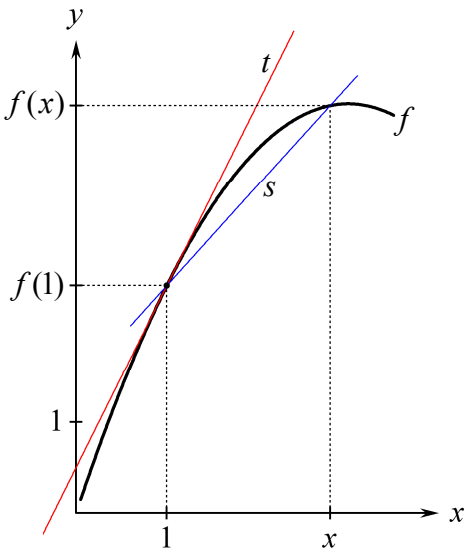
Differential-regning

for gymnasiet og hf



2010 Karsten Juul

1. Grundlæggende typer af opgaver med grafer 1
2. Regel om tilvækster for lineære sammenhænge 2
3. Sådan kan vi finde hældningskoefficienten ud fra lineær graf 3
4. Hvad er en tangent? 3
5. Differentialkvotient 4
6. Hvornår er en x-tilvækst lille? 5
7. Marginalomkostninger 5
8. Væksthastighed 6
9. Formel for y 7
10. Formel for y' (tangenthældning, væksthastighed) 7
11. Udregne y-koordinat og tangenthældning. Finde ligning for tangent 8
12. Forskelle der ikke kan ses på grafen 9
13. Udregne mængde og væksthastighed 10
14. Differentialkvotient af x^n 10
15. Differentialkvotient af k og x m.m. 11
16. Differentialkvotient af *konstant gange udtryk* 11
17. Differentialkvotient af udtryk med flere led 12
18. Skrivemåden $h(t)$, $y(x)$ osv. 12
19. Nogle typer af opgaver med tangenthældning 13
20. Nogle typer af opgaver med væksthastighed 14
21. Kontinuert 15
22. Voksende og aftagende 16
23. Hvad er monotoniforhold? 17
24. Regel for at finde monotoniforhold 17
25. Typisk opgave med monotoniforhold 18
26. Maksimum og minimum 19
27. Lokalt maksimum og minimum 20
28. Typisk opgave med lokale ekstrema 21
29. Gør rede for at funktionen har et minimum (eller maksimum) 22
30. Flere typer opgaver med maksimum eller minimum 22
31. Differentiabel 23
32. Grænseværdi 24
33. Vi kan finde en differentialkvotient ved at udregne en grænseværdi 25
34. Udledning af formlen for at differentiere x^2 26
35. Udledning af formlen for at differentiere sum 26
36. Differentialkvotient af e^{kx} og $\ln(x)$ 27
37. Differentialkvotient af *udtryk gange udtryk* 27
38. Opdeling af en sammensat funktion i en indre og en ydre funktion 28
39. Metode til at differentiere en sammensat funktion 28

Nyere hæfter:

http://mat1.dk/differentialregning_for_gymnasiet_og_hf_udg2.pdf **14/8-11**

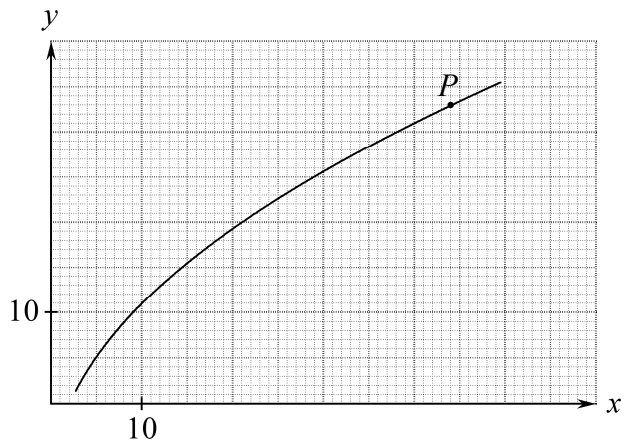
http://mat1.dk/oevelser_til_haeftet_differentialregning_for_gymnasiet_og_hf_udg2.pdf **16/8-11**

Differentialregning for gymnasiet og hf © 2010 Karsten Juul
Dette hæfte kan downloades fra

www.mat1.dk

Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til kj@mat1.dk som dels oplyser at dette hæfte benyttes, dels oplyser om hold, lærer og skole.

1. Grundlæggende typer af opgaver med grafer



I koordinatsystemet er tegnet en del af grafen for sammenhængen mellem to variable x og y.

Type 1.1: Hvad er y når x er 9?

Metode: Vi går til 9 på vandret akse, går lodret op til graf og vandret ind på lodret akse, og ser at vi er endt ved 10.

Konklusion: y er $\underline{\underline{10}}$ når x er 9 .

Type 1.2: Hvad fortæller grafpunktet P om sammenhængen mellem x og y?

Metode: Fra P går vi lodret ned på vandret akse og ser at vi ender ved 44. Fra P går vi vandret indpå lodret akse og ser at vi ender ved 33.

Konklusion: Grafpunktet P fortæller at når x er 44 så er y lig 33.

Type 1.3: Tegn det grafpunkt der giver følgende oplysning: Når x er 53, er y lig 37.

Metode: Vi går til 53 på vandret akse, og går lodret op til vi er vandret ud for 37 på den lodrette akse, og tegner et punkt Q her.

Konklusion: Det tegnede punkt Q er det grafpunkt der fortæller at når x er 53, er y lig 37.

Type 1.4: Vi starter med $x = 24$ og giver x en tilvækst på 12. Hvilken tilvækst får y ?

Metode: $24 + 12 = 36$. Vi aflæser at når x er 24 er y lig 22, og at når x er 36 er y lig 29. Vi udregner "sidste y-værdi minus første": $29 - 22 = 7$.

Konklusion: y får tilvæksten $\underline{\underline{7}}$ når vi starter med $x = 24$ og giver x en tilvækst på 12.

Type 1.5: Når vi starter med $x = 53$ og giver x en tilvækst på 7 så får y tilvæksten 3. Brug dette til at tegne endnu et grafpunkt.

Metode: Når x er 53 er y lig 37 (se 1.3). $53 + 7 = 60$ og $37 + 3 = 40$. Fra 60 på vandret akse går vi lodret op til vi er ud for 40 på lodret akse, og her tegner vi punktet R.

Konklusion: Det tegnede punkt R er det søgte grafpunkt.

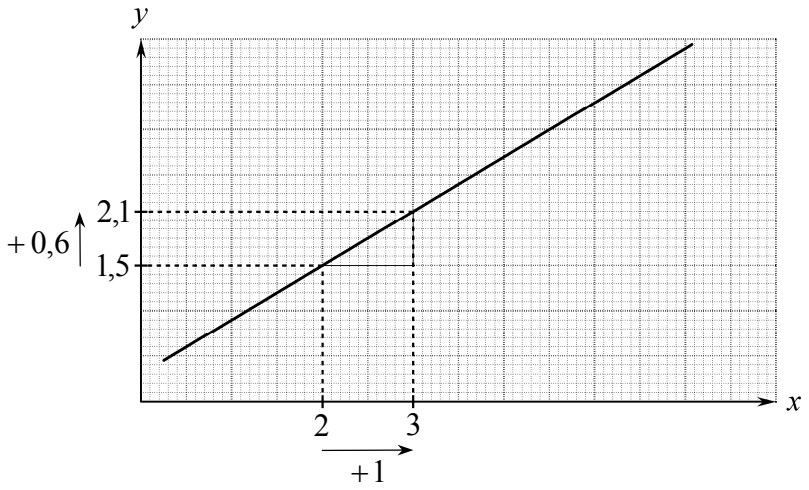
2. Regel om tilvækster for lineære sammenhænge

I koordinatsystemet er tegnet grafen for en lineær sammenhæng mellem to variable x og y.

Ved at aflæse på grafen ser vi:

Når vi giver x tilvæksten 1
så får y tilvæksten 0,6 .

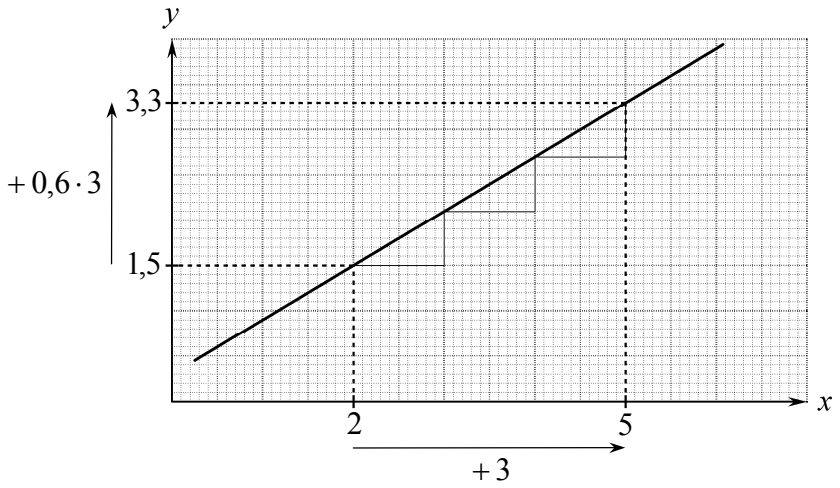
(Se 1.4).
Hældningskoefficienten er 0,6 ifølge Definition 2.1 .



Når vi giver x tilvæksten 3
så får y tilvæksten

$0{,}6 \cdot 3 = 1{,}8$

(Dette ser vi ud fra figuren eller ved at bruge Sætning 2.2)



Når vi giver x tilvæksten 0,5
så får y tilvæksten

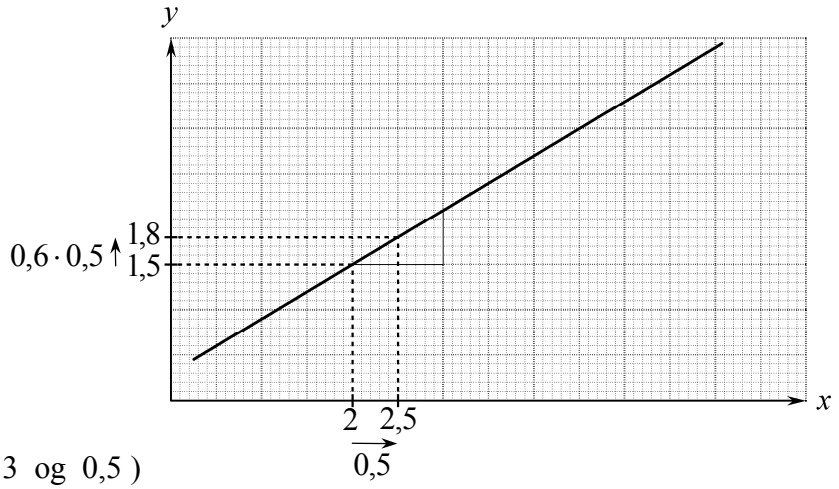
$0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3$

(Dette ser vi ud fra figuren eller ved at bruge Sætning 2.2)

Når vi giver x tilvæksten h
så får y tilvæksten

$0{,}6 \cdot h$

(I eksemplerne ovenfor er h hhv. 3 og 0,5)



Definition 2.1

Vi ser på en lineær sammenhæng mellem to variable x og y hvor y er på den lodrette akse.
Hældningskoefficienten a er den tilvækst som y får når x får tilvæksten 1 .

Sætning 2.2

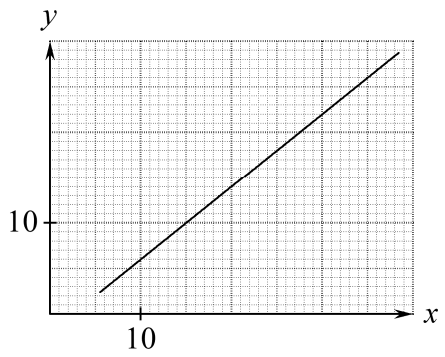
Vi ser på en lineær sammenhæng mellem to variable x og y hvor y er på den lodrette akse.
Hældningskoefficienten betegner vi med a . For enhver x-tilvækst er

y-tilvækst $= a \cdot x$-tilvækst

3. Sådan kan vi finde hældningskoefficienten ud fra lineær graf

Type 3.1: Den lineære graf viser sammenhængen mellem to variable x og y.

Hvor mange enheder bliver y større når vi gør x én enhed større?



Metode: Vi aflæser på grafen at

Når $x = 10$ er $y = 6$

Når $x = 30$ er $y = 22$

Vi udregner

y-tilvækst $= 22 - 6 = 16$

x-tilvækst $= 30 - 10 = 20$

Når x-tilvæksten er 1, må y-tilvæksten være en tyvendedel af 16:

$$\frac{22-6}{30-10} = \frac{16}{20} = 0{,}8$$

Konklusion: y bliver $\underline{\underline{0{,}8}}$ enheder større hver gang vi gør x én enhed større

dvs. hældningskoefficienten er $0{,}8$.

4. Hvad er en tangent?

Definition 4.1

Når P er et punkt på en graf gælder:

Tangenten i P er den rette linje gennem P som følger grafen nær P.

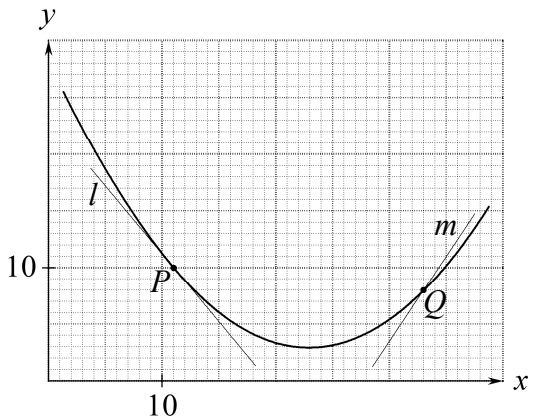
Eksempel 4.2

l er tangent til grafen i P.

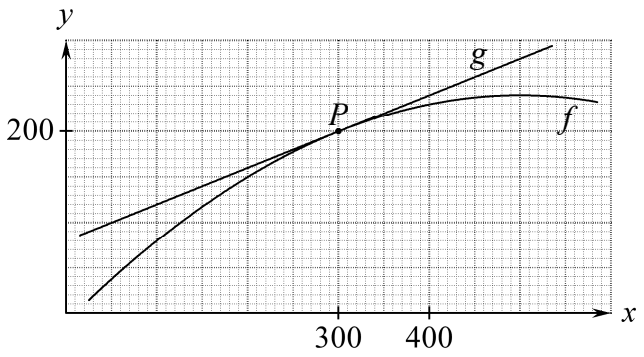
m er ikke tangenten til grafen i Q.

Tangenten i Q er den linje gennem Q der følger grafen nær Q. Denne linje er ikke tegnet på figuren.

I ethvert punkt på den viste graf kan vi tegne en tangent.



5. Differentialkvotient



I koordinatsystemet er tegnet graferne for to sammenhænge f og g.
Ud fra grafen finder vi ud af at g-grafen har hældningskoefficient 0,4 .
Grafen for g er <u>tangent</u> til grafen for f i punktet P.

Vi starter med $x = 300$. Når vi giver x en tilvækst på 100 er

for g: y-tilvækst $= 0{,}4 \cdot 100 = 40$
for f: y-tilvækst $= 230 - 200 = 30$

Vi starter med $x = 300$. Når vi giver x en tilvækst på 1 er

for g: y-tilvækst $= 0{,}400$
for f: y-tilvækst $= 0{,}399$ (aflæst på en skærm hvor det kan gøres nøjagtigt)

Vi ser at for f er y-tilvæksten ca. lig y-tilvæksten for g, dvs. ca. 0,4 gange x-tilvæksten.

Når $x = 300$ gælder for små x-tilvækster at

for f: y-tilvækst $\approx 0{,}4 \cdot x$-tilvækst

Vi kalder 0,4 for <u>differentialkvotienten</u> for f i 300 .

<u>Definition 5.1</u>

Vi ser på en sammenhæng mellem to variable x og y, og x_o er en bestemt x-værdi.

Ved <u>differentialkvotienten</u> i x_o

forstår vi hældningskoefficienten for tangenten i grafpunktet med x-koordinat x_o.

Differentialkvotienten betegnes med y' som læses "y-mærke".

<u>Sætning 5.2</u>

Vi ser på en sammenhæng mellem to variable x og y. Hvis $y' = a$ når $x = x_0$ gælder:
Når $x = x_0$ og vi giver x en lille tilvækst, er

y-tilvækst $\approx a \cdot x$-tilvækst

I eksemplet ovenfor gælder:

Når $x = 300$ er $y' = 0{,}4$

Når $x = 300$ og vi giver x en lille tilvækst, så kan vi udregne y-tilvæksten sådan:

y-tilvækst $\approx 0{,}4 \cdot x$-tilvækst

6. Hvornår er en x-tilvækst lille?

Den rette linje er tangent til f-grafen i punktet med x-koordinat 2 .

Linjens hældningskoefficient er 0,3 så hvis vi starter med $x = 2$ og giver x en <u>lille tilvækst</u>, kan vi udregne y-tilvæksten sådan:

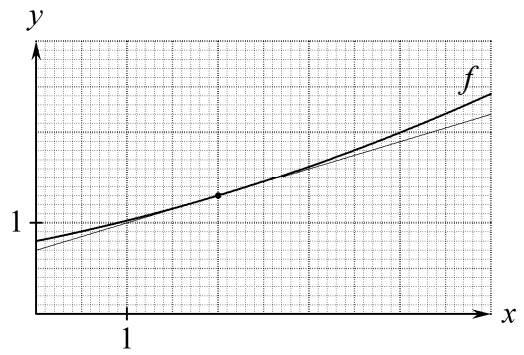
$$(*) \qquad y\text{-tilvækst} \approx 0{,}3 \cdot x\text{-tilvækst}$$

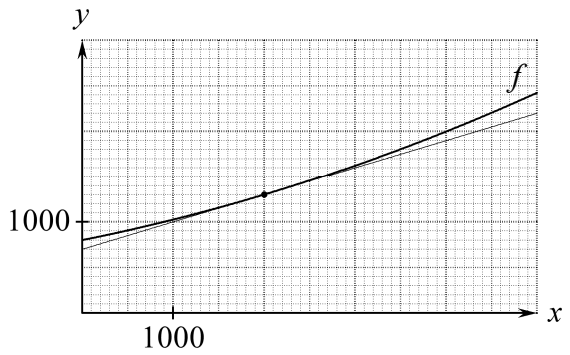
Denne ligning passer hvis x-tilvæksten er så lille at vi ikke kommer uden for den del af f-grafen som er næsten sammenfaldende med tangenten.

På den øverste figur er x-tilvæksten 0,1 lille.

På den nederste figur er x-tilvæksten 100 lille.

Hvis graferne stammer fra anvendelser hvor nøjagtigheden er lille, vil vi måske bruge ligningen $(*)$ selv om x-tilvæksten er væsentlig større. Måske ville vi bruge $(*)$ selv om x-tilvæksten var 2 på øverste figur og 2000 på nederste.





7. Marginalomkostninger

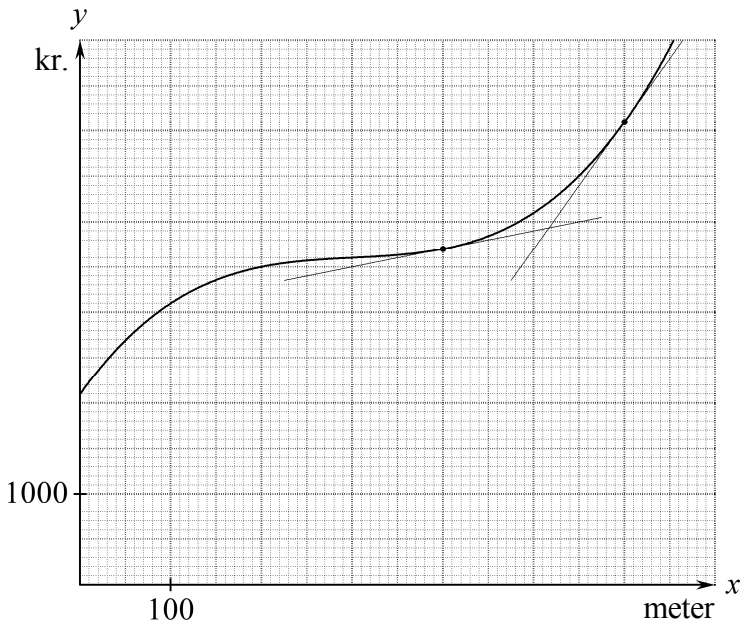
Grafen viser sammenhængen mellem følgende to variable:

x = antal meter der fremstilles
y = omkostninger i kr.

Når $x = 400$ er $y' = 2$ dvs. hvis vi fremstiller 1 meter mere vil omkostningerne blive 2 kr. større.

Når $x = 600$ er $y' = 14$ dvs. hvis vi fremstiller 1 meter mere vil omkostningerne blive 14 kr. større.

Vi sælger hver meter for 12 kr., så hvis vi fremstiller 400 meter kan det betale sig at fremstille flere, og hvis vi fremstiller 600 meter, kan det ikke betale sig.



Omkostningerne ved at fremstille 1 enhed mere kaldes <u>marginalomkostningerne</u>.
Når vi fremstiller 400 meter er marginalomkostningerne 2 kr.
Når vi fremstiller 600 meter er marginalomkostningerne 14 kr.
Ovenfor argumenterede vi ved hjælp af disse marginalomkostningerne. Dette kaldes marginalbetragtninger. Marginalbetragtninger bruges også i forbindelse med andet end omkostninger.

8. Væksthastighed

Den krumme kurve er graf for sammenhængen mellem følgende to variable:

x = antal dage efter at vi begyndte at måle

y = plantens højde i mm

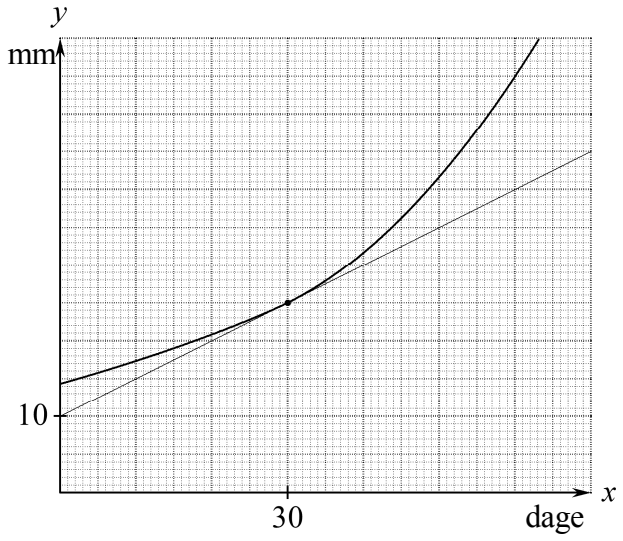
Vi ser at

når $x = 30$ er $y' = 0{,}5$

Omkring tidspunktet 30 dage vil plantens højde altså blive ca. 0,5 mm højere på en dag.

Vi siger at

30 dage efter at vi begyndte at måle er <u>væksthastigheden</u> lig 0,5 mm pr. dag.



I et lille tidsum på x-aksen er grafen næsten sammenfaldende med den tegnede tangent.
Det er i dette tidsrum at væksthastigheden er ca. 0,5 mm pr. dag.

Den krumme kurve er graf for sammenhængen mellem følgende to variable:

x = antal måneder efter at vi begyndte at måle

y = plantens højde i mm

Vi ser at

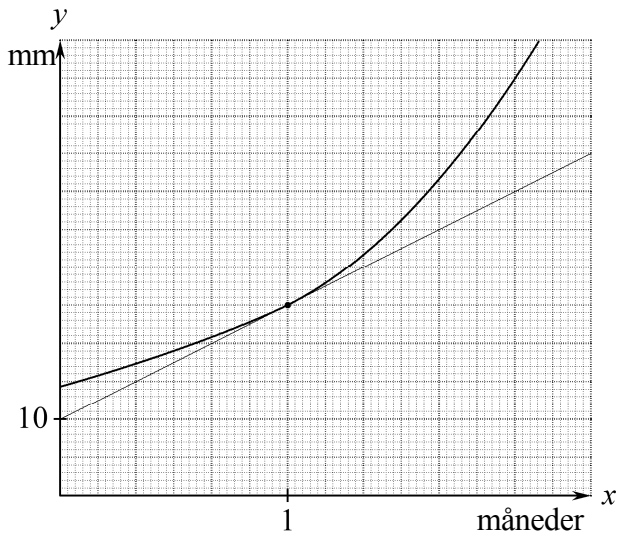
når $x = 1$ er $y' = 15$

så

1 måned efter at vi begyndte at måle er væksthastigheden lig 15 mm pr. måned.

Dette betyder IKKE at planten i den næste måned vokser 15 mm.

På grafen ser vi at det kun er en lille del af en måned at væksthastigheden er ca. 15 mm pr. måned.



9. Formel for y

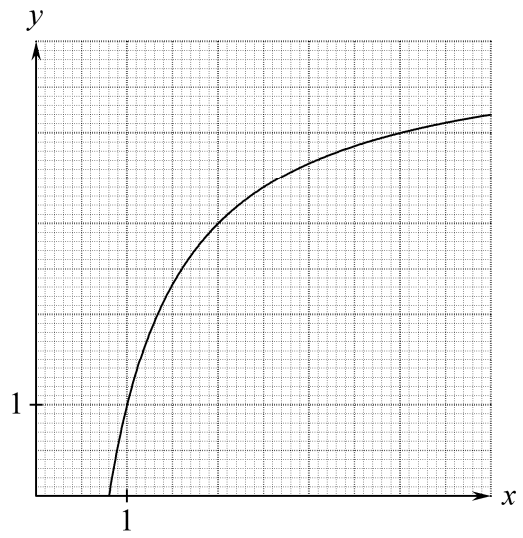
Om en sammenhæng mellem x og y gælder at hvis vi kender værdien af x, så kan vi udregne y sådan:

(∗) Divider 4 med værdien af x og træk resultatet fra 5.

Denne regel kan vi skrive som følgende formel:

(∗) $y = 5 - \frac{4}{x}$

I koordinatsystemet er tegnet grafen for denne sammenhæng.



På grafen aflæser vi at

når $x = 2{,}6$ så er $y = \underline{\underline{\text{ca. } 3{,}45}}$

Ved at bruge reglen (∗) får vi at

når $x = 2{,}6$ så er $y = 5 - \frac{4}{2{,}6} = \underline{\underline{3{,}46154}}$

På grafen ser vi:

Hvis værdien af x er mellem 3 og 4, så er værdien af y større end 3,5

Heraf slutter vi:

Hvis vi bruger reglen (∗) på en x-værdi mellem 3 og 4, så er resultatet større end 3,5.

Dette er et (tilfældigt) eksempel på følgende:

Vi kan bruge vores viden om grafen til sige noget om ligningen for sammenhængen.

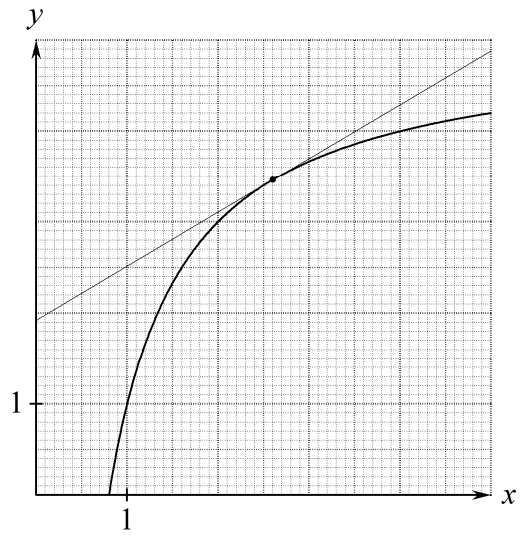
10. Formel for y' (tangenthældning, væksthastighed)

For sammenhængen fra ramme 9 gælder at hvis vi kender værdien af x, så kan vi udregne y' sådan:

(∗∗) Gang værdien af x med sig selv og divider resultatet op i 4.

Denne regel kan vi skrive som følgende formel:

(∗∗) $y' = \frac{4}{x^2}$



På grafen aflæser vi at

når $x = 2{,}6$ så er $y' = \underline{\underline{\text{ca. } 0{,}60}}$

Ved at bruge reglen (∗∗) får vi at

når $x = 2{,}6$ så er $y' = \frac{4}{2{,}6^2} = \underline{\underline{0{,}591716}}$

11. Udregne y-koordinat og tangenthældning
Finde ligning for tangent

Følgende ligning viser en sammenhæng mellem x og y:

$$y = \frac{x+1}{x+2}$$

Opgaverne type 11.1-11.3 drejer sig om grafen for denne sammenhæng.

Vi får lommeregneren (eller matematikprogrammet) til at differentiere denne sammenhæng mht. x. Resultatet er

$$y' = \frac{1}{(x+2)^2}$$

Sådan blev der tastet på TI-Nspire CAS:

Symbolet $\frac{d}{dx}$ må IKKE skrives ved hjælp af en brøkstreg. Brug i stedet skabelonen $\frac{d}{d\square}(\square)$. Vi kan vælge denne på skabelonpaletten eller få den frem ved at taste (menu) og vælge 4:Calculus 1:Differentialkvotient.

Type 11.1: Hvad er y-koordinaten til grafpunktet med x-koordinat $-1{,}5$?

Metode: Når $x = -1{,}5$ er $y = \frac{-1{,}5+1}{-1{,}5+2} = -1$

Konklusion: Grafpunktet med x-koordinat $-1{,}5$ har y-koordinaten $\underline{\underline{-1}}$

Type 11.2: Hvad er tangenthældningen i grafpunktet med x-koordinat $-1{,}5$?

Metode: Når $x = -1{,}5$ er $y' = \frac{1}{(-1{,}5+2)^2} = 4$

Konklusion: I grafpunktet med x-koordinat $-1{,}5$ er tangenthældningen $\underline{\underline{4}}$

Type 11.3: Find ligningen for tangenten til grafen i grafpunktet med x-koordinat $-1{,}5$

Metode: Fra type 11.1 og 11.2 ved vi at tangenten er en linje som går gennem punktet $(x_1, y_1) = (-1{,}5, -1)$ og har hældningskoefficienten $a = 4$. Disse tal indsætter vi i formlen for linjens ligning

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

og får

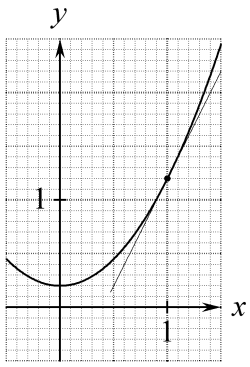
$$y = 4 \cdot \big(x - (-1{,}5)\big) + (-1)$$

som vi omskriver til

$$y = 4x + 5$$

Konklusion: Tangenten til grafen i grafpunktet med x-koordinat $-1{,}5$ har ligningen $\underline{\underline{y = 4x+5}}$

12. Forskelle der ikke kan ses på grafen



I koordinatsystemet er tegnet grafen for sammenhængen

$$y = x^2 + 0{,}2$$

Vi differentierer og får

$$y' = 2x$$

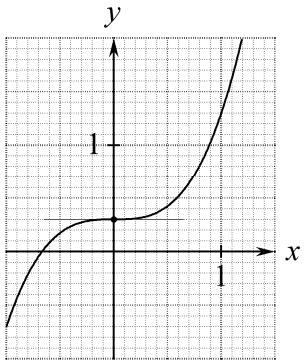
Ved at bruge denne formel får vi at

når	$x = 1$	er	$y' = 2 \cdot 1$	$= 2$	
når	$x = 1{,}05$	er	$y' = 2 \cdot 1{,}05$	$= 2{,}1$	

Her har vi fundet ud af at

i grafpunktet med x-koordinat	1	er tangenthældningen	2
i grafpunktet med x-koordinat	1,05	er tangenthældningen	2,1

<u>På grafen ser det ud som om tangenthældningen er den samme i de to punkter, men der er altså en lille forskel.</u>



I koordinatsystemet er tegnet grafen for sammenhængen

$$y = x^3 + 0{,}3$$

Vi differentierer og får

$$y' = 3x^2$$

Ved at bruge denne formel får vi at

når	$x = 0$	er	$y' = 3 \cdot 0^2$	$= 0$	
når	$x = 0{,}05$	er	$y' = 3 \cdot 0{,}05^2$	$= 0{,}0075$	

Her har vi fundet ud af at

i grafpunktet med x-koordinat	0	er tangenthældningen	0
i grafpunktet med x-koordinat	0,05	er tangenthældningen	0,0075

<u>På grafen ser det ud som om tangenthældningen er den samme i de to punkter, men der er altså en lille forskel.</u>

Vi udregner y-koordinaterne til de to punkter:

når	$x = 0$	er	$y = 0^3 + 0{,}3$	$= 0{,}3$	
når	$x = 0{,}05$	er	$y = 0{,}05^3 + 0{,}3$	$= 0{,}300125$	

<u>På grafen ser det ud som om de to punkter har samme y-koordinat, men der er altså en lille forskel.</u>

13. Udregne mængde og væksthastighed

I et show er

$$y = \frac{500}{1+499\,e^{-0,1x}}$$

hvor y er antallet af ramte balloner, og x er antal minutter efter showets start.

<u>Type 13.1:</u> Hvor mange balloner er ramt 50 minutter efter showets start?

<u>Metode:</u> Når $x = 50$ er $y = \dfrac{500}{1+499\,e^{-0,1\cdot 50}} = 114,62$

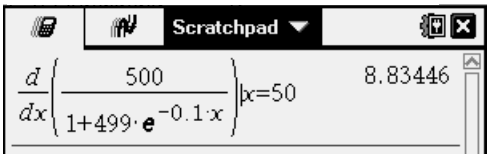
<u>Konklusion:</u> 50 minutter efter showets start er $\underline{\underline{115}}$ balloner ramt.

<u>Type 13.2:</u> Hvor hurtigt vokser antallet af ramte balloner 50 minutter efter showets start?

<u>Metode:</u> Vi får lommeregneren til at udregne værdien af y' for $x = 50$ og får $8,83446$.

<u>Konklusion:</u> 50 minutter efter showets start vokser antallet af ramte balloner med hastigheden $\underline{\underline{8,8}}$ balloner pr. minut.

Sådan blev der tastet på TI-Nspire CAS:



14. Differentialkvotient af x^n

Der gælder følgende:

differentialkvotienten af x^3 er $3\cdot x^2$

differentialkvotienten af x^4 er $4\cdot x^3$

differentialkvotienten af x^5 er $5\cdot x^4$

osv.

Der gælder altså:

differentialkvotienten af x^n er $n\cdot x^{n-1}$

Denne regel kan vi skrive $\underline{\underline{\left(x^n\right)' = n\cdot x^{n-1}}}$

<u>Advarsel:</u> Reglen dur ikke når x er i eksponenten:

$\left(a^x\right)'$ er IKKE lig $x\cdot a^{x-1}$

Hvis vi sætter $n = 2$ får vi $\left(x^2\right)' = 2\cdot x^{2-1}$

Reglen for at differentiere x i n'te

Da $x^{2-1} = x^1 = x$ er $\underline{\underline{\left(x^2\right)' = 2\cdot x}}$

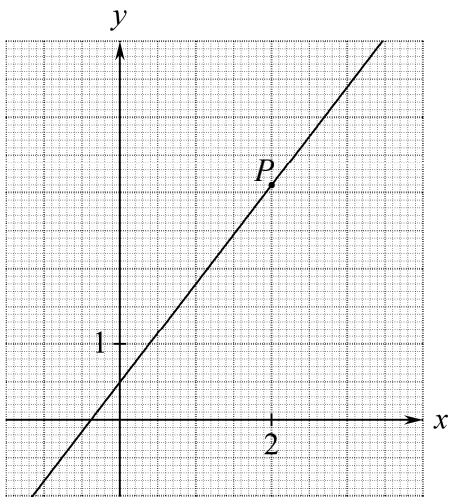
15. Differentialkvotient af k og x m.m.

Figuren viser grafen for sammenhængen

$$y = 1{,}3 \cdot x + 0{,}5$$

Tangenten til denne graf i punktet P er en ret linje der er sammenfaldende med grafen.

Tangentens hældningskoefficient er altså 1,3
så differentialkvotienten i 2 er 1,3 .



Det er klart at der gælder:

<u>Differentialkvotienten for en lineær sammenhæng</u>
<u>er lig den lineære sammenhængs hældningskoefficient.</u>

Grafen for sammenhængen $y = 3$ består af de punkter hvis y-koordinat er 3 .
Grafen er altså en linje med hældningskoefficient 0, så differentialkvotienten er 0.

Det er klart at der gælder:

Differentialkvotienten af en konstant k er 0 .

Denne regel kan vi skrive $\underline{\underline{k' = 0}}$ ← Reglen for at differentiere en konstant

---

Grafen for sammenhængen $y = x$ består af de punkter hvor x-koordinaten er lig y-koordinaten.
Grafen er altså en linje med hældningskoefficient 1, så differentialkvotienten er 1.

Denne regel kan vi skrive $\underline{\underline{x' = 1}}$ ← Reglen for at differentiere x

16. Differentialkvotient af *konstant gange udtryk*

Der gælder:

$$(3 \cdot udtryk)' = 3 \cdot (udtryk)'$$
$$(4 \cdot udtryk)' = 4 \cdot (udtryk)'$$
$$(2{,}6 \cdot udtryk)' = 2{,}6 \cdot (udtryk)'$$

osv.

En konstant k gange et udtryk differentierer vi ved at differentiere udtrykket og beholde konstanten:

$$\underline{\underline{(k \cdot udtryk)' = k \cdot (udtryk)'}}$$ ← Reglen for at differentiere *konstant gange udtryk*

<u>Eksempel:</u>

$$\left(4 \cdot x^3\right)' = 4 \cdot \left(x^3\right)' = 4 \cdot 3 \cdot x^2 = \underline{\underline{12x^2}}$$

Reglen for at differentiere *konstant gange udtryk* ↑ ↑ Reglen for at differentiere x i n'te

17. Differentialkvotient af udtryk med flere led

Et udtryk der består af flere led differentierer vi ved at differentiere hvert led.

Reglen for at differentiere udtryk med flere led

Det er + og − der adskiller led.

Udtrykket $6+3\cdot x-x^2$ består af de tre led 6 $3\cdot x$ x^2

$$\left(6+3\cdot x-x^2\right)' = 6'+\left(3\cdot x\right)'-\left(x^2\right)' = 0+3\cdot x'-2x = 0+3\cdot 1-2x = \underline{\underline{3-2x}}$$

Reglen for at differentiere udtryk med flere led

Reglen for at differentiere konstant

Reglen for at differentiere *konstant gange udtryk*

Reglen for at differentiere x i n 'te

Reglen for at differentiere x

18. Skrivemåden $h(t)$, $y(x)$ osv.

Vi vil forklare skrivemåden ved hjælp af følgende eksempel:

h = højden af en plante (i cm)

t = antal uger efter udplantningen

Hvis h er variablen på den lodrette akse, kan vi bruge følgende skrivemåder:

$h(3)$	er	højden efter 3 uger
$h(3)$	er	y-koordinaten til grafpunktet med x-koordinat 3
$h'(3)$	er	højdens væksthastighed efter 3 uger
$h'(3)$	er	tangenthældningen i grafpunktet med x-koordinat 3
$h(t)=15$	t er	et tidspunkt hvor højden er 15 cm
$h(t)=15$	t er	x-koordinaten til et grafpunkt hvor y-koordinaten er 15
$h'(t)=0{,}56$	t er	et tidspunkt hvor højdens væksthastighed er 0,56 cm pr. uge
$h'(t)=0{,}56$	t er	x-koordinaten til et grafpunkt hvor tangenthældningen er 0,56

Ligning for sammenhængen mellem h og t :

$$h = 7{,}2\cdot 1{,}047^t$$

Forskrift for funktionen h :

$$h(t) = 7{,}2\cdot 1{,}047^t$$

Denne forskrift kan vi fx bruge til at udregne højden efter 3 uger:

$$h(3) = 7{,}2\cdot 1{,}047^3 = 8{,}26366$$

dvs. efter 3 uger er højden $\underline{\underline{8{,}3\,\text{cm}}}$

19. Nogle typer af opgaver med tangenthældning

En funktion f har forskriften

$$f(x) = x^2 + x$$

Vi differentierer denne forskrift og får

$$f'(x) = 2x + 1$$

Type 19.1: Hvad er hældningskoefficienten for tangenten i grafpunktet med x-koordinat 2 ?

Metode: $f'(2) = 2^2 + 2 = 6$

Konklusion: Hældningskoefficienten for tangenten i grafpunktet med x-koordinat 2 er $\underline{\underline{6}}$

Type 19.2: Tangenten i et grafpunkt P har hældningskoefficient 4.
Hvad er x-koordinaten til P ?

Metode: Hvis x_o er x-koordinaten til P

er $f'(x_o) = 4$

dvs. $2 \cdot x_o + 1 = 4$

så $x_o = 1{,}5$

Konklusion: x-koordinaten til P er $\underline{\underline{1{,}5}}$

En funktion g har forskriften

$$g(x) = \tfrac{1}{3} \cdot x^3 + 3 \cdot x$$

Vi differentierer denne forskrift og får

$$g'(x) = x^2 + 3$$

Type 19.3: Er der et punkt på grafen så tangenten i dette punkt har hældningskoefficienten 2 ?

Metode: Hvis x_o er x-koordinaten til et grafpunkt med tangenthældningen 2

er $g'(x_o) = 2$

dvs. $x_o^2 + 3 = 2$

så $x_o^2 = -1$

Dette er ikke opfyldt for noget tal x_o da et tal i anden aldrig er negativt.

Konklusion: Der er ikke et punkt på grafen så tangenten i dette punkt har hældningskoefficienten 2

20. Nogle typer af opgaver med væksthastighed

Væksten af en plante kan beskrives ved

$$M(t) = 1{,}28 \cdot 1{,}16^t$$

hvor t er tiden angivet i uger, og $M(t)$ er vægten angivet i gram.

Lommeregneren differentierer denne forskrift og får

$$M'(t) = 0{,}189978 \cdot 1{,}16^t$$

Sådan blev der tastet på TI-Nspire CAS:

Define $m(t)=1.28\cdot(1.16)^t$	*Udført*
Define $dm(t)=\frac{d}{dt}(m(t))$	*Udført*
$dm(t)$	$0.189978\cdot(1.16)^t$
$dm(15)$	1.76024
solve$(dm(t)=7,t)$	t=24.301
$dm(20)$	3.69711

<u>Type 20.1:</u> Hvad er vægtens væksthastigheden på tidspunktet 15 uger?

<u>Metode:</u> Lommeregneren udregner $M'(15) = 1{,}76024$

<u>Konklusion:</u> På tidspunktet 15 uger er vægtens væksthastighed <u>1,76 gram pr. uge</u>

<u>Type 20.2:</u> Hvornår er vægtens væksthastighed 7 gram pr. uge?

<u>Metode:</u> Når t_o er et tidspunkt hvor væksthastigheden er 7, så er

$$M'(t_o) = 7$$

Lommeregneren løser denne ligning mht. t_o og får $t_o = 24{,}301$

<u>Konklusion:</u> Vægtens væksthastighed er 7 gram pr. uge på tidspunktet <u>24,3 uger</u>

<u>Type 20.3:</u> Udregn $M'(20)$ og skriv hvad dette tal fortæller om vægten.

<u>Metode:</u> Lommeregneren udregner $M'(20) = 3{,}69712$

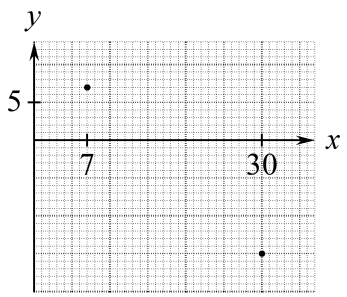
Når x er tiden, gælder for en funktion $f(x)$:

På tidspunktet x_o er væksthastigheden for $f(x)$ lig $f'(x_o)$

<u>Konklusion:</u> $M'(20) = \underline{\underline{3{,}70}}$ dvs.

På tidspunktet 20 uger er væksthastigheden for vægten lig 3,70 gram pr. uge

21. Kontinuert

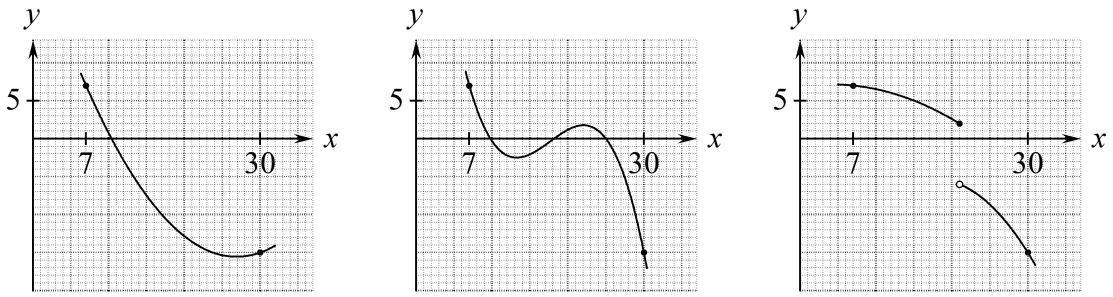


I koordinatsystemet til højre er tegnet to af punkterne på grafen for en funktion $f(x)$.

Hvis grafen er en sammenhængende kurve, må den skære x-aksen: Der må være et tal x_o mellem 7 og 30 så $f(x_o) = 0$.

Nedenfor er tegnet to eksempler på sammenhængende grafer der går gennem de to punkter.

For funktionen $f(x)$ nedenfor til højre er der ikke noget tal x_o mellem 7 og 30 så $f(x_o) = 0$. Dette er muligt fordi funktionen har et spring (det er for x lig 21).



Definition 21.1

En funktion $f(x)$ er kontinuert i et tal hvis funktionen ikke har et spring for x lig dette tal.

Sætning 21.2

Hvis y-værdierne $f(a)$ og $f(b)$ har modsat fortegn

og $f(x)$ er kontinuert i ethvert tal i intervallet $a \le x \le b$

så gælder: der er et tal x_o mellem a og b så $f(x_o) = 0$.

Sætning 21.3:

Funktioner med sædvanlige forskrifter er kontinuerte i alle tal hvor de er defineret.

Eksempel 21.4:

Når $x = -2$ er $\frac{1}{x}$ negativ, og når $x = 2$ er $\frac{1}{x}$ positiv, men der er ikke en x-værdi mellem -2 og 2 så $\frac{1}{x}$ er nul. Dette er ikke i modstrid med Sætning 21.2 da $\frac{1}{x}$ ikke er kontinuert i alle tal mellem -2 og 2 (eftersom $\frac{1}{x}$ ikke er defineret for x lig 0).

Eksempel 21.5

(a) $x^2 - 9x + 8 = 0$ har løsningerne $x = 1$ og $x = 8$.

(b) Når $x = 2$ er $x^2 - 9x + 8$ lig -6 .

Påstand: Af (a) og (b) kan vi slutte at $x^2 - 9x + 8$ er negativ for enhver x-værdi mellem 1 og 8.

Begrundelse: Hvis $x^2 - 9x + 8$ f.eks. var positiv for $x = 4$ så måtte der (ifølge sætningerne 21.2 og 21.3) være en x-værdi mellem 2 og 4 hvor $x^2 - 9x + 8$ er 0 . Det er der ikke da $x^2 - 9x + 8$ kun er 0 når x er 1 eller 8 .

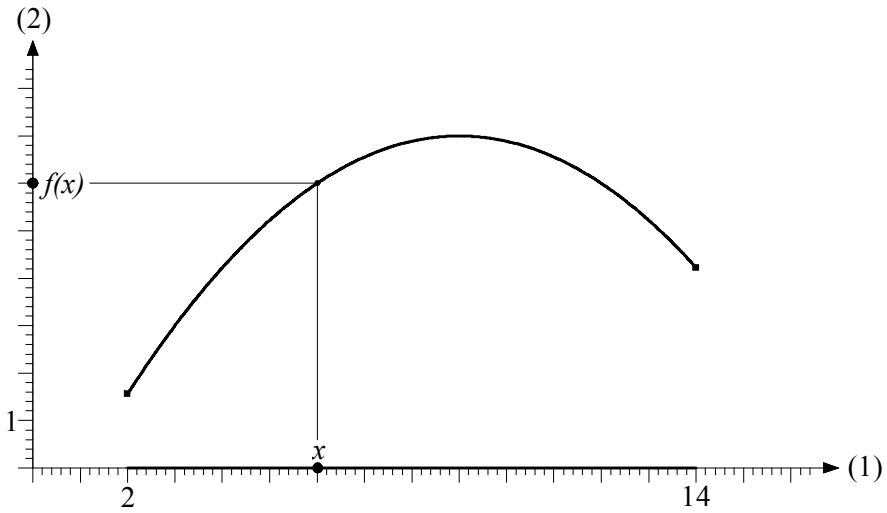
22. Voksende og aftagende

Figuren viser en interaktiv figur fra en computerskærm. Når vi trækker x-punktet hen på et tal x kan vi aflæse funktionsværdien $f(x)$.

På figuren kan vi se:

Når vi trækker $\boldsymbol{x}$ gennem tallene fra 2 til og med 9, vil $\boldsymbol{f(x)}$ hele tiden blive større.

Når vi trækker $\boldsymbol{x}$ gennem tallene fra 9 til og med 14, vil $\boldsymbol{f(x)}$ hele tiden blive mindre.



Som bekendt siger man:

$f(x)$ er voksende i intervallet $2 \le x \le 9$

$f(x)$ er aftagende i intervallet $9 \le x \le 14$

<u>Er $f(x)$ både aftagende og voksende i 9 ?</u>

Nej, vi taler ikke om at en funktion er voksende i <u>ét tal</u>. Vi taler om at en funktion er voksende i et <u>interval</u>. Der skal være mindst to y-værdier hvis vi skal kunne tale om at y er blevet større eller mindre.

<u>At</u> $f(x)$ er voksende i intervallet $2 \le x \le 9$

<u>betyder at</u> hvis x_1 og x_2 er tal intervallet og x_2 er større end x_1
så er $f(x_2)$ større end $f(x_1)$

<u>At</u> $f(x)$ er aftagende i intervallet $9 \le x \le 14$

<u>betyder at</u> hvis x_1 og x_2 er tal intervallet og x_2 er større end x_1
så er $f(x_2)$ mindre end $f(x_1)$

23. Hvad er monotoniforhold?

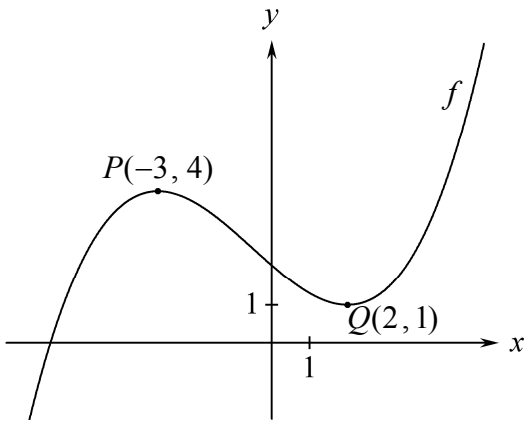
I nogle opgaver står at vi skal

<u>bestemme monotoniforholdene</u>

for en funktion.

<u>Det betyder at vi skal skrive</u>

i hvilke x-intervaller funktionen aftager, og
i hvilke x-intervaller funktionen vokser.



På figuren er vist grafen for et tredjegradspolynomium.

<u>Monotoniforholdene kan vi skrive sådan:</u>

$f(x)$ er voksende i intervallet $x \le -3$

$f(x)$ aftagende i intervallet $-3 \le x \le 2$

$f(x)$ voksende i intervallet $2 \le x$

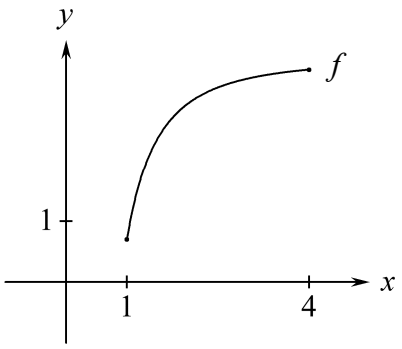
24. Regel for at finde monotoniforhold

<u>Hvis $f'(x)$ er positiv</u>

$(*)$ tangenthældningen $f'(x)$ er positiv for hvert tal x i intervallet $1 \le x \le 4$.

$(**)$ $f(x)$ er voksende i intervallet $1 \le x \le 4$.

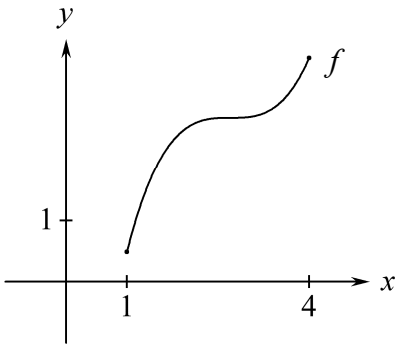
Hvis man prøver at tegne grafen sådan at $(*)$, men ikke $(**)$ gælder, så bliver man overbevist om at det ikke kan lade sig gøre. Man kan bevise at hvis $(*)$ gælder, så gælder $(**)$ også.



<u>Hvis der er undtagelser fra at $f'(x)$ er positiv</u>

Funktionen $f(x)$ på nederste figur er voksende selv om der er ét punkt hvori tangenthældningen er 0.

Selv om der er enkelte undtagelser fra $(*)$, kan man slutte at $(**)$ gælder.



<u>Sætning 24.1</u>

Hvis $f'(x)$ er positiv for alle x i et interval, evt. med endeligt mange undtagelser,
så er $f(x)$ voksende i intervallet.

Hvis $f'(x)$ er negativ for alle x i et interval, evt. med endeligt mange undtagelser,
så er $f(x)$ aftagende i intervallet.

25. Typisk opgave med monotoniforhold

Opgave

Bestem monotoniforholdene for funktionen

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{7}{3}$$

En besvarelse

Lommeregneren

differentierer $f(x) = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{7}{3}$ mht. x

Denne linje giver en detaljeret beskrivelse af den operation som vi får lommeregneren til at udføre.

og får

$$f'(x) = x^3 + 2x^2$$

Lommeregneren

løser ligningen $x^3 + 2x^2 = 0$ mht. x

Denne linje giver en detaljeret beskrivelse af den operation som vi får lommeregneren til at udføre.

og får løsningerne

$x = -2$ eller $x = 0$

Heraf følger at $f'(x)$ kun kan skifte fortegn i x-værdierne -2 og 0:

Se **Eksempel 21.5**

Da $f'(-3) = -9$ er $f'(x)$ negativ for $x < -2$

Da $f'(-1) = 1$ er $f'(x)$ positiv for $-2 < x < 0$

Da $f'(1) = 3$ er $f'(x)$ positiv for $0 < x$

Sådan blev der tastet på TI-Nspire CAS:

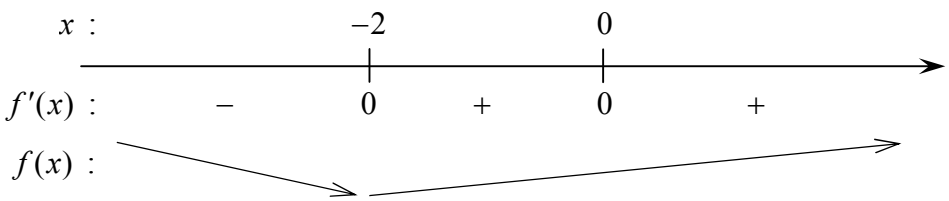
Define $f(x)=\frac{1}{4}\cdot x^4+\frac{2}{3}\cdot x^3+\frac{7}{3}$	*Udført*
Define $df(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Udført*
$df(x)$	$x^3+2\cdot x^2$
solve$(df(x)=0,x)$	$x=-2$ or $x=0$
$df(-3)$	-9
$df(-1)$	1
$df(1)$	3

Af dette følger:

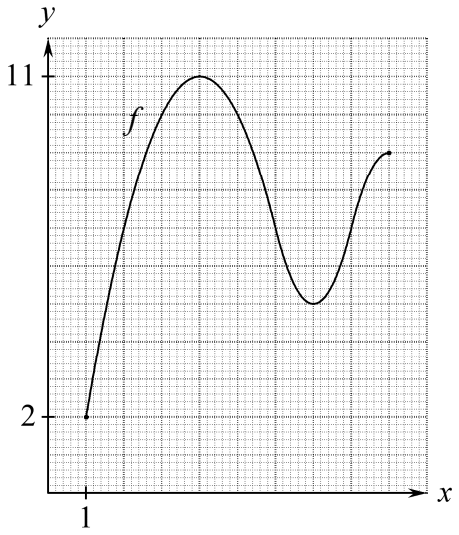
$f(x)$ er aftagende i intervallet $x \le -2$

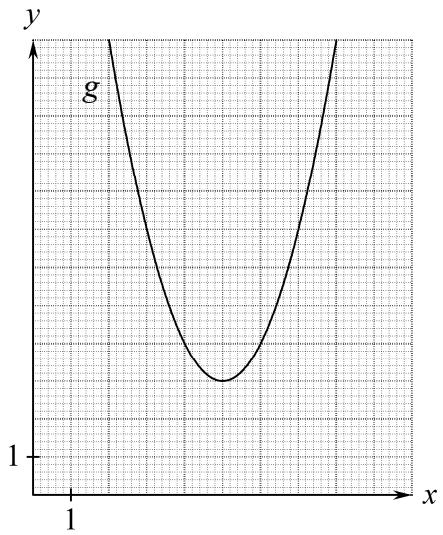
$f(x)$ er voksende i intervallet $-2 \le x$

Oversigt:



26. Maksimum og minimum





<u>Maksimum</u> for f er den største y-koordinat til et punkt på f-grafen. Vi ser at

maksimum for f er 11.

<u>Minimum</u> for f er den mindste y-koordinat til et punkt på f-grafen. Vi ser at

minimum for f er 2.

Grafen for g er en parabel hvor grenene går uendelig højt op.

Der er ikke noget punkt på grafen der har den største y-koordinat
da man altid kan afsætte et punkt højere oppe på grafen, så

funktionen g har ikke noget maksimum.

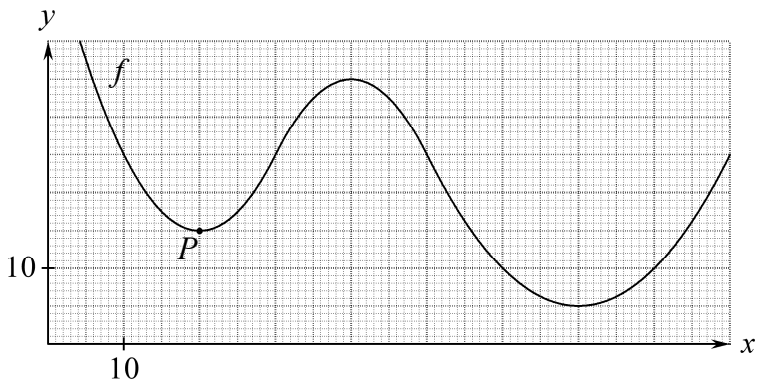
Når vi skriver hvad maksimum eller minimum er,
så skriver vi normalt også hvad punktets x-koordinat er:

Funktionen f har maksimum for $x = 4$ og maksimum er $y = 11$

Funktionen f har minimum for $x = 1$ og minimum er $y = 2$

<u>Størsteværdi</u> og <u>mindsteværdi</u> for en funktion er det samme som hhv. maksimum og minimum.

27. Lokalt maksimum og minimum



Figuren viser grafen for en funktion f. I de to ender fortsætter grafen uendelig højt op.

P er grafpunktet med x-koordinat 20 og y-koordinat 15.

Vi kan vælge et stykke af grafen omkring P sådan at 15 er mindste y-koordinat på dette stykke. Vi siger derfor at

f har lokalt minimum for $x = 20$ og det lokale minimum er $y = 15$.

15 er ikke minimum da der andre steder på grafen er y-koordinater som er mindre.

Hvis $Q(x_o\ ,\ y_o\ )$ er et punkt på grafen for en funktion, og vi kan vælge et stykke af grafen omkring Q sådan at y_o er mindste y-koordinat på dette stykke, så siger vi at

funktionen har <u>lokalt minimum</u> for $x = x_o$ og det lokale minimum er $y = y_o$

Hvis $Q(x_o\ ,\ y_o\ )$ er et punkt på grafen for en funktion, og vi kan vælge et stykke af grafen omkring Q sådan at y_o er største y-koordinat på dette stykke, så siger vi at

funktionen har <u>lokalt maksimum</u> for $x = x_o$ og det lokale maksimum er $y = y_o$

Om funktionen fra figuren ovenfor gælder:

f har lokalt minimum for $x = 20$ og det lokale minimum er $y = 15$.

f har lokalt maksimum for $x = 40$ og det lokale maksimum er $y = 35$.

f har lokalt minimum for $x = 70$ og det lokale minimum er $y = 5$.

f har minimum for $x = 70$ og minimum er $y = 5$.

I nogle opgaver står at vi skal bestemme <u>lokale ekstrema</u>. Dette betyder at vi skal finde både de lokale minimummer og de lokale maksimummer.

(Ordet ekstremum hedder i flertal ekstremummer eller ekstrema. Det er den sidste form der bruges i eksamensopgaver).

28. Typisk opgave med lokale ekstrema

Opgave

Bestem de lokale ekstrema for funktionen

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 18x - 90 \ .$$

En besvarelse

For at kunne afgøre i hvilke x-værdier der er lokale ekstrema, må vi kende monotoniforholdene for $f(x)$. Derfor starter vi med at bestemme disse.

Lommeregneren

differentierer $f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 18x - 90$ mht. x

og får $f'(x) = x^2 + 3x - 18$.

Lommeregneren

løser ligningen $f'(x) = 0$ mht. x

og får løsningerne -6 og 3 .

Sådan blev der tastet på TI-Nspire CAS:

Define $f(x)=\frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{3}{2}\cdot x^2-18\cdot x-90$	*Udført*
Define $df(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Udført*
$df(x)$	$x^2+3\cdot x-18$
solve$(df(x)=0,x)$	$x=-6$ or $x=3$
$df(-7)$	10
$df(0)$	-18
$df(4)$	10
$f(-6)$	0
$f(3)$	$\frac{-243}{2}$

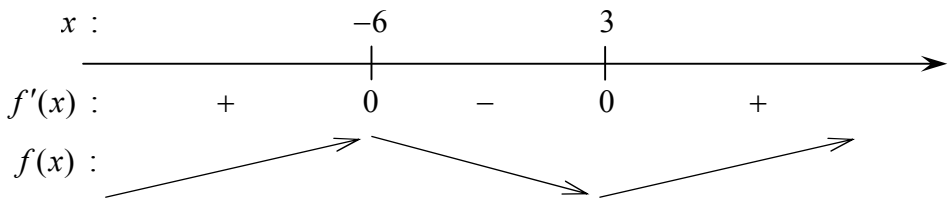
Heraf følger at $f'(x)$ kun kan skifte fortegn i x-værdierne -6 og 3:

Da $f'(-7) = 10$ er $f'(x)$ positiv for $x < -6$

Da $f'(0) = -18$ er $f'(x)$ negativ for $-6 < x < 3$

Da $f'(4) = 10$ er $f'(x)$ positiv for $3 < x$

Vi kan slutte følgende:



Da $f(-6) = 0$ og $f(3) = -\frac{243}{2}$ får vi

$f(x)$ har lokalt maksimum for $x = -6$ og det lokale maksimum er $y = 0$

$f(x)$ har lokalt minimum for $x = 3$ og det lokale minimum er $y = -\frac{243}{2}$

29. Gør rede for at funktionen har et minimum (eller maksimum)

Opgave

Gør rede for at funktionen

$$f(x) = x^3 - 9x + 12 \quad , \quad x > 0$$

har et minimum

Metode

Vi bestemmer monotoniforhold for $f(x)$ med metoden fra ramme 25. Herefter skriver vi:

Da $f(x)$ er

aftagende i intervallet $0 < x \le \sqrt{3}$ og voksende i intervallet $\sqrt{3} \le x$

kan vi slutte at

$f(x)$ har minimum for $x = \sqrt{3}$.

30. Flere typer opgaver med maksimum eller minimum

For en bestemt type figurer gælder

$$f(x) = x^3 - 9x + 12 \quad , \quad x > 0$$

hvor $f(x)$ er højden og x er bredden.

Tykkelsen fås ved at dividere bredden med $\sqrt{12}$.

Type 30.1: Hvad skal bredden være for at højden bliver mindst mulig?

Metode: Vi bestemmer $x = \sqrt{3}$ som i ramme 29.

Konklusion: Bredden skal være $\underline{\underline{\sqrt{3}}}$ for at højden bliver mindst mulig?

Type 30.2: Hvad er den mindst mulige højde?

Metode: Vi bestemmer $x = \sqrt{3}$ som i ramme 29. Så udregner vi $f\left(\sqrt{3}\right) = 12 - 6\cdot\sqrt{3}$

Konklusion: Den mindst mulige højde er $\underline{\underline{12 - 6\cdot\sqrt{3}}} \approx 1{,}60770$

Type 30.3: Hvad er tykkelsen når højden er mindst mulig?

Metode: Vi bestemmer $x = \sqrt{3}$ som i ramme 29. Så udregner vi $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2}$

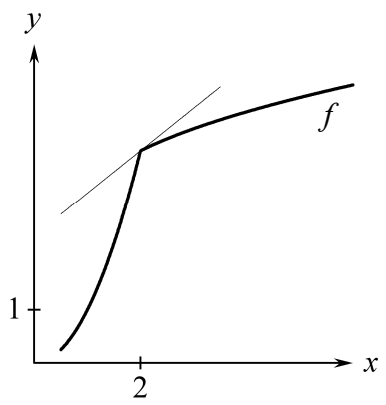
Konklusion: Tykkelsen er $\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ når højden er mindst mulig

31. Differentiabel

Grafen for f har et knæk i punktet med x-koordinat 2.
Derfor har grafen ikke nogen tangent i dette punkt.
(Tangenten er en linje der følger grafen godt nær punktet).

Funktionen f har ikke nogen differentialkvotient i 2, for differentialkvotienten er tangentens hældningskoefficient, og der er ikke nogen tangent.

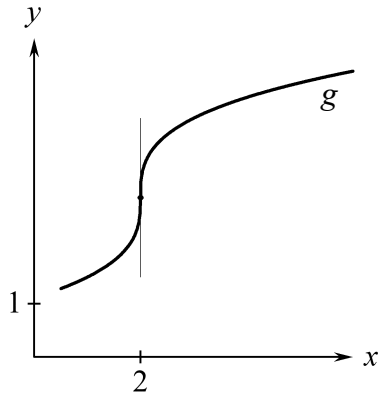
Der gælder altså at $f'(2)$ ikke eksisterer.



Grafen for g har en lodret tangent i punktet med x-koordinat 2.
En lodret linje har ikke nogen hældningskoefficient.

Funktionen g har ikke nogen differentialkvotient i 2, for differentialkvotienten er tangentens hældningskoefficient, og tangenten har ikke nogen hældningskoefficient.

Der gælder altså at $g'(2)$ ikke eksisterer.



<u>Definition 31.1</u>

Man siger at en funktion er <u>differentiabel</u> i et tal x_o
hvis funktionen har en differentialkvotient i x_o
dvs. hvis $f'(x_o)$ eksisterer.

32. Grænseværdi

Udtrykket

$$(*) \qquad \frac{3x^2 - 6x}{x - 2}$$

kan vi ikke regne ud for $x = 2$ da nævneren bliver 0.

Vi kan udregne $(*)$ for værdier af x som er tæt på 2 :

x	1,98	1,999	2	2,001	2,02
$(*)$	5,94	5,997		6,003	6,06

Ved at vælge værdien af x tilstrækkelig tæt på 2 kan vi få værdien af $(*)$ så tæt det skal være på 6 .
Vi siger at

grænseværdien for x gående mod 2 af $(*)$ er lig 6

Med symboler skriver vi dette sådan:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 6x}{x - 2} = 6$$

Metode 32.1

Vi kan regne os frem til denne grænseværdi ved at bruge følgende teknik: Vi faktoriserer brøkens tæller og forkorter brøken. Så får vi et udtryk som vi kan udregne når x er 2:

$$\frac{3x^2 - 6x}{x - 2} = \frac{3x(x-2)}{x - 2} = 3x$$

For $x \neq 2$ er

$$\frac{3x^2 - 6x}{x - 2} = 3x$$

så

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 6x}{x - 2} = \lim_{x \to 2} 3x$$

og

$$\lim_{x \to 2} 3x = 3 \cdot 2 = 6$$

Sætning 32.2

$$\lim_{x \to x_0} (k \cdot udtryk) = k \cdot \lim_{x \to x_0} udtryk \qquad \text{når } k \text{ er en konstant}$$

Sætning 32.3

$$\lim_{x \to x_0} (udtryk1 + udtryk2) = \lim_{x \to x_0} udtryk1 + \lim_{x \to x_0} udtryk2$$

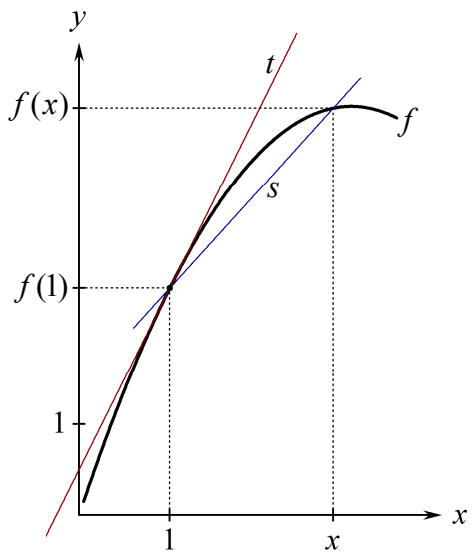
33. Vi kan finde en differentialkvotient ved at udregne en grænseværdi

Figuren viser grafen for funktionen

$$f(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 3x$$

Linjen t er tangenten i grafpunktet med x-koordinat 1.

Linjen s skærer grafen i punkterne med x-koordinaterne 1 og x.



Hældningskoefficienten for s er

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

På figuren er $x = 2{,}8$

Når $x = 2{,}8$ er $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{4{,}48-2{,}5}{1{,}8} = 1{,}1$

dvs. linjen s har hældningskoefficienten 1,1

Forestil dig at du tager fat i skæringspunktet med x-koordinat x og fører det langs grafen ned mod det andet skæringspunkt. Så vil s dreje og nærme sig mere og mere til t.
Vi ser at hvis $x = 1{,}01$ vil s og t have næsten samme hældning.

Når $x = 1{,}01$ er $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{2{,}51995-2{,}5}{0{,}01} = 1{,}995$

Altså er 1,995 en god tilnærmelse til $f'(1)$.

Vi ser at vi for at få $f'(1)$ helt nøjagtigt skal udregne $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

For $x \neq 1$ er $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{(-\frac{1}{2}x^2+3x)-\frac{5}{2}}{x-1} = \dfrac{5-x}{2}$

Den sidste omskrivning kan vi f.eks. få lommeregneren til at lave. Vi kan også bruge reglen om at faktorisere et andengrads-polynomioum og derefter for-korte. Vi kan kontrollere lig-hedstegnet ved at gange begge sider med 2 og $x-1$.

så $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5-x}{2} = \dfrac{5-1}{2} = 2$

dvs. $f'(1) = 2$

<u>Sætning 33.1</u>

For en funktion f er

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

34. Udledning af formlen for at differentiere x^2

Når $f(x) = x^2$ er

$$
\begin{aligned}
f'(x_o) &= \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} && \text{ifølge Sætning 33.1} \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{x^2 - {x_o}^2}{x - x_o} \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{(x + x_o) \cdot (x - x_o)}{x - x_o} && \text{ifølge en af kvadratsætningerne} \\
&= \lim_{x \to x_o} (x + x_o) && \text{vi har forkortet med } x - x_o \\
&= x_o + x_o && \text{ifølge metode 32.1} \\
&= 2x_o
\end{aligned}
$$

Vi har nu fundet frem til følgende:

<u>Sætning 34.1:</u> $\left(x^2\right)' = 2x$

35. Udledning af formlen for at differentiere sum

Når $f(x) = g(x) + h(x)$ er

$$
\begin{aligned}
f'(x_o) &= \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} && \text{ifølge Sætning 33.1} \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{\left(g(x) + h(x)\right) - \left(g(x_o) + h(x_o)\right)}{x - x_o} \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{\left(g(x) - g(x_o)\right) + \left(h(x) - h(x_o)\right)}{x - x_o} \\
&= \lim_{x \to x_o} \left(\frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} + \frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} \right) \\
&= \lim_{x \to x_o} \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} + \lim_{x \to x_o} \frac{h(x) - h(x_o)}{x - x_o} && \text{ifølge sætning 32.3} \\
&= g'(x_o) + h'(x_o) && \text{ifølge Sætning 33.1}
\end{aligned}
$$

Vi har nu fundet frem til følgende:

<u>Sætning 35.1:</u> $\left(g(x) + h(x)\right)' = g'(x) + h'(x)$

36. Differentialkvotient af e^{kx} og $\ln(x)$

Der gælder følgende formler:

$$\left(e^{kx}\right)' = k \cdot e^{kx}$$ ← Reglen for at differentiere e^{kx}

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$ ← Reglen for at differentiere $\ln(x)$

Hvis vi i den første af disse regler sætter $k = 1$ får vi følgende regel:

$$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$$

$$\left(4+\ln(x)\right)' = 4' + \ln'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$$

$$\left(4 \cdot \ln(x)\right)' = 4 \cdot \ln'(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{\frac{4}{x}}}$$

$$\left(\frac{e^{2x}}{4}\right)' = \left(\frac{1}{4} \cdot e^{2x}\right)' = \frac{1}{4} \cdot \left(e^{2x}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 2e^{2x} = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{2x}}}$$

37. Differentialkvotient af *udtryk gange udtryk*

Når m og n er to udtryk, gælder

$$(m \cdot n)' = m' \cdot n + m \cdot n'$$ ← Reglen for at differentiere *udtryk gange udtryk*

Når $f(x) = (x^2+1) \cdot e^{3x}$

er
$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2+1)' \cdot e^{3x} + (x^2+1) \cdot (e^{3x})' \\ &= 2x \cdot e^{3x} + (x^2+1) \cdot 3e^{3x} \\ &= \underline{\underline{(3x^2+2x+3)e^{3x}}} \end{aligned}$$

<u>ADVARSEL:</u>

Man kan ikke differentiere et udtryk ved at differentiere hver del af udtrykket (bortset fra visse specielle tilfælde som f.eks. reglen i ramme 17).

$\left(x^2 \cdot e^{2x}\right)'$ er **<u>ikke</u>** $2x \cdot 2e^{2x}$ og $\left(\frac{x^2}{e^{2x}}\right)'$ er **<u>ikke</u>** $\frac{2x}{2e^{2x}}$

38. Opdeling af en sammensat funktion i en indre og en ydre funktion

Når vi kender en værdi af x og skal udregne

$$f(x) = (8-x)^2$$

udregner vi først tallet $w = 8 - x$

og så udregner vi w^2

Vi siger at funktionen $f(x) = (8-x)^2$ er <u>sammensat</u> af

den <u>indre funktion</u> $w = 8 - x$ og den <u>ydre funktion</u> $y = w^2$

Funktionen $f(x) = \ln(2x+3)$ er sammensat af

den indre funktion $w = 2x + 3$ og den ydre funktion $y = \ln(w)$

Funktionen $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$ er sammensat af

den indre funktion $w = x^2 + 1$ og den ydre funktion $y = \mathrm{e}^w$

39. Metode til at differentiere en sammensat funktion

For at differentiere en sammensat funktion bruger vi følgende metode:

$f'(x)$ = (ydre differentieret) · (indre differentieret)

Følgende eksempel præciserer hvordan metoden skal forstås:

Funktionen $f(x) = (8-x)^2$ er <u>sammensat</u> af

den <u>indre funktion</u> $w = 8 - x$ og den <u>ydre funktion</u> $y = w^2$

Ydre differentieret: $\left(w^2\right)' = 2w$

Indre differentieret: $(8-x)' = -1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{(ydre differentieret)} \cdot \text{(indre differentieret)} \\ &= 2w \cdot (-1) \\ &= 2(8-x) \cdot (-1) \\ &= 2x - 16 \end{aligned}$$