid differentiere for at finde hastighed!

**Opgave** Et linjestykkes længde ændres sådan at $f(x) = x^2$ hvor $f(x)$ er længden på tidspunktet $x$ .

Hvor hurtigt ændres længden på tidspunktet 3 ?

**Besvarelse** $f(x)$ er længden på tidspunktet $x$ .

$f(x) = x^2$ . $f'(x) = 2x$ . $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$ . På tidspunktet 3 ændres længden med hastigheden 6 .

**Opgave** Et linjestykkes længde ændres sådan at $f(x) = x^2$ hvor $f(x)$ er den hastighed som længden ændres med på tidspunktet $x$ .

Hvor hurtigt ændres længden på tidspunktet 3 ?

**Besvarelse** $f(x)$ er den hastighed som længden ændres med på tidspunktet $x$ .

$f(x) = x^2$ . $f(3) = 3^2 = 9$ . På tidspunktet 3 ændres længden med hastigheden 9 .

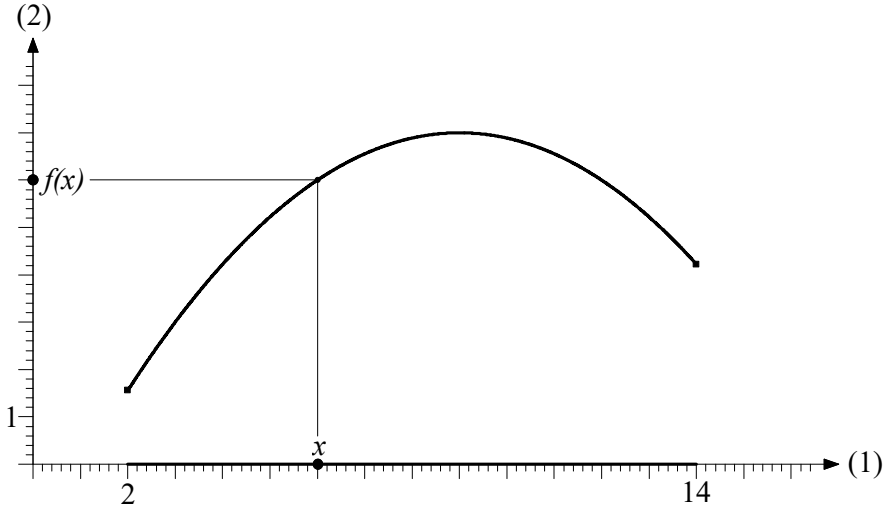
# Monotoni

## 33. Voksende og aftagende.

Figuren viser en interaktiv figur fra en computerskærm. Når vi trækker $x$-punktet hen på et tal $x$ kan vi aflæse funktionsværdien $f(x)$. På figuren kan vi se:

Når vi trækker $\boldsymbol{x}$ gennem tallene fra og med 2 til og med 9, vil $\boldsymbol{f(x)}$ hele tiden blive større.

Når vi trækker $\boldsymbol{x}$ gennem tallene fra og med 9 til og med 14, vil $\boldsymbol{f(x)}$ hele tiden blive mindre.




Som bekendt siger man: $f(x)$ er voksende i intervallet $2 \le x \le 9$

$f(x)$ er aftagende i intervallet $9 \le x \le 14$

Er $f(x)$ både aftagende og voksende i 9 ? Nej, vi taler ikke om at en funktion er voksende i ét tal. Vi taler om at en funktion er voksende i et interval. Der skal være mindst to $y$-værdier hvis vi skal kunne tale om at $y$ er blevet større eller mindre.

At $f(x)$ er voksende i intervallet $2 \le x \le 9$

betyder at når vi i intervallet vælger større og større $x$-værdi, så bliver $y$-værdien $f(x)$ større og større.

At $f(x)$ er aftagende i intervallet $9 \le x \le 14$

betyder at når vi i intervallet vælger større og større $x$-værdi, så bliver $y$-værdien $f(x)$ mindre og mindre.

## 34. Hvad er monotoniforhold?

I nogle opgaver står at vi skal bestemme monotoniforholdene for en funktion.

Det betyder at vi skal skrive

i hvilke $x$-intervaller funktionen aftager, og

i hvilke $x$-intervaller funktionen vokser.

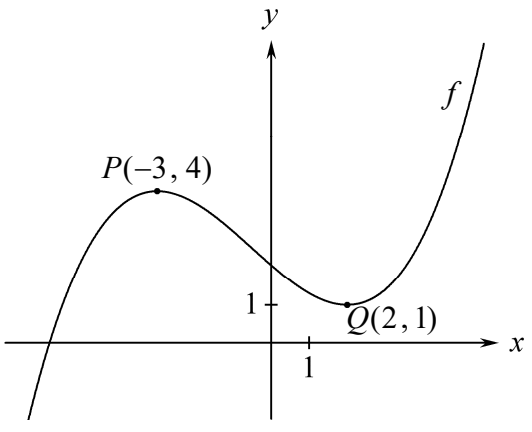
På figuren er vist grafen for et tredjegradspolynomium.

Monotoniforholdene kan vi skrive sådan:

$f(x)$ er voksende i intervallet $x \le -3$

$f(x)$ aftagende i intervallet $-3 \le x \le 2$

$f(x)$ voksende i intervallet $2 \le x$



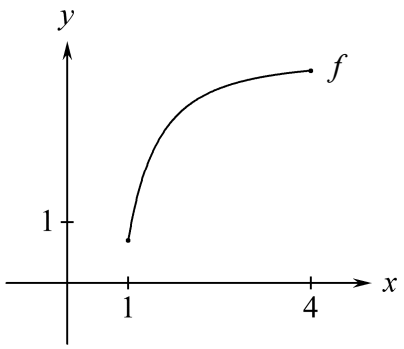
# 35. Regel for at finde monotoniforhold.

Hvis $f'(x)$ er positiv

$(*)$ tangenthældningen $f'(x)$ er positiv for hvert tal $x$ i intervallet $1 \le x \le 4$.

$(**)$ $f(x)$ er voksende i intervallet $1 \le x \le 4$.

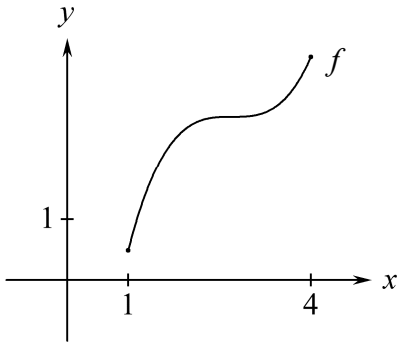
Hvis man prøver at tegne grafen sådan at $(*)$, men ikke $(**)$ gælder, så bliver man overbevist om at det ikke kan lade sig gøre. Man kan bevise at hvis $(*)$ gælder, så gælder $(**)$ også.




Hvis der er undtagelser fra at $f'(x)$ er positiv

Funktionen $f(x)$ på nederste figur er voksende selv om der er ét punkt hvori tangenthældningen er 0.

Selv om der er enkelte undtagelser fra $(*)$, kan man slutte at $(**)$ gælder.




**Sætning 35.1**

**Hvis** $f'(x)$ er positiv for alle $x$ i et interval, evt. med endeligt mange undtagelser,
**så** er $f(x)$ voksende i intervallet.

**Hvis** $f'(x)$ er negativ for alle $x$ i et interval, evt. med endeligt mange undtagelser,
**så** er $f(x)$ aftagende i intervallet.

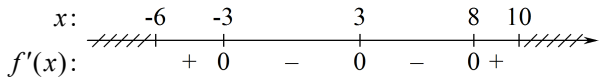
# 36. Tegn $f$-graf ud fra $f'$-fortegn m.m.

**Opgave**

Tegn for $-6 \le x \le 10$ en mulig graf for en funktion $f$ der opfylder at

$f(-3) = 6$ og $f(8) = -2$

og hvor fortegn og nulpunkter for $f'$ er som vist på tallinjen:



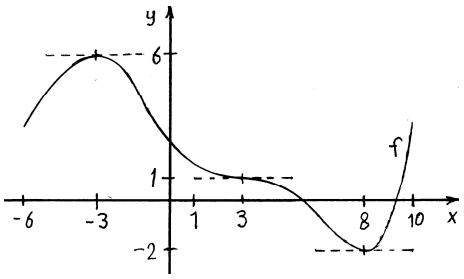

**Besvarelse**

Når $f(m) = n$, går $f$-grafen gennem punktet $(m,n)$.

$f$ er aftagende i $x$-intervaller hvor $f'(x)$ er negativ.

$f$ er voksende i $x$-intervaller hvor $f'(x)$ er positiv.

For de $x$-værdier hvor $f'(x)$ er $0$, har grafen vandret tangent.



# 37. Bestem monotoniforhold.

**Opgave**

Bestem monotoniforholdene for funktionen

$$f(x)=\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{7}{3}\ .$$

**Besvarelse 1**

$$f(x)=\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{7}{3}$$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\cdot x^4+\frac{2}{3}\cdot x^3+\frac{7}{3}\right)=x^3+2\cdot x^2 \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

$f'(x)$ kan kun skifte fortegn i de værdier af $x$ hvor $f'(x)=0$, dvs. hvor $x^3+2x^2=0$.

Nspire løser ligningen $x^3+2x^2=0$ mht. $x$ og får $x=-2$ eller $x=0$ :

$$\text{solve}\left(x^3+2\cdot x^2=0,x\right) \blacktriangleright x=-2 \text{ or } x=0$$

Disse to tal deler tallinjen op i tre intervaller. I hvert af disse vælger vi et tal og udregner $f'$ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f'(-3)=(-3)^3+2(-3)^2=-9$ | så | $f'(x)$ | negativ for $x<-2$ |
| $f'(-1)=(-1)^3+2(-1)^2=1$ | så | $f'(x)$ | positiv for $-2<x<0$ |
| $f'(1)=1^3+2\cdot 1^2=3$ | så | $f'(x)$ | positiv for $0<x$ |

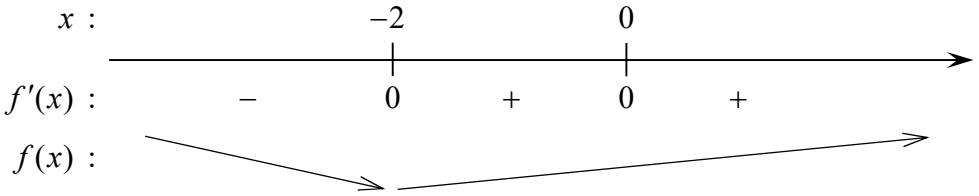
Af dette følger at monotoniforholdene er følgende:

$f(x)$ er aftagende i intervallet $x\le -2$

$f(x)$ er voksende i intervallet $-2\le x$

Husk at kontrollere at tallene der afgrænser intervallerne, er de tal du fik som løsning til $f'(x)=0$ .

Oversigt:




**Besvarelse 2**

$$f(x):=\frac{1}{4}\cdot x^4+\frac{2}{3}\cdot x^3+\frac{7}{3} \blacktriangleright \textit{Udført}$$

$$fm(x):=\frac{d}{dx}(f(x)) \blacktriangleright \textit{Udført} \qquad fm(x)=x^3+2\cdot x^2 \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

f'(x) kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor f'(x)=0.

Nspire løser ligningen f'(x)=0 mht. x og får $x=-2$ eller $x=0$:

$$\text{solve}(fm(x)=0,x) \blacktriangleright x=-2 \text{ or } x=0$$

De to tal −2 og 0 deler tallinjen op i tre intervaller.

I hvert af disse vælger vi et tal og udregner f':

| | | |
|---|---|---|
| $fm(-3)=-9$ | så | f'(x) er negativ for x<−2 |
| $fm(-1)=1$ | så | f'(x) er positiv for −2<x<0 |
| $fm(1)=3$ | så | f'(x) er positiv for 0<x |

Af dette følger at monotoniforholdene er følgende:

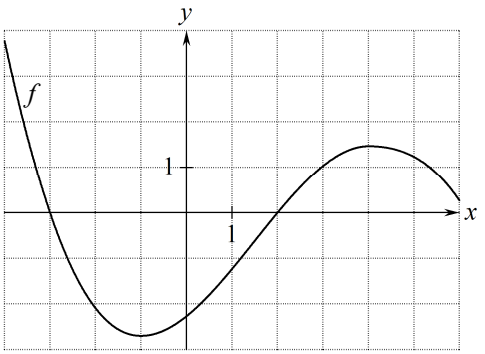
f(x) er aftagende i intervallet x≤−2 og f(x) er voksende i intervallet −2≤x

# 38. Bestem monotoniforhold for $f$ ud fra $f$-graf.

**Opgave**

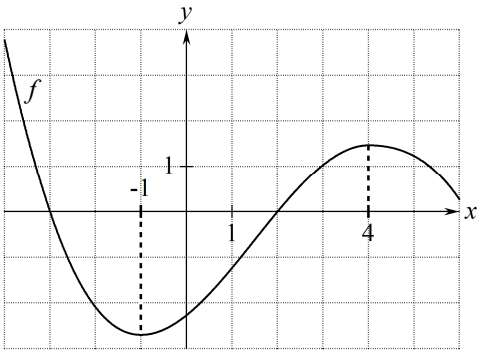
Figuren viser grafen for en funktion $f$.

Bestem monotoniforholdene for $f$ i intervallet $-4 \le x \le 6$.




**Besvarelse**

På figuren har vi vist hvordan vi aflæser at $x$-værdierne for de lokale ekstrema er $x = -1$ og $x = 4$.




På figuren ser vi at

$f$ er aftagende i intervallet $-4 \le x \le -1$

$f$ er voksende i intervallet $-1 \le x \le 4$

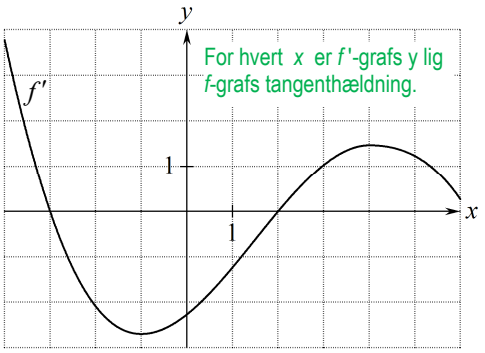
$f$ er aftagende i intervallet $4 \le x \le 6$

# 39. Bestem monotoniforhold for $f$ ud fra $f'$-graf.

**Opgave**

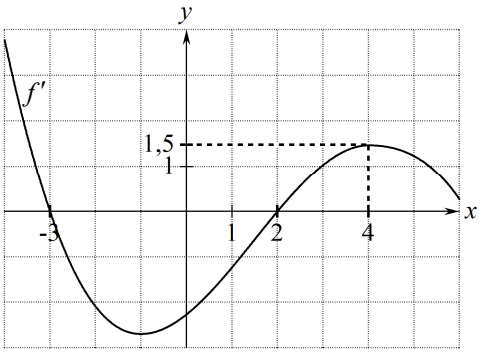
Figuren viser grafen for den afledede funktion $f'$ for en funktion $f$.

Bestem monotoniforholdene for $f$ i intervallet $-4 \le x \le 6$.




**Besvarelse**

På figuren har vi vist hvordan vi aflæser at $f'(4) = 1{,}5$.




På næsten samme måde kan vi aflæse $f'(x)$ for andre værdier af $x$ end 4. F.eks. ser vi at

$f'(x)$ er 0 når $x$ er $-3$ eller 2

og at

$f'(x)$ er positiv for $-4 < x < -3$

$f'(x)$ er negativ for $-3 < x < 2$

$f'(x)$ er positiv for $2 < x < 6$

Heraf følger at

$f$ er voksende i intervallet $-4 \le x \le -3$

$f$ er aftagende i intervallet $-3 \le x \le 2$

$f$ er voksende i intervallet $2 \le x \le 6$

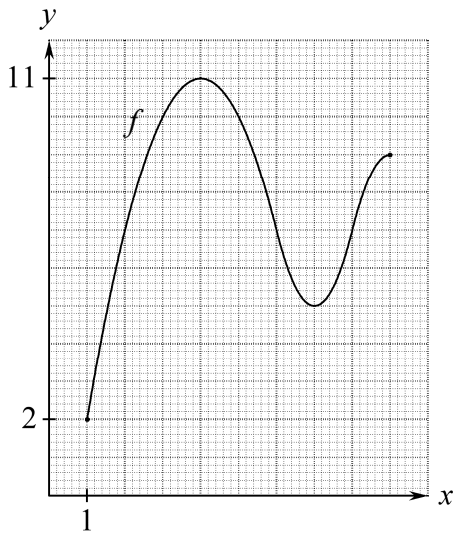
På $f$-graf er $f'(x)$ lig tangenthældning.

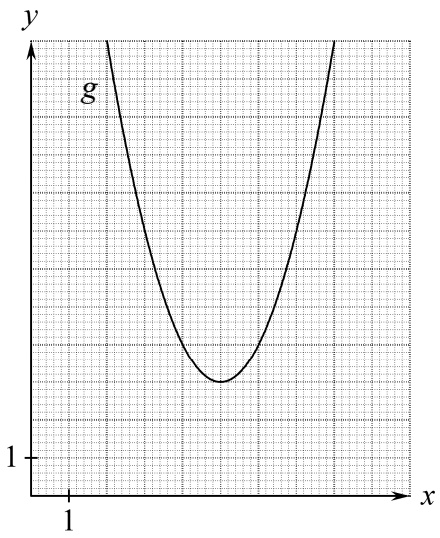
På $f'$-graf er $f'(x)$ lig $y$-koordinat.

På $f'$-graf er $(f')'(x)$ lig tangenthældning.

# Ekstrema

## 40. Maksimum og minimum.




Maksimum for $f$ er den største $y$-koordinat til et punkt på $f$-grafen. Vi ser at

maksimum for $f$ er 11.

Minimum for $f$ er den mindste $y$-koordinat til et punkt på $f$-grafen. Vi ser at

minimum for $f$ er 2.

---

Grafen for $g$ er en parabel hvor grenene går uendelig højt op.

Der er ikke noget punkt på grafen der har den største $y$-koordinat
da man altid kan afsætte et punkt højere oppe på grafen, så

funktionen $g$ har ikke noget maksimum.

---

Når vi skriver hvad maksimum eller minimum er,
så skriver vi normalt også hvad punktets $x$-koordinat er:

$f$ har maksimum for $x = 4$ og maksimum er $y = 11$

$f$ har minimum for $x = 1$ og minimum er $y = 2$

Undertiden er det skrevet kortere, f.eks:

$f$ har maksimum **i** 4 og maksimum **er** 11 .

$f$ har minimum **i** 1 og minimum **er** 2 .

---

Størsteværdi og mindsteværdi for en funktion er det samme som hhv. maksimum og minimum.

I nogle opgaver står at vi skal bestemme ekstrema. Dette betyder at vi skal finde maksimum hvis der er et maksimum, og minimum hvis der er et minimum.

Ekstremum er en fællesbetegnelse for maksimum og minimum. Ordet ekstremum hedder i flertal ekstremummer eller ekstrema. Det er den sidste form der bruges i eksamensopgaver.

# 41. Bestem med $f'(x)$ den værdi af $x$ hvor $y$ er størst.

**Opgave** Højden af en figur er givet ved $f(x) = 86 - x^2 - \frac{16}{x}$ , $\frac{1}{5} < x < 9$ ,

hvor $x$ er figurens bredde, og $f(x)$ er figurens højde.

Bestem bredden så højden bliver størst mulig.

---

**Besvarelse 1** $f(x) = 86 - x^2 - \frac{16}{x}$ , $\frac{1}{5} < x < 9$ , hvor figurs bredde og højde er $x$ og $f(x)$.

Vi bestemmer monotoniforholdene for $f$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(86 - x^2 - \frac{16}{x}\right) = \frac{16}{x^2} - 2 \cdot x$$ *udregnet af Nspire*

$f'(x)$ kan kun skifte fortegn i de værdier af $x$ hvor $f'(x) = 0$, dvs. hvor $\frac{16}{x^2} - 2x = 0$.

Nspire løser ligningen $x^3 + 2x^2 = 0$ mht. $x$ for $\frac{1}{5} < x < 9$ og får $x = -2$:

$$\text{solve}\left(\frac{16}{x^2} - 2 \cdot x = 0, x\right) \left| \frac{1}{5} < x < 9 \right. \blacktriangleright x = 2$$

Vi udregner $f'(x)$ i en $x$-værdi på hver side af 2:

$f'(1) = \frac{16}{1^2} - 2 \cdot 1 = 14$ så $f'(x)$ er positiv for $\frac{1}{5} < x < 2$

$f'(4) = \frac{16}{4^2} - 2 \cdot 4 = -7$ så $f'(x)$ er negativ for $2 < x < 9$ .

Heraf slutter vi følgende monotoniforhold:

$f$ er voksende i intervallet $\frac{1}{5} < x \le 2$ og $f$ er aftagende i intervallet $2 \le x < 9$ .

Vi bestemmer bredden så højden er størst mulig:

Af monotoniforholdene følger: $f(x)$ er størst mulig når $x = 2$, dvs.

Højden bliver størst mulig når bredden er $\underline{\underline{2}}$ .

---

**Besvarelse 2** Vi bestemmer monotoniforholdene for $f$:

$$f(x) := 86 - x^2 - \frac{16}{x} \blacktriangleright \textit{Udført} \qquad \frac{1}{5} < x < 9$$

$$fm(x) := \frac{d}{dx}(f(x)) \blacktriangleright \textit{Udført} \qquad fm(x) = \frac{16}{x^2} - 2 \cdot x$$ *udregnet af Nspire*

f'(x) kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor f'(x)=0.

Nspire løser ligningen f'(x)=0 mht. x og får $x = 2$ :

$$\text{solve}(fm(x) = 0, x) \blacktriangleright x = 2$$

Vi udregner f '(x) i en x−værdi på hver side af 2:

$fm(1) = 14$ så f '(x) er positiv for $\frac{1}{5} < x < 2$

$fm(4) = -7$ så f '(x) er negativ for $2 < x < 9$

Heraf slutter vi følgende monotoniforhold:

f er voksende i intervallet $\frac{1}{5} < x \le 2$ og f er aftagende i intervallet $2 \le x < 9$

Vi bestemmer bredden så højden er størst mulig:

Af monotoniforholdene følger: f(x) er størst mulig når x=2, dvs.

Højden bliver størst mulig når bredden er 2 .

# 42. Bestem med $f'(x)$ den største værdi af $y$.

**Opgave** Højden af en figur er givet ved $f(x) = 86 - x^2 - \frac{16}{x}$ , $\frac{1}{5} < x < 9$ ,

hvor $x$ er figurens bredde, og $f(x)$ er figurens højde.
Bestem den størst mulige højde.

---

**Besvarelse 1** $f(x) = 86 - x^2 - \frac{16}{x}$ , $\frac{1}{5} < x < 9$ , hvor figurs bredde og højde er $x$ og $f(x)$.

Vi bestemmer monotoniforholdene for $f$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(86 - x^2 - \frac{16}{x}\right) = \frac{16}{x^2} - 2 \cdot x \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

$f'(x)$ kan kun skifte fortegn i de værdier af $x$ hvor $f'(x) = 0$, dvs. hvor $\frac{16}{x^2} - 2x = 0$.

Nspire løser ligningen $x^3 + 2x^2 = 0$ mht. $x$ for $\frac{1}{5} < x < 9$ og får $x = -2$:

$$\text{solve}\left(\frac{16}{x^2} - 2 \cdot x = 0, x\right) \left| \frac{1}{5} < x < 9 \right. \blacktriangleright x = 2$$

Vi udregner $f'(x)$ i en $x$-værdi på hver side af 2:

$f'(1) = \frac{16}{1^2} - 2 \cdot 1 = 14$ så $f'(x)$ er positiv for $\frac{1}{5} < x < 2$

$f'(4) = \frac{16}{4^2} - 2 \cdot 4 = -7$ så $f'(x)$ er negativ for $2 < x < 9$ .

Heraf slutter vi følgende monotoniforhold:

$f$ er voksende i intervallet $\frac{1}{5} < x \le 2$ og $f$ er aftagende i intervallet $2 \le x < 9$ .

Vi bestemmer den størst mulige højde:

Af monotoniforholdene følger: $f(x)$ er størst mulig når $x = 2$. $f(2) = 86 - 2^2 - \frac{16}{2} = 74$

Den størst mulige højde er $\underline{\underline{74}}$ .

---

**Besvarelse 2** Vi bestemmer monotoniforholdene for f:

$$f(x) := 86 - x^2 - \frac{16}{x} \blacktriangleright \textit{Udført} \qquad \frac{1}{5} < x < 9$$

$$fm(x) := \frac{d}{dx}(f(x)) \blacktriangleright \textit{Udført} \qquad fm(x) = \frac{16}{x^2} - 2 \cdot x \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

f'(x) kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor f'(x)=0.

Nspire løser ligningen f'(x)=0 mht. x og får $x=2$ :

$$\text{solve}(fm(x) = 0, x) \blacktriangleright x = 2$$

Vi udregner f '(x) i en x−værdi på hver side af 2:

$fm(1) = 14$ så f '(x) er positiv for $\frac{1}{5} < x < 2$

$fm(4) = -7$ så f '(x) er negativ for $2 < x < 9$

Heraf slutter vi følgende monotoniforhold:

f er voksende i intervallet $\frac{1}{5} < x \le 2$ og f er aftagende i intervallet $2 \le x < 9$

Vi bestemmer den størst mulige højde:

Af monotoniforholdene følger: f(x) er størst mulig når x=2. $f(2) = 74$

Den størst mulige højde er 74 .

## 43. Bestem med $f'(x)$ den værdi af $x$ hvor $y$ er mindst.

Dette gøres som vist i ramme 41 bortset fra at monotoniforholdene nu er aftagende-voksende i stedet for voksende-aftagende, og at vi nu skriver mindst i stedet for størst.

## 44. Bestem med $f'(x)$ den mindste værdi af $y$ .

Dette gøres som vist i ramme 42 bortset fra at monotoniforholdene nu er aftagende-voksende i stedet for voksende-aftagende, og at vi nu skriver mindst i stedet for størst.

## 45. Bestem ekstrema.

Når der står "Bestem ekstrema", så skal vi bestemme minimum hvis der er et minimum, og vi skal bestemme maksimum hvis der er et maksimum. Se ramme 42 og 44.

## 46. Gør rede for at funktionen har et minimum (eller maksimum).

**Opgave**

Gør rede for at funktionen

$$f(x) = x^3 - 9x + 12 \quad , \quad x > 0$$

har et minimum.

**Metode**

Vi bestemmer monotoniforhold for $f(x)$ med metoden fra ramme 37. Herefter skriver vi:

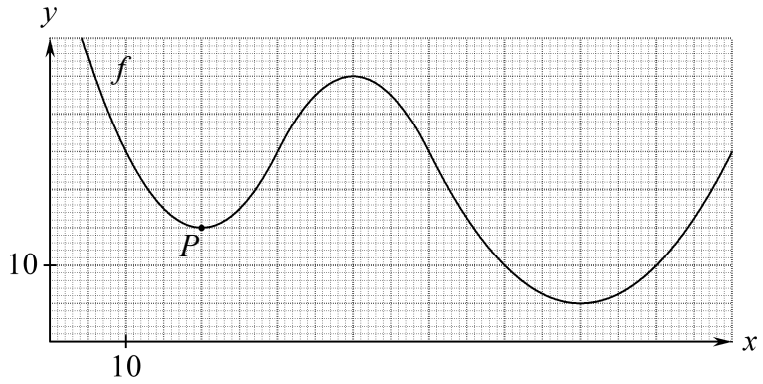
Da $f(x)$ er

aftagende i intervallet $0 < x \le \sqrt{3}$ og voksende i intervallet $\sqrt{3} \le x$

kan vi slutte at

$f(x)$ har minimum for $x = \sqrt{3}$ .

# 47. Lokalt maksimum og minimum.




Figuren viser grafen for en funktion $f$. I de to ender fortsætter grafen uendelig højt op.

$P$ er grafpunktet med $x$-koordinat 20 og $y$-koordinat 15.

Vi kan vælge et stykke af grafen omkring $P$ sådan at 15 er mindste $y$-koordinat på dette stykke. Vi siger derfor at

$f$ har lokalt minimum for $x = 20$ og det lokale minimum er $y = 15$.

15 er ikke minimum da der andre steder på grafen er $y$-koordinater som er mindre.

---

Hvis $Q(x_o, y_o)$ er et punkt på grafen for en funktion, og vi kan vælge et stykke af grafen omkring $Q$ sådan at $y_o$ er mindste $y$-koordinat på dette stykke, så siger vi at

funktionen har lokalt minimum for $x = x_o$ og det lokale minimum er $y = y_o$

Hvis $Q(x_o, y_o)$ er et punkt på grafen for en funktion, og vi kan vælge et stykke af grafen omkring $Q$ sådan at $y_o$ er største $y$-koordinat på dette stykke, så siger vi at

funktionen har lokalt maksimum for $x = x_o$ og det lokale maksimum er $y = y_o$

---

Om funktionen fra figuren ovenfor gælder:

$f$ har lokalt minimum for $x = 20$ og det lokale minimum er $y = 15$.

$f$ har lokalt maksimum for $x = 40$ og det lokale maksimum er $y = 35$.

$f$ har lokalt minimum for $x = 70$ og det lokale minimum er $y = 5$.

$f$ har minimum for $x = 70$ og minimum er $y = 5$.

Undertiden er det skrevet kortere, f.eks:

$f$ har minimum **i** 70 og minimum **er** 5.

$f$ har lokalt maksimum **i** 40 og det lokale maksimum **er** 35.

---

I nogle opgaver står at vi skal bestemme lokale ekstrema. Dette betyder at vi skal finde både de lokale minimummer og de lokale maksimummer.

Ordet ekstremum hedder i flertal ekstremummer eller ekstrema. Det er den sidste form der bruges i eksamensopgaver.

# 48. Bestem lokale ekstrema.

**Opgave** Bestem de lokale ekstrema for funktionen $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-18x-90$ .

**Besvarelse 1** $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-18x-90$

Vi bestemmer monotoniforholdene for $f$:

$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{3}{2}\cdot x^2-18\cdot x-90\right)=x^2+3\cdot x-18$ *udregnet af Nspire*

$f'(x)$ kan kun skifte fortegn i de værdier af $x$ hvor $f'(x)=0$, dvs. hvor $x^2+3x-18=0$.

Nspire løser ligningen $x^2+3x-18=0$ mht. $x$ og får $x=-6$ eller $x=3$.

$\text{solve}\left(x^2+3\cdot x-18=0,x\right)$ ▸ $x=-6$ or $x=3$

–6 og 3 deler tallinjen op i tre intervaller. I hvert af disse vælger vi et tal og udregner $f'$:

Da $f'(-7)=(-7)^2+3(-7)-18=10$ er $f'(x)$ positiv for $x<-6$

Da $f'(0)=0^2+3\cdot0-18=-18$ er $f'(x)$ negativ for $-6<x<3$

Da $f'(4)=4^2+3\cdot4-18=10$ er $f'(x)$ positiv for $3<x$

Af dette følger at monotoniforholdene er følgende:

$f(x)$ er voksende i intervallet $x\le-6$,
aftagende i intervallet $-6\le x\le3$ og
voksende i intervallet $3\le x$.

| $x$: | | $-6$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$: | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$: | voks | | aft | | voks |

Vi bestemmer de lokale ekstrema: Af monotoniforholdene følger:

der er lokalt maksimum for $x=-6$ og lokalt minimum for $x=3$.

$f(-6)=\frac{1}{3}(-6)^3+\frac{3}{2}(-6)^2-18(-6)-90=0$

$f(3)=\frac{1}{3}\cdot3^3+\frac{3}{2}\cdot3^2-18\cdot3-90=-\frac{243}{2}$

$f(x)$ har lokalt maksimum for $x=-6$ og det lokale maksimum er $y=0$

$f(x)$ har lokalt minimum for $x=3$ og det lokale minimum er $y=-\frac{243}{2}$

**Besvarelse 2**

**Vi bestemmer monotoniforholdene for f:**

$f(x):=\frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{3}{2}\cdot x^2-18\cdot x-90$ ▸ *Udført* $fm(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Udført* $fm(x)=x^2+3\cdot x-18$ *udregnet af Ns*

f '(x) kan skifte fortegn i de x hvor f '(x)=0. Nspire løser ligningen f '(x)=0 mht. x og får $x=-6$ eller $x=3$:

$\text{solve}(fm(x)=0,x)$ ▸ $x=-6$ or $x=3$

–6 og 3 deler tallinjen op i tre intervaller. I hvert af disse vælger vi et tal og udregner f ':

$fm(-7)=10$ så f '(x) er positiv for x<–6

$fm(0)=-18$ så f '(x) er negativ for –6<x<3

$fm(4)=10$ så f '(x) er positiv for 3<x

Af dette følger at monotoniforholdene er følgende:

f(x) er voksende i intervallet x≤–6, aftagende i intervallet –6≤x≤3 og voksende i intervallet 3≤x .

**Vi bestemmer lokale ekstrema:**

Af monotoniforhold følger: der er lokalt maksimum for x = –6 og lokalt minimum for x = 3 .

$f(-6)=0$ og $f(3)=\frac{-243}{2}$

f(x) har lokalt maksimum for x = –6 og det lokale maksimum er y = 0 .

f(x) har lokalt minimum for x = 3 og det lokale minimum er $y=\frac{-243}{2}$ .

# 49. Bestem for hver værdi af $a$ antal løsninger til $f(x) = a$ .

**Opgave**

$$f(x) = -\tfrac{3}{32}x^4 + \tfrac{1}{8}x^3 + \tfrac{9}{8}x^2$$

(a) Undersøg $f$ mht. lokale ekstrema.

(b) Bestem for hver værdi af $a$ antal løsninger til ligningen $f(x) = a$ .

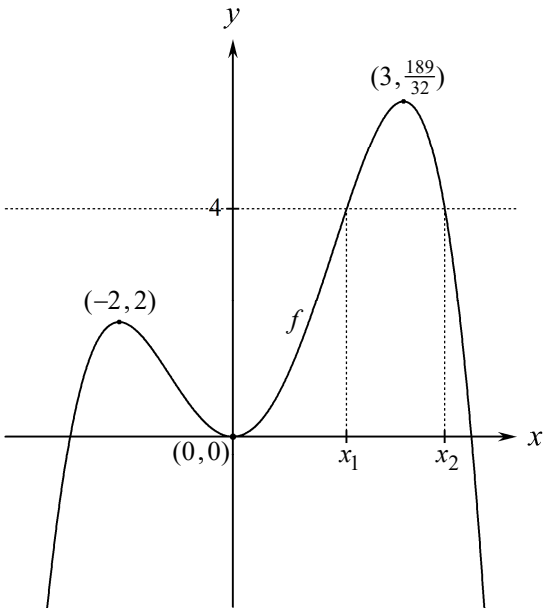
**Besvarelse af (b)**

Af undersøgelsen i (a) følger at grafen for $f$ er som vist på skitsen.

På skitsen har vi vist hvordan vi ser at hvis $a = 4$ , har $f(x) = a$ to løsninger $x_1$ og $x_2$ .

På næsten samme måde ser vi:

| | |
|---|---|
| $a < 0$ : | 0 løsninger |
| $a = 0$ : | 3 løsninger |
| $0 < a < 2$ : | 4 løsninger |
| $a = 2$ : | 3 løsninger |
| $2 < a < \frac{189}{32}$ : | 2 løsninger |
| $a = \frac{189}{32}$ : | 1 løsning |
| $\frac{189}{32} < a$ : | 0 løsninger |



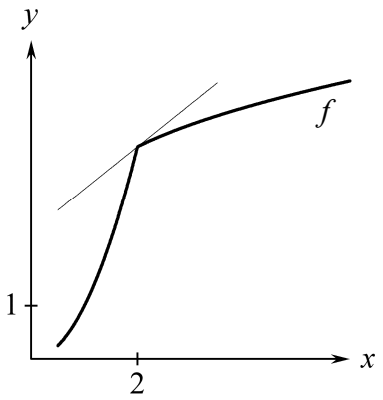
# Beviser

## 50. Differentiabel.

Grafen for $f$ har et knæk i punktet med $x$-koordinat 2.
Derfor har grafen ikke nogen tangent i dette punkt.
(Tangenten er en linje der følger grafen nær punktet).

Funktionen $f$ har ikke nogen differentialkvotient i 2, for differentialkvotienten er tangentens hældningskoefficient, og der er ikke nogen tangent.

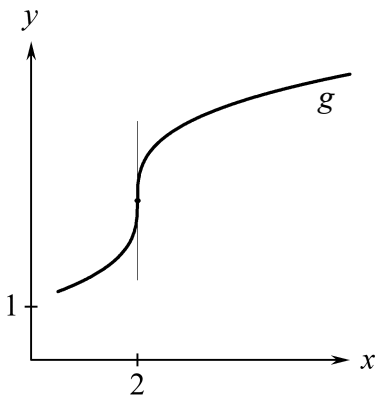
Der gælder altså at $f'(2)$ ikke eksisterer.




Grafen for $g$ har en lodret tangent i punktet med $x$-koordinat 2.
En lodret linje har ikke nogen hældningskoefficient.

Funktionen $g$ har ikke nogen differentialkvotient i 2, for differentialkvotienten er tangentens hældningskoefficient, og tangenten har ikke nogen hældningskoefficient.

Der gælder altså at $g'(2)$ ikke eksisterer.




**Definition 50.1**

Man siger at en funktion er differentiabel i et tal $x_o$
hvis funktionen har en differentialkvotient i $x_o$
dvs. hvis $f'(x_o)$ eksisterer.

# 51. Grænseværdi. Kontinuert.

**51a** $u(x)$ og $v(x)$ står for to regneudtryk. Når vi indsætter tal for $x$, så vil der om resultaterne gælde:

For $u$: Når det indsatte tal er nær 7, vil resultatet være nær **5**.
Når det indsatte tal er 7, vil resultatet være lig **5**.

| $x$: | 7,5 | 7,2 | 7,04 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $u(x)$: | 5,25 | 5,04 | 5,0016 | 5 |

For $v$: Når det indsatte tal er nær 7, vil resultatet være nær **5**.
Når det indsatte tal er 7, vil resultatet være lig **3**.

| $x$: | 7,5 | 7,2 | 7,04 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $v(x)$: | 5,25 | 5,04 | 5,0016 | 3 |

De resultater vi får når vi indsætter tal i regneudtrykket, kaldes **funktionsværdier** (grønne tal).
Det tal som resultaterne (funktionsværdierne) er nær, kaldes **grænseværdi** (rødt tal).

**Det røde tal er bestemt uden at bruge funktionsværdien af 7. Vi har kun brugt $x$-værdier nær 7 !!!**

For $u$: Funktionsværdi i 7 = grænseværdi for $x$ gående mod 7. Så siger vi: $u$ er **kontinuert** i 7.
For $v$: Funktionsværdi i 7 ≠ grænseværdi for $x$ gående mod 7. Så siger vi: $v$ er ikke **kontinuert** i 7.

Dette kan skrives med symboler:

$$\lim_{x\to 7} u(x) = 5 \quad \text{og} \quad u(7) = 5 \qquad\qquad \lim_{x\to 7} v(x) = 5 \quad \text{og} \quad v(7) = 3$$

Symbolet $\lim_{x\to 7} u(x)$ læses "grænseværdi for $x$ gående mod 7 af $u(x)$"

---

**51b** Hvis et regneudtryk $u(x)$ er opbygget af sædvanlige symboler (ikke lim), så gælder:
Regneudtrykket er kontinuert i ethvert tal $x$ hvor det er defineret (dvs. i $x$-værdier hvor det kan udregnes)

---

**51c** Udtrykket $u = \dfrac{3x^2-6x}{x-2}$ kan vi ikke regne ud for $x=2$ da nævneren bliver 0.
Vi kan udregne $u$ for værdier af $x$ som er tæt på 2 :

| $x$ | 1,98 | 1,999 | 2 | 2,001 | 2,02 |
|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | 5,94 | 5,997 | | 6,003 | 6,06 |

Ved at vælge værdien af $x$ tilstrækkelig tæt på 2 kan vi få værdien af $u$ så tæt det skal være på 6 .

Vi siger: **grænseværdien for $x$ gående mod 2 af $u$** er lig 6

Med symboler skriver vi dette sådan: $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2-6x}{x-2} = 6$

---

**51d** Vi kan regne os frem til denne grænseværdi ved at bruge følgende metode: Vi faktoriserer brøkens tæller og forkorter brøken. Så får vi et udtryk som vi kan udregne når $x$ er 2:

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-6x}{x-2} = \lim_{x\to 2} 3x \qquad \text{da} \quad \frac{3x^2-6x}{x-2} = \frac{3x(x-2)}{x-2} = 3x \quad \text{for} \quad x \neq 2$$

$$= 3\cdot 2 \qquad \text{da } 3x \text{ er kontinuert i } x=2 \quad \text{se 63b .}$$

$$= 6$$

---

**51e** $\lim_{x\to x_o} (k \cdot udtryk) = k \cdot \lim_{x\to x_o} udtryk$ når $k$ er en kontant

**51f** $\lim_{x\to x_o} (udtryk1 + udtryk2) = \lim_{x\to x_o} udtryk1 + \lim_{x\to x_o} udtryk2$

---

**51g** Udregning af grænseværdi med Nspire.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \quad \textit{udregnet af Nspire}$$

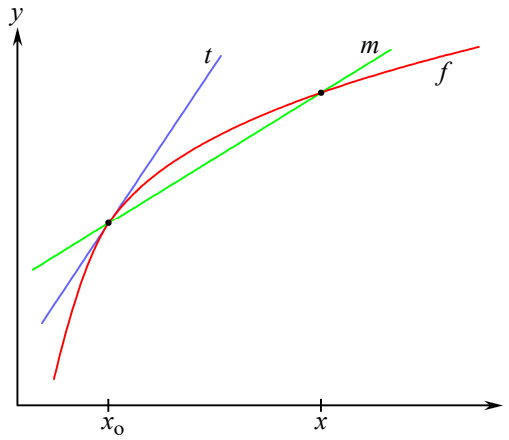
På Nspire kan vi vælge grænseværdi-skabelonen på skabelonpaletten.
Skabelonen ser sådan ud: $\lim_{\square\to\square} (\square)$ Vi behøver ikke skrive noget i det tredje felt.

# 52. Vi kan finde en differentialkvotient ved at udregne en grænseværdi.

Hvis $f$ er differentiabel i $x_o$, så gælder

**52.1** $$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

**Begrundelse for 52.1:**




$t$ er tangent til $f$-grafen.

$f'(x_o)$ = $t$'s hældk. Dette er definitionen på differentialkvotient.

Vi tegner en linje $m$ der skærer $f$-grafen i punkterne med $x$-koordinater $x_o$ og $x$. $y$-koordinater til disse punkter er $f(x_o)$ og $f(x)$. Så

$$m\text{'s hældk.} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$ ifølge formlen $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Når $x$ nærmer sig til $x_o$
vil $m$'s hældk. nærme sig til $t$'s hældk., så

$$t\text{'s hældk.} = \lim_{x \to x_o} (m\text{'s hældk.}) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Vi har nu indset at både venstre og højre side i ligningen i 64.1 er lig $t$'s hældk., så ligningen gælder.

## 53. Udledning af formlen for at differentiere $x^2$.

Når $f(x) = x^2$ er

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \quad \text{ifølge 52.1}$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{x^2 - {x_o}^2}{x - x_o}$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{(x + x_o) \cdot (x - x_o)}{x - x_o} \quad \text{ifølge en af kvadratsætningerne}$$

$$= \lim_{x \to x_o} (x + x_o) \quad \text{vi har forkortet med } x - x_o$$

$$= x_o + x_o \quad \text{ifølge metoden fra 51d}$$

$$= 2x_o$$

Vi har nu fundet frem til følgende:

**53.1:** $\left(x^2\right)' = 2x$

## 54. Udledning af formlen for at differentiere *udtryk plus udtryk* .

Når $f(x) = g(x) + h(x)$ er

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \quad \text{ifølge 52.1}$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{\big(g(x) + h(x)\big) - \big(g(x_o) + h(x_o)\big)}{x - x_o}$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{\big(g(x) - g(x_o)\big) + \big(h(x) - h(x_o)\big)}{x - x_o}$$

$$= \lim_{x \to x_o} \left( \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} + \frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} \right)$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} + \lim_{x \to x_o} \frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} \quad \text{ifølge 51f}$$

$$= g'(x_o) + h'(x_o) \quad \text{ifølge 52.1}$$

Vi har nu fundet frem til følgende:

**54.1:** $\big(g(x) + h(x)\big)' = g'(x) + h'(x)$

# Stikordsregister

aftagende ..... 15, 16
differentiabel ..... 26
differentialkvotient ..... 1, 3, 28
differentialkvotient på graf ..... 5
differentialkvotient, udledning ..... 29
differentialkvotients forskrift ..... 3
differentialkvotients fortolkning ..... 2
differentiationsregler ..... 3
ekstrema ..... 19, 22
ekstremum ..... 19
fortolkning af differentialkvotient ..... 2
funktionsværdi ..... 1
funktionsværdi på graf ..... 5
graf ..... 16
grænseværdi ..... 27, 28
hældningskoefficient ..... 8, 12, 13, 26
lokale ekstrema ..... 23, 24
lokalt maksimum ..... 23, 24
lokalt minimum ..... 23, 24
løs ligning ud fra graf ..... 6
løsninger, antal ..... 25
maksimum ..... 19, 22
mindsteværdi ..... 19, 22
minimum ..... 19, 22
monotoniforhold ..... 15, 16, 17, 18
Nspire ..... 3, 8, 9, 10, 14, 17, 21, 24, 27
røringspunkt ..... 1, 2, 10
størsteværdi ..... 19, 20, 21
tangent ..... 1, 8, 11, 26
tangent, vinkel ..... 4
tangenthældning ..... 9, 10
vinkel og tangent ..... 4
voksende ..... 15, 16
vækshastighed ..... 11, 12, 13, 14