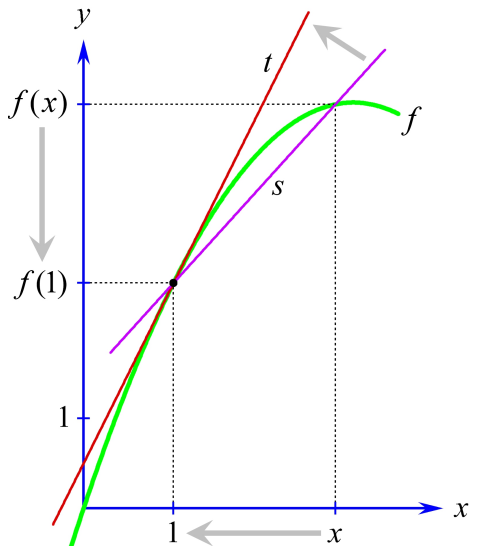
Differential-regning

for stx og hf, udgave 3



2020 Karsten Juul

Differentialkvotient

1. Tangent og røringspunkt. 1
2. Funktionsværdi og differentialkvotient. 1
3. Fortolkning af $f'(x)$ vedr. graf. 2
4. Fortolkning af $f'(x)$ når x er tiden. 2
5. Fortolkning af $f'(x)$ når x ikke er tiden. 2
6. Fortolkninger af $f'(x)$ begrundet. 2
7. Bestem $f'(x)$ med Nspire. 3
8. Reglerne for at bestemme $f'(x)$ uden hjælpemidler. 3
9. Advarsler om regler fra ramme 8. 4
10. Eksempler på brug af regler fra ramme 8. 4
11. Eksempler på brug af regel 8p. 4
12. Eksempler på brug af regel 8j med ydre og indre funktion. 5
13. Aflæs tallet $f(r)$ på figur. 6
14. Aflæs tallet $f'(r)$ på figur. 6
15. Aflæs løsninger til $f(x)=t$ på figur. 7
16. Aflæs løsninger til $f'(x)=s$ på figur. 7
17. Afledede funktion. 8
18. Er det grafen for den afledede? 8

Tangent

19. Bestem ligning for tangent. 9
20. Bestem punkt på graf når vi kender x-koordinat 9
21. Bestem punkt på graf når vi kender y-koordinat 10
22. Bestem punkt på graf når vi kender tangenthældning eller ligning der er parallel med tangenten i punktet. 10
23. Bestem tangenthældning. 11
24. Har grafen en tangent med hældningskoefficienten a? 11
25. Bestem $f(x_0)$ ud fra tangents ligning. 11
26. Er linjen tangent? 12
27. Bestem røringspunkt for tangent. 13
28. Vinkel og tangent. 13
29. Bestem konstant i forskrift. 14
30. Bestem røringspunkt for tangent gennem givet punkt. 14

Væksthastighed

31. Væksthastighed. 15
32. Aflæs størrelsen når tidspunktet er kendt. 15
33. Aflæs væksthastigheden når tidspunktet er kendt. 16
34. Aflæs tidspunktet når størrelsen er kendt. 16
35. Aflæs tidspunktet når væksthastigheden er kendt. 17
36. Udregn størrelsen når tidspunktet er kendt. 17
37. Udregn væksthastigheden når tidspunktet er kendt. 17
38. Udregn tidspunktet når størrelsen er kendt. 18
39. Udregn tidspunktet når væksthastigheden er kendt. 18
40. Du skal ikke altid differentiere for at finde hastighed. 18

Monotoni

41. Voksende og aftagende. 19
42. Hvad er monotoniforhold? 20
43. Regel for at finde monotoniforhold. 20
44. Bestem monotoniforhold. 21
45. Gør rede for at f er voksende (eller at f er aftagende). 22
46. Bestem k så f er voksende (eller så f er aftagende). 22
47. Tegn f-graf ud fra f'-fortegn m.m. 22
48. Bestem monotoniforhold for f ud fra f-graf. 23
49. Bestem monotoniforhold for f ud fra f'-graf. 23

Ekstrema

50. Maksimum og minimum. 24
51. Bestem med $f'(x)$ den værdi af x hvor y er størst. 25
52. Bestem med $f'(x)$ den største værdi af y. 26
53. Bestem med $f'(x)$ den værdi af x hvor y er mindst. 27
54. Bestem med $f'(x)$ den mindste værdi af y 27
55. Bestem ekstrema. 27
56. Gør rede for at funktionen har et minimum (eller maksimum). 27
57. Lokalt maksimum og minimum. 28
58. Bestem lokale ekstrema. 29
59. Bestem for hver værdi af a antal løsninger til $f(x) = a$ 30
60. Gør rede for at ligning ikke kan have mere end én løsning. 30
61. Bestem konstant i forskrift ud fra lokalt ekstremum. 30

Beviser

62. Differentiabel. 31
63. Kontinuert. 31
64. Grænseværdi 32
65. Udregning af grænseværdi 33
66. Grænseværdi-formel for differentialkvotient. 34
67. Udledning af formlen for at differentiere x^2. 35
68. Udledning af formlen for at differentiere *udtryk plus udtryk* 35

Differentialkvotient

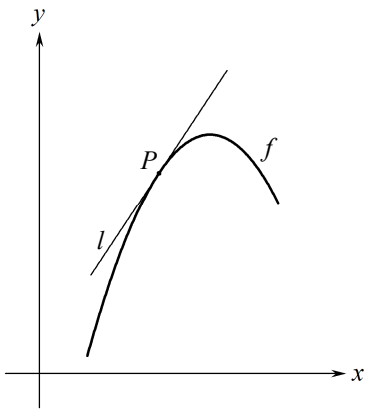
1. Tangent og røringspunkt.

1a. At l er **tangent** i P
betyder at l er linjen gennem P som følger grafen nær P.

1b. P kaldes tangentens **røringspunkt**.

1c. Grafpunkterne nær P ligger normalt ikke på tangenten
(selv om det ser sådan ud på en tegning da stregen ikke er uendelig tynd).

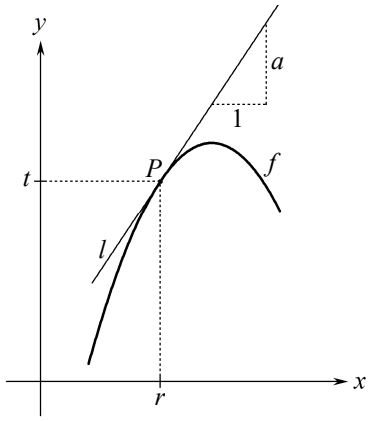
1d. På figuren er linje l tangent til f-graf i P.



2. Funktionsværdi og differentialkvotient.

2a. At t er **funktionsværdien** af r
betyder at t er ***y*-koordinaten** til grafpunktet
med x-koordinat r
og skrives $t = \boldsymbol{f(r)}$
som læses t er lig ***f* af *r***

2b. At a er **differentialkvotienten** i r
betyder at a er **tangenthældningen** i grafpunktet
med x-koordinat r
og skrives $a = \boldsymbol{f'(r)}$
som læses a er lig ***f* mærke af *r***



2c og 2d er vedtægter.
2e og 2f er begrundet i ramme 6.

2c. $\boldsymbol{f(r)}$ = ***y*-koordinat** til f-grafs punkt med x-koordinat r.

2d. $\boldsymbol{f'(r)}$ = **tangents hældning** i f-grafs punkt med x-koordinat r.

2e. $\boldsymbol{f'(r)}$ = **væksthastighed** for $f(x)$ på tidspunkt r. (Hvis x er tid).

2f. Når x er lig r, og vi lægger et lille tal til x, så lægges ca. $\boldsymbol{f'(r)}$ gange dette lille tal til y.

2g. I ligninger af typerne

$$f(m) = n \quad \text{og} \quad f'(m) = p$$

gælder:

Tallet på m's plads er en x-værdi.
Tallet på n's plads er en y-værdi.
Tallet på p's plads er en tangenthældning eller væksthastighed.

2h. Opgavetyperne i rammerne 20-23, 27-29, 36-39, 61 løses med følgende **metode**:

Skriv en ligning af en af typerne $f(m) = n$ og $f'(m) = p$.
Brug ligningen til at bestemme m eller n eller p eller *en konstant i forskriften*.

Denne metode indgår som en del af opgavetyperne i mange af de andre ramme

3. Fortolkning af $f'(x)$ vedr. graf.

Opgave $f'(5) = 4$. Hvad fortæller dette om grafen?
Besvarelse $f'(x)$ = tangenthældning (se 2d) så at $f'(5) = 4$, fortæller:

I grafpunktet med x-koordinat 5 er tangenthældningen er 4.

Opgave Løsningerne til ligningen $f'(x) = 2$ er $x = 3$ og $x = 7$. Hvad fortæller dette om grafen?
Besvarelse $f'(x)$ = tangenthældning (se 2d) så det at løsningerne er $x = 3$ og $x = 7$, fortæller:

Det er grafpunkterne med x-koordinat 3 og 7 hvor tangenthældningen er 2.

4. Fortolkning af $f'(x)$ når x er tiden.

Opgave Der er et tegnet dyr på skærmen. $f(x)$ er dyrets højde målt i mm, og x er tiden målt i minutter.

Det er oplyst at $f'(20) = 2$. Gør rede for betydningen af dette.

Besvarelse Regel (se 2e):

$f'(r)$ er væksthastighed for $f(x)$ på tidspunkt r.

I denne regel indsætter vi de aktuelle ord og tal:

2 er væksthastighed for **højden** på tidspunktet **20**.

Dvs. På tidspunktet 20 minutter vokser dyrets højde med hastigheden 2 mm pr. minut.

Jeg har brugt blå farve for at pege på udskiftningen. Du behøver ikke bruge farve.

Hvis du glemmer ordet "hastighed", så betyder sætningen at højden i løbet af et minut vokser 2 mm, og det er ikke det der er meningen.

5. Fortolkning af $f'(x)$ når x ikke er tiden.

Opgave Der er et tegnet dyr på skærmen. $f(x)$ er dyrets højde målt i mm, og x er længden målt i mm. Det er oplyst at $f'(20) = 2$. Gør rede for betydningen af dette.

Besvarelse Regel (Se 2f):

Når x er lig r , og vi lægger et lille tal til x , så lægges ca. $f'(r)$ gange dette lille tal til y .

I denne regel indsætter vi de aktuelle ord og tal:

Når **længde** lig **20**, og vi lægger et lille tal til **længde**, så lægges ca. **2** gange det lille tal til **højde**.

Jeg har brugt blå farve for at pege på udskiftningen. Du behøver ikke bruge farve.

Eksempel Tal i tabel er afrundet til 1 decimal.

Pris (kr.) x	12	13	14	15	16	17
Afgift (øre) $g(x)$	17,3	18,0	18,7	19,4	20,0	20,6

Vi ser at $g'(13)=0{,}7$ og $g'(16) = 0{,}6$.

6. Fortolkninger af $f'(x)$ begrundet.

Symbolet $f'(20)$ betyder tangenthældning,
så $f'(20) = 2$ betyder tangenthældning er 2 ,
så på tangenten gælder:

når x bliver 1 større, så vil y blive 2 større.

For x nær 20 er graf og tangent næsten ens, så

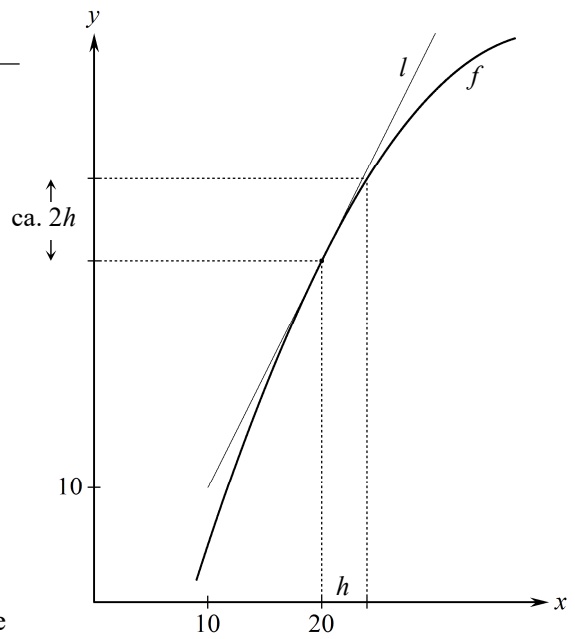
(∗) når x er ca. 20 og x bliver 1 større,
så vil $f(x)$ blive ca. 2 større.

Når $f(x)$ er som i ramme 4, så oversættes (∗) til følgende:

Når tidspunktet er ca. 20 minutter og der går ét minut,
vil dyrets højde blive ca. 2 mm større.
dvs. væksthastigheden er ca. 2 mm pr. minut.

Når $f(x)$ er som i ramme 5, så oversættes (∗) til følgende:

Når x er nær 20 og vi lægger et lille tal til x, så bliver der lagt ca. 2 gange dette lille tal til y, dvs. når vi lægger et lille tal til længden, så lægges 2 gange dette lille tal til højden.



7. Bestem $f'(x)$ med Nspire.

7a For at få Nspire til at differentiere $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ mht. x bruger vi skabelonen $\dfrac{d}{d\square}(\square)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{1}{(x+2)^2}$$

Udregnet af Nspire

HUSK at skrive dette!

7b Hvis forskrift indeholder cos eller sin:
Højreklik på matematikfelt, vælg Attributter og sæt vinkel til radianer.

7c For at udregne $f'(3)$ skal vi først bestemme forskriften for $f'(x)$ som vist i 7a.
Så indsætter vi 3 for x i denne forskrift:

$$f'(3) = \frac{1}{(3+2)^2} = \frac{1}{25}$$

Symbolet $\dfrac{d}{dx}$ kan IKKE skrives ved hjælp af en brøkstreg.

7d Eksempel

Dette er både korrekt matematiksprog og korrekt Nspiresprog.

$$f(x)=x\cdot\ln(x) \qquad f'(x)=\frac{d}{dx}(x\cdot\ln(x)) = \ln(x)+1 \qquad f'(2)=\ln(2)+1 = 1.69315$$

7e Eksempel

Her fortæller vi til Nspire og til læseren at **fm** betyder **f'** .

$$\mathbf{f}(x):=x\cdot\ln(x) \blacktriangleright \textit{Udført} \qquad \mathbf{fm}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x)) \blacktriangleright \textit{Udført} \qquad \mathbf{fm}(2) = 1.69315 \qquad \mathbf{fm}(x) = \ln(x)+1$$

:= bevirker at f(x) kommer til at betyde x·ln(x) så vi kan skrive f(x) og f(3) i stedet for x·ln(x) og 3·ln(3) .

8. Reglerne for at bestemme $f'(x)$ uden hjælpemidler.

8a $k' = 0$ når k er en konstant.

8b $(kx)' = k$

8c $(x^a)' = a\cdot x^{a-1}$

8d $(a^x)' = a^x\cdot\ln(a)$

8e $(e^{kx})' = k\cdot e^{kx}$

8f $(e^x)' = e^x$

8g $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

8h $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

8i $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

8j $(\sin(x))' = \cos(x)$

8k $(\cos(x))' = -\sin(x)$

8l $(k\cdot f(x))' = k\cdot f'(x)$

8m $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

8n $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$

8o $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

8p $(f(a\cdot x+b))' = a\cdot f'(a\cdot x+b)$

8q $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Hvordan disse regler bruges, er vist på de næste sider.

9. Advarsler om regler fra ramme 8.

Man kan ikke differentiere et udtryk ved at differentiere hver del for sig.
Det kan man kun når der står plus eller minus mellem delene.

$(x^2\cdot e^x)'$ er **IKKE** $2x\cdot e^x$ og $\left(\dfrac{x^2}{e^x}\right)'$ er **IKKE** $\dfrac{2x}{e^x}$ og $((1-x)^3)'$ er **IKKE** $3(-1)^2$.

10. Eksempler på brug af regler fra ramme 8.

10a Oplyst: $f(x) = 2\cdot x^3 - 5x + 4$ **Bestem:** $f'(3)$.

Svar:

$f'(x) = (2\cdot x^3)' - (5x)' + 4'$ ifølge **8n og 8m**

$= 2\cdot(x^3)' - 5 + 0$ ifølge **8*l*** og **8b** og **8a**

$= 2\cdot 3x^{3-1} - 5$ ifølge **8c**

$= 6\cdot x^2 - 5$

$f'(3) = 6\cdot 3^2 - 5 = 6\cdot 9 - 5 = \underline{\underline{49}}$

10b Oplyst: $f(x) = e^x + x\cdot\ln(x)$ **Bestem:** $f'(1)$.

Svar:

$f'(x) = (e^x)' + (x\cdot\ln(x))'$ ifølge **8m**

$= e^x + x'\cdot\ln(x) + x\cdot(\ln(x))'$ ifølge **8f** og **8o**

$= e^x + 1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}$ ifølge **8b** og **8g**

$= e^x + \ln(x) + 1$

$f'(1) = e^1 + \ln(1) + 1$

$= e + 0 + 1$ Ifølge regler for potens og ln : $\boldsymbol{a^1 = a}$ og $\mathbf{\ln(1) = 0}$

$= \underline{\underline{e + 1}}$

Reglerne $a^1=a$ og $\ln(1)=0$ står ikke i formelsamlingen.
Husk at $a^0=1$ og $\ln(e)=1$ kan slås op i formelsamlingen.

10c Oplyst: $f(x) = 2\cdot\ln(x)$ **Bestem:** $f'(x)$.

Svar:

$f'(x) = 2\cdot(\ln(x))'$ ifølge **8*l***

$= 2\cdot\frac{1}{x}$ ifølge **8g**

$= \frac{2\cdot 1}{x} = \frac{2}{x}$ Man ganger en brøk med et tal ved at gange brøkens tæller med tallet

11. Eksempler på brug af regel 8p .

$f(x)$	$f'(x)$	
e^x	e^x	
e^{5x}	$5\cdot e^{5x}$	
e^{5x+2}	$5\cdot e^{5x+2}$	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	
$\ln(3x)$	$3\cdot\frac{1}{3x}$	$=\frac{1}{x}$
$\ln(3x-8)$	$3\cdot\frac{1}{3x-8}$	$=\frac{3}{3x-8}$

$f(x)$	$f'(x)$	
x^9	$9\cdot x^8$	
$(2x)^9$	$2\cdot 9\cdot(2x)^8$	$=18\cdot(2x)^8$
$(2x+3)^9$	$2\cdot 9\cdot(2x+3)^8$	$=18\cdot(2x+3)^8$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$	
$\sqrt{3x}$	$3\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{3x}}$	$=\frac{3}{2\cdot\sqrt{3x}}$
$\sqrt{3x+2}$	$3\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{3x+2}}$	$=\frac{3}{2\cdot\sqrt{3x+1}}$

12. Eksempler på brug af regel 8q med ydre og indre funktion.

8j Når $f(x)=g(h(x))$ er $f'(x)=g'(h(x))\cdot h'(x)$ $g(\ \ )$ er ydre funktion og $h(x)$ er indre funktion

12a Opgave

En funktion f er bestemt ved $f(x) = (2x+3)^4$. Bestem $f'(x)$.

Sådan tænker vi

For $(2x+3)^4$ er ydre funktion $= (\cdots)^4$ og indre funktion $= 2x+3$

ydre differentieret $= 4(\cdots)^3$ og indre differentieret $= 2$

$f'(x)$ = ydre differentieret gange indre differentieret $= 4(\cdots)^3 \cdot 2 = 4(2x+3)^3 \cdot 2$

Besvarelse

$f'(x) = 4(2x+3)^3 \cdot 2$

$$\underline{\underline{f'(x) = 8(2x+3)^3}}$$

12b Opgave

En funktion f er bestemt ved $f(x) = \ln(1-x) + 2x$. Bestem $f'(x)$.

Sådan tænker vi

Første del af forskriften vil vi differentiere ved hjælp af reglen om ydre og indre funktion.

For $g(x)=\ln(1-x)$ er ydre funktion $= \ln(\cdots)$ og indre funktion $= 1-x$

ydre differentieret $= \dfrac{1}{\cdots}$ og indre differentieret $= -1$

$g'(x)$ = ydre differentieret gange indre differentieret $= \dfrac{1}{\cdots} \cdot (-1) = \dfrac{1}{1-x} \cdot (-1)$

Vi skal også huske at differentiere sidste del af forskriften:

Besvarelse

$f'(x) = \dfrac{1}{1-x} \cdot (-1) + 2$

$$\underline{\underline{f'(x) = \frac{1}{x-1} + 2}}$$

Måske synes du ikke at det er klart at vi kan omskrive til dette.
Man kan evt. forklare det med følgende mellemregninger:

$$\frac{1}{1-x}\cdot(-1) = \frac{1\cdot(-1)}{1-x} = \frac{-1}{1-x} = \frac{-1\cdot(-1)}{(1-x)\cdot(-1)} = \frac{1}{-1+x} = \frac{1}{x-1}$$

12c Opgave

En funktion f er bestemt ved $f(x) = e^{1+x^2}$. Bestem $f'(x)$.

Sådan tænker vi

For e^{1+x^2} er ydre funktion $= e^{\cdots}$ og indre funktion $= 1+x^2$

ydre differentieret $= e^{\cdots}$ og indre differentieret $= 2x$

$f'(x)$ = ydre differentieret gange indre differentieret $= e^{\cdots} \cdot 2x = e^{1+x^2} \cdot 2x$

Besvarelse

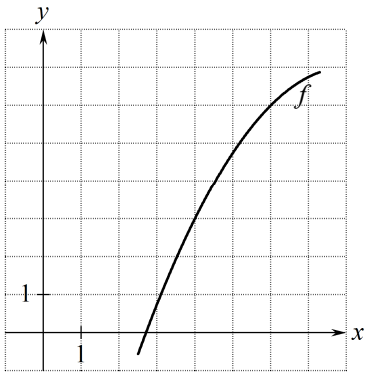
$f'(x) = e^{1+x^2} \cdot 2x$

$$\underline{\underline{f'(x) = 2x e^{1+x^2}}}$$

13. Aflæs tallet $f(r)$ på figur.

Opgave

Aflæs tallet $f(4)$ på figuren.



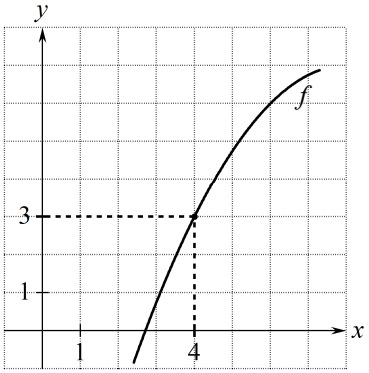
Sådan tænker vi

Der står 4 i parentesen, så vi skal vi finde det punkt på grafen hvor x-koordinaten er 4.
Der står $f(\ )$, så y-koordinaten er facit.

Besvarelse

$f(4)$ = y-koordinat til grafpunkt med x-koordinat 4

$\underline{\underline{f(4) = 3}}$. Se markering på figur.



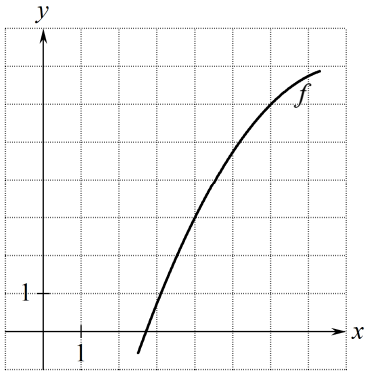
Husk

Når vi aflæser et tal på en figur, skal vi skrive tallet på figuren der hvor vi har aflæst det.
Hvis der ikke er plads, kan vi lave en pil fra tallet til det sted hvor det er aflæst.

14. Aflæs tallet $f'(r)$ på figur.

Opgave

Aflæs tallet $f'(4)$ på figuren.



Sådan tænker vi

Der står 4 i parentesen, så vi skal finde det punkt på grafen hvor x-koordinaten er 4.
Der står $f'(\ )$, så tangenthældningen er facit.

Besvarelse

$f'(4)$ = hældningskoefficient for tangent l i grafpunkt med x-koordinat 4.

Vi tegner l.

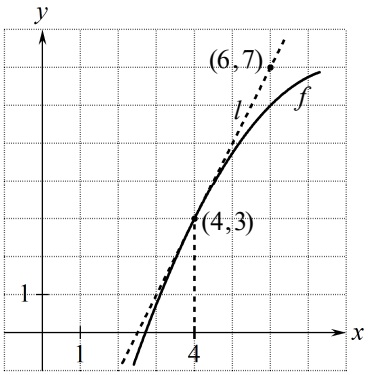
Vi aflæser punkterne $(4,3)$ og $(6,7)$ på l.

l's hældningskoefficient er

$$\frac{7-3}{6-4} = 2$$

så

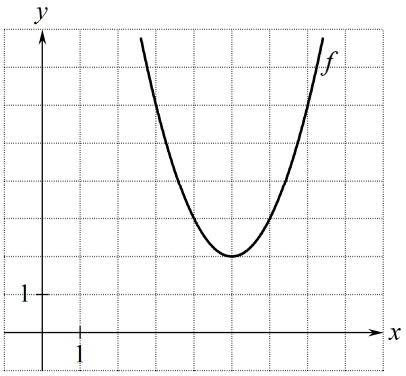
$$\underline{\underline{f'(4) = 2}}.$$



15. Aflæs løsninger til $f(x)=t$ på figur.

Opgave

Aflæs løsningerne til ligningen $f(x)=6$ på figuren



Sådan tænker vi

Der står $f(\ )=6$, så vi skal finde de punkter på grafen hvor y-koordinaten er 6 .
Der står x i parentesen, så facit er x-koordinaterne til de punkter vi har fundet.

Besvarelse

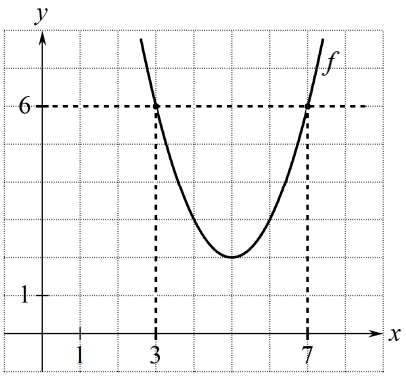
Vi skal løse $f(x)=6$.

$f(x)$ er y-koordinaten til et grafpunkt.

Vi finder de grafpunkter hvor y-koordinaten er 6 .

Vi aflæser x-koordinaten til hvert af disse punkter og får 3 og 7 . Se markeringen på figuren.

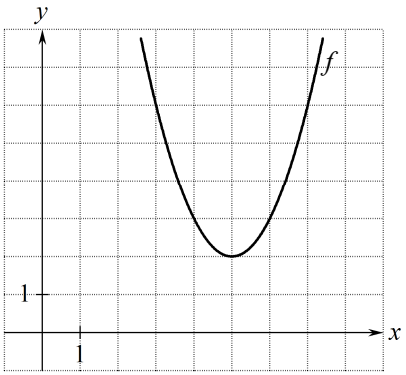
Løsningerne til $f(x)=6$ er $x=3$ eller $x=7$.



16. Aflæs løsninger til $f'(x)=s$ på figur.

Opgave

Aflæs løsningerne til ligningen $f'(x)=0$ på figuren.



Sådan tænker vi

Der står $f'(\ )=0$, så vi skal finde de punkter på grafen hvor tangenthældningen er 0 .
Der står x i parentesen, så facit er x-koordinaterne til de punkter vi har fundet.

Besvarelse

Vi skal løse $f'(x)=0$.

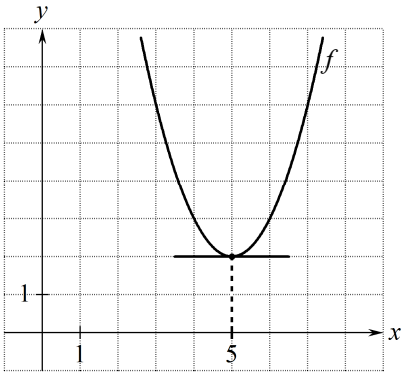
$f'(x)$ er tangenthældningen i et grafpunkt.

Vi finder det grafpunkt hvor tangenthældningen er 0.

Vi aflæser x-koordinaten til dette punkt og får 5 .

Se markeringen på figuren.

Løsningen til $f'(x)=0$ er $x=5$.



Husk at tegne tangenten og skrive at det givne tal er denne linjes hældningskoefficient.

17. Afledede funktion.

Funktionen f' kaldes den <u>afledede funktion</u> af f.

Hvis g er den afledede af f

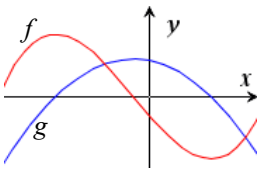
er $g(x) = f'(x)$

for alle x i definitionsmængden for f.

18. Er det grafen for den afledede?

18.1 Opgave

Gør rede for at g ikke er den afledede af f.

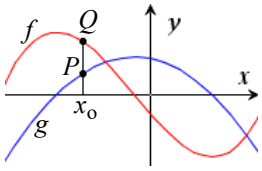


Besvarelse Se figur.

$g(x_0) = P$'s y-koordinat så $g(x_0)$ er positiv

$f'(x_0) =$ tangenthældning i Q så $f'(x_0)$ er negativ

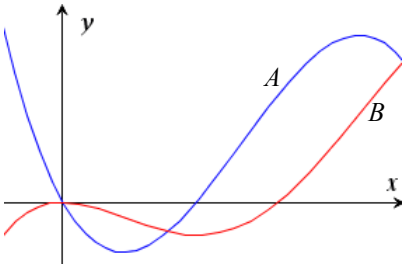
Da $g(x_0) \neq f'(x_0)$ er g ikke den afledede af f.



18.2 Opgave

Figuren viser grafen for to funktioner $f(x)$ og $f'(x)$.

Gør rede for hvilken graf der hører til hvilken funktion.

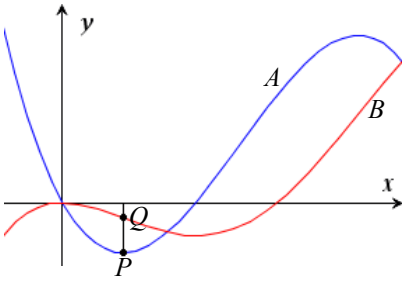


Besvarelse

Tangenten i P har hældningskoefficient 0, så hvis A var f-graf, og B var f'-graf, så skulle y-koordinaten til Q være 0. Det er den ikke. Så må det omvendte gælde:

B er f-graf, og A er f'-graf .

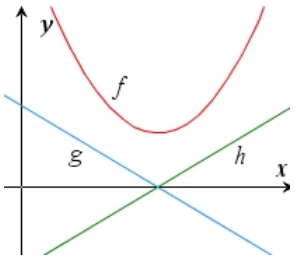
I opgaver af disse typer skal man altid vise at det ene ikke kan være rigtigt. Så har man vist at det modsatte gælder.



18.3 Opgave

Figuren viser graferne for tre funktioner f, g og h.

Gør rede for hvilken af funktionerne g og h der er den afledede af f.



Besvarelse

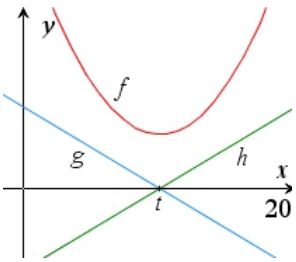
Se figur.

For $x < t$ er f-grafens tangenthældning $f'(x)$ <u>negativ</u>.

For $x < t$ er $g(x)$ <u>positiv</u>

så $g(x)$ kan ikke være den afledede $f'(x)$.

Det er h der er den afledede af f .



Tangent

19. Bestem ligning for tangent.

Opgave $f(x) = x^2 - x + 2$.

Bestem ligning for tangent til graf for f i punktet $(2, f(2))$.

Besvarelse

Grønne kommentarer er ikke en del af besvarelsen.

$f(x) = x^2 - x + 2$ er oplyst

$f'(x) = 2x - 1$ Se ramme 8.

Du skal IKKE bruge tallene 2 og –1 i andre opgaver. I stedet skal du bruge de tal du finder ved at differentiere den givne funktion.

(x_1, y_1) og a er røringspunkt og hældning for tangent:

$x_1 = \mathbf{2}$ er oplyst

$y_1 = f(2) = 2^2 - 2 + 2 = \mathbf{4}$ Se 2c og ramme 20.

$a = f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = \mathbf{3}$ Se 2d og ramme 23.

Tangent:

$y = a(x - x_1) + y_1$

$y = \mathbf{3}(x - \mathbf{2}) + \mathbf{4}$

$y = 3x - 6 + 4$

$y = 3x - 2$

Fra formelsamlingen:

Linjen gennem punktet (x_1, y_1) med hældningskoefficienten a har ligningen

$y = a(x - x_1) + y_1$.

Tangenten til grafen for f i punktet $(2, f(2))$ har ligningen $y = 3x - 2$.

Bestem ligning for tangent ved kommando i Nspire

Vi angiver forskriften $x^2 - x + 2$ og x-koordinaten 2, og får Nspire til at bestemme tangentligning, og får at tangentens ligning er $y = 3x - 2$. Husk at skrive denne forklaring!

tangentLine$(x^2 - x + 2, x, 2)$ ▸ $3 \cdot x - 2$

Bestem ligning for tangent ved grafisk metode i Nspire

Vi afsætter et punkt på grafen nær $x = 2$ og retter punktets x til 2. Vi vælger Tangentligning, klikker på det afsatte punkt og får at tangentens ligning er $y = 3x - 2$. Husk at skrive denne forklaring!

Punkt og Tangentligning vælges under Geometri /Punkter og linjer.

20. Bestem punkt på graf når vi kender x-koordinat .

Opgave

En funktion f er givet ved

$f(x) = x^3 - 3x^2$.

Bestem y-koordinaten til det punkt på grafen for f hvor x-koordinaten er 5 .

Bevarelse

y-koordinat $= f(5)$ Se 2c.

y-koordinat $= 5^3 - 3 \cdot 5^2$ da $f(x) = x^3 - 3x^2$

y-koordinat $= 50$

Det punkt på grafen for f hvor x-koordinaten er 5 , har y-koordinaten 50 .

21. Bestem punkt på graf når vi kender y-koordinat .

Opgave En funktion f er givet ved $f(x) = x^3 - 3x^2$.
Bestem x-koordinaten til hvert af de punkter på grafen for f hvor y-koordinaten er -4 .

Bevarelse

For funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2$ får vi:

$$\begin{aligned} y\text{-koordinat} &= -4 \\ f(x) &= -4 \qquad \text{Se 2c.} \\ x^3 - 3x^2 &= -4 \end{aligned}$$

Nspire løser ligningen $x^3 - 3x^2 = -4$ mht. x og får $x = -1$ eller $x = 2$.

Nspire: solve(x^3−3·x^2=-4,x) ▸ x=-1 or x=2

De punkter på grafen for f hvor y-koordinaten er -4 , har x-koordinaterne $\underline{\underline{-1}}$ og $\underline{\underline{2}}$.

22. Bestem punkt på graf når vi kender tangenthældning **eller** ligning for linje der er parallel med tangenten i punktet.

22a Opgave En funktion f er givet ved $f(x) = x^3 - 3x^2$.
Bestem koordinatsættet til hvert af de punkter på grafen for f hvor tangenthældningen er 9 .

Bevarelse

For funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2$ får vi:

$$\begin{aligned} \text{tangenthældning} &= 9 \\ f'(x) &= 9 \qquad \text{Se 2d.} \\ 3x^2 - 6x &= 9 \qquad \text{Se ramme 7 og 8.} \end{aligned}$$

Nspire løser ligningen $3x^2 - 6x = 9$ mht. x og får $x = -1$ eller $x = 3$.

Nspire: solve(3·x^2−6·x=9,x) ▸ x=-1 or x=3

Når $x = -1$ er $y = f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 = -4$ Se 2c.

Når $x = 3$ er $y = f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 = 0$

De punkter på grafen hvor tangenthældningen er 9, har koordinatsættene $\underline{\underline{(-1, -4) \text{ og } (3, 0)}}$.

22b Opgave En funktion g er givet ved $g(x) = x^2 - 4x + 1$. En linje m er giver ved m: $y = 2x - 1$.
På grafen for g ligger et punkt P . Tangenten i P er parallel med med linjen m .
Bestem x-koordinaten til P .

Bevarelse

Ligningen for m er på formen $y = ax + b$ med $a = 2$, så m's hældningskoefficient er 2 .
Tangenten i P er parallel med m , så tangenthældning i P er 2 .
For funktionen $g(x) = x^2 - 4x + 1$ får vi

$$\begin{aligned} \text{tangenthældning} &= 2 \\ g'(x) &= 2 \\ 2x - 4 &= 2 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

x-koordinaten til P er $\underline{\underline{3}}$.

23. Bestem tangenthældning.

Opgave

En funktion g er givet ved

$$g(x) = \tfrac{1}{3}\cdot x^3 + 3\cdot x \ .$$

Bestem tangenthældningen i graf-punktet med x-koordinat 1

Bevarelse

$$g(x) = \tfrac{1}{3}\cdot x^3 + 3\cdot x \ .$$

tangenthældning = $g'(1)$ Se 2d.

tangenthældning = $1^2 + 3$ da $g'(x) = x^2 + 3$ Se ramme 7 og 8.

tangenthældning = 4

Tangenthældningen i graf-punktet med x-koordinat 1 er $\underline{\underline{4}}$.

24. Har grafen en tangent med hældningskoefficienten a?

Opgave

En funktion g er givet ved

$$g(x) = \tfrac{1}{3}\cdot x^3 + 3\cdot x \ .$$

Er der et punkt på g-grafen så tangenten i dette punkt har hældningskoefficienten 2 ?

Bevarelse

$$g(x) = \tfrac{1}{3}\cdot x^3 + 3\cdot x \ .$$

tangenthældning = 2

$g'(x) = 2$ Se 2d.

$x^2 + 3 = 2$ Se ramme 7 og 8.

$x^2 = -1$

Dette er ikke opfyldt for noget tal x da et tal i anden aldrig er negativt.

Der er ikke et punkt på grafen så tangenten i dette punkt har hældningskoefficienten 2.

25. Bestem $f(x_0)$ ud fra tangents ligning.

Opgave

Linjen l: $y = 4x - 1$ er tangent til grafen for f i punktet med x-koordinat 7 .
Bestem $f(7)$.

Bevarelse

$f(7)$ er y-koordinaten til grafpunktet med x-koordinat 7 .

Da dette punkt ligger på l, kan dets y-koordinat bestemmes af l's ligning:

$$y = 4\cdot 7 - 1$$
$$y = 27$$

Dvs. $\underline{\underline{f(7) = 27}}$

26. Er linjen tangent?

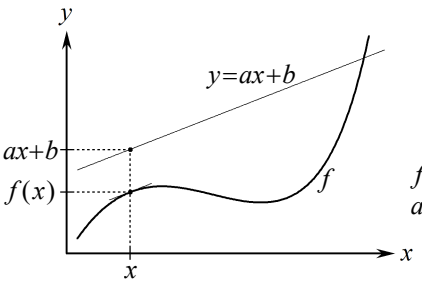
En linje er tangent til grafen for en funktion i et punkt netop hvis der både gælder at

y-koordinat er ens

og

tangenthældning er ens.

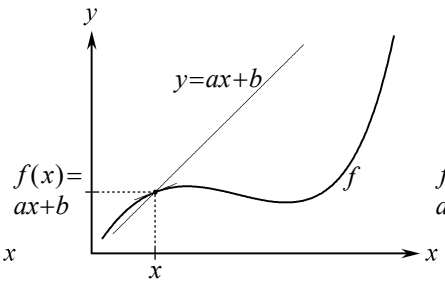
Dette er vist på de tre figurer.



y-koordinat er forskellig: $f(x) \neq ax+b$

Tangenthældning er ens: $f'(x) = a$

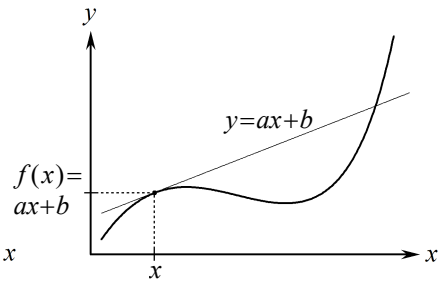
Linjen er ikke tangent.



y-koordinat er ens: $f(x) = ax+b$

Tangenthældn. er forskellig: $f'(x) \neq a$

Linjen er ikke tangent.



y-koordinat er ens: $f(x) = ax+b$

Tangenthældning er ens: $f'(x) = a$

Linjen er tangent.

Opgave

Er linjen $l:\ y = 9x+17$ tangent til grafen for funktionen $f(x) = x^3 - 3x + 1$?

Besvarelse

$l:\ y = 9x+17$ og $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

Hvis l er tangent til f-graf: I røringspunktet skal f-grafens tangenthældning $f'(x)$ være lig l's hældningskoefficient som er 9:

$f'(x) = 9$

$3x^2 - 3 = 9$

Nspire løser ligning $3x^2 - 3 = 9$ mht. x og får

$x = -2$ eller $x = 2$

Nspire: solve(3·x^2−3=9,x) ▸ x=-2 or x=2

Hvis $x = 2$ er

y-koordinat på f-graf lig f(2) = $2^3 - 3\cdot 2 + 1 = 3$

y-koordinat på l lig y = $9\cdot 2 + 17 = 35$

så y-koordinaterne er ikke ens,

så l er ikke tangent i grafpunktet med x-koordinat 2.

Hvis $x = -2$ er

y-koordinat på f-graf lig f(−2) = $(-2)^3 - 3\cdot -2 + 1 = -1$

y-koordinat på l lig y = $9\cdot -2 + 17 = -1$

Hvis du skriver i hånden, skal der parentes om -2 efter gangetegn.

så y-koordinaterne er ens, og vi vidste i forvejen at tangenthældningerne er ens,

så l er tangent i grafpunktet med x-koordinat 2.

Linjen l er tangent til grafen for f.

27. Bestem røringspunkt for tangent.

Opgave

Linjen $l:\ y = 9x + 17$ er tangent til grafen for funktionen $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Bestem koordinatsættet til røringspunktet.

Besvarelse

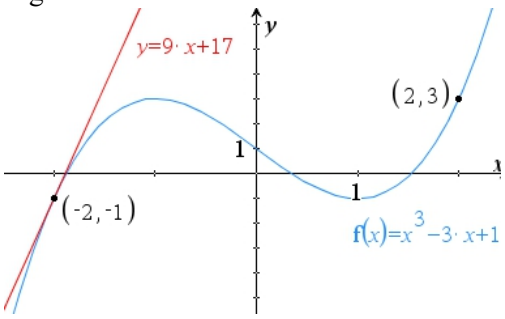
$l:\ y = 9x + 17$ er tangent til graf for $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

I røringspunktet skal f-grafens tangenthældning $f'(x)$ være lig l's hældningskoefficient som er 9:

$$f'(x) = 9$$

$$3x^2 - 3 = 9$$



Nspire løser ligning $3x^2 - 3 = 9$ mht. x og får

$x = -2$ eller $x = 2$

Nspire: solve(3·x^2−3=9,x) ▸ x=-2 or x=2

Hvis $x = 2$ er

y-koordinat på f-graf lig f(2) = $2^3 - 3\cdot 2 + 1 = 3$

y-koordinat på l lig y = $9\cdot 2 + 17 = 35$

så y-koordinaterne er ikke ens,

så grafpunkt med x-koordinat 2 er ikke røringspunkt.

Hvis $x = -2$ er

y-koordinat på f-graf lig f(−2) = $(-2)^3 - 3\cdot -2 + 1 = -1$

y-koordinat på l lig y = $9\cdot -2 + 17 = -1$

Hvis du skriver i hånden, skal der parentes om -2 efter gangetegn.

så y-koordinaterne er ens, og vi vidste i forvejen at tangenthældningerne er ens,

så grafpunkt med x-koordinat -2 er røringspunkt.

Koordinatsættet til røringspunktet er $\underline{\underline{(-2, -1)}}$.

28. Vinkel og tangent.

Opgave

Linjen l er tangent til grafen for $f(x) = 0{,}1875x^2$ i punktet $P(4\ ,\ 3)$.

Bestem vinklen v mellem vandret og tangenten l .

Besvarelse

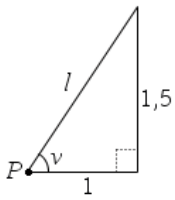
Figuren viser grafen for $f(x) = 0{,}1875x^2$ og tangenten l i punktet $P(4\ ,\ 3)$ og vinklen v mellem vandret og l .

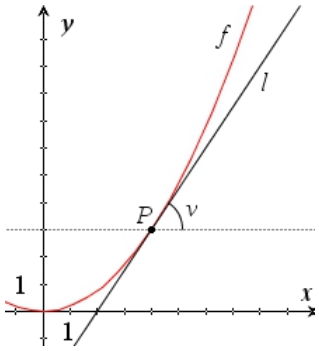
$f'(x) = 0{,}1875 \cdot 2x = 0{,}375x$ så l's hældningskoefficient er $f'(4) = 0{,}375 \cdot 4 = 1{,}5$.

Af den viste trekant får vi

$\tan(v) = 1{,}5$ så $v = \tan^{-1}(1{,}5) = 56{,}3099°$

dvs. $\underline{\underline{v = 56{,}3°}}$.





29. Bestem konstant i forskrift.

29a. Opgave $f(x)=a\cdot x^4$ og $f(1)=3$. Bestem a.

Besvarelse $f(x)=a\cdot x^4$ og $f(1)=3$, så $a\cdot 1^4=3$, så $\underline{\underline{a=3}}$.

29b. Opgave Punktet $(1,3)$ ligger på grafen for $f(x)=a\cdot x^4$. Bestem a.

Besvarelse Da $(1,3)$ ligger på grafen for $f(x)=a\cdot x^4$, er $a\cdot 1^4=3$, så $\underline{\underline{a=3}}$.

29c. Opgave $f(x)=a\cdot x^4$ og $f'(1)=8$. Bestem a.

Besvarelse $f(x)=a\cdot x^4$ og $f'(1)=8$. $f'(x)=4a\cdot x^3$ så $4a\cdot 1^3=8$, dvs. $\underline{\underline{a=2}}$.

29d. Opgave Graf for $f(x)=a\cdot x^4$ har i punkt med x-koordinat 1 tangenthældning 8. Bestem a.

Besvarelse $f(x)=a\cdot x^4$ så $f'(x)=4a\cdot x^3$. For x=1 er tangenthældning 8, så $4a\cdot 1^3=8$, dvs. $\underline{\underline{a=2}}$.

30. Bestem røringspunkt for tangent gennem givet punkt.

Opgave

P er IKKE røringspunkt for tangenten!

Punktet $P(0,2)$ ligger på linjen l som er tangent til grafen for $f(x)=x^3+x$.
Bestem det punkt $Q(x_0,y_0)$ hvor l rører grafen for f.

Besvarelse

$f(x)=x^3+x$. $P(0,2)$ ligger på tangenten l som rør f-graf i $Q(x_0,y_0)$.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^3+x\right)=3\cdot x^2+1$$ *udregnet af Nspire*

I stedet kan vi skrive $f'(x)=3x^2+1$ da f er så nem at differentiere i hovedet.

Vi skriver ligningen for l udtrykt ved x_0:

Vi bruger metoden fra ramme 19.

Da $Q(x_0,y_0)$ ligger på f-grafen, er

$$y_0=x_0^3+x_0$$

Da $Q(x_0,y_0)$ er røringspunkt for l, er l's hældningskoefficient

$$a=f'(x_0)=3x_0^2+1$$

l har ligningen

$$y=a(x-x_0)+y_0$$

dvs.

$$l:\quad y=(3x_0^2+1)(x-x_0)+x_0^3+x_0$$

Vi indsætter P's koordinater i l's ligning for at bestemme x_0:

l's ligning er sand for $(x,y)=(0,2)$ da $P(0,2)$ ligger på l:

$$2=(3x_0^2+1)(0-x_0)+x_0^3+x_0$$

Nspire løser ligningen $2=(3x_0^2+1)(0-x_0)+x_0^3+x_0$ mht. x_0 og får $x_0=-1$.

Nspire: $\text{solve}\left(2=\left(3\cdot x0^2+1\right)\cdot(0-x0)+x0^3+x0,x0\right)$ ▸ $x0=-1$

Vi udregner y_0:

Da $Q(x_0,y_0)$ ligger på f-grafen, er

$$y0=f(-1)=(-1)^3+-1=-2$$

Hvis du skriver i hånden, skal der parentes om -1 efter + .

l's røringspunkt er $\underline{\underline{Q(-1,-2)}}$

Væksthastighed

31. Væksthastighed.

Figuren viser grafen for en funktion $f(x)$ hvor

x = antal dage efter at vi begyndte at måle

$f(x)$ = plantens højde i mm

På figuren ser vi at

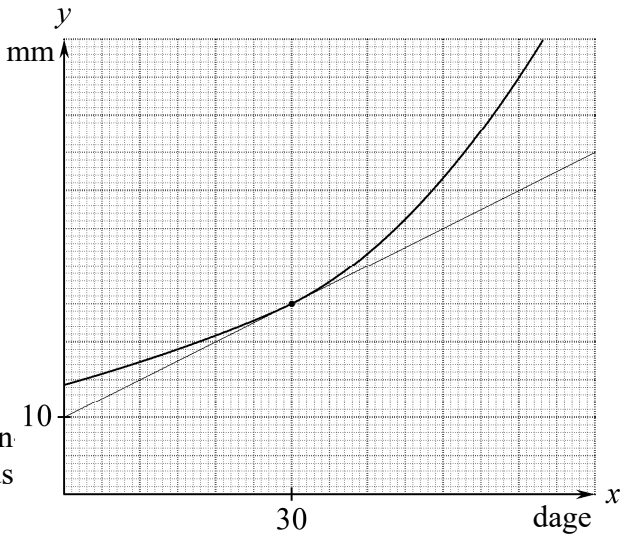
$f'(30) = 0{,}5$

og at omkring tidspunktet 30 dage vil plantens højde blive ca. 0,5 mm højere pr. dag.

Vi siger at

på tidspunktet 30 dage efter at vi begyndte at måle, er væksthastigheden lig 0,5 mm pr. dag.

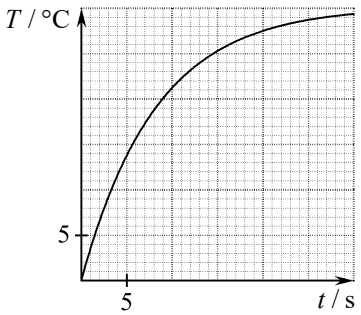
I et lille tidsum på x-aksen er grafen næsten sammenfaldende med den tegnede tangent. Det er i dette tidsrum at væksthastigheden er ca. 0,5 mm pr. dag.



32. Aflæs størrelsen når tidspunktet er kendt.

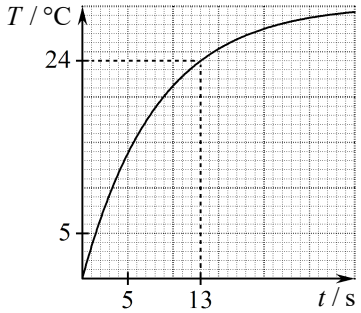
Opgave

Grafen viser hvordan temperaturen T er vokset.
Tiden t måles i sekunder.
Bestem temperaturen på tidspunktet 13 sekunder.



Besvarelse

Vi finder grafpunktet hvor $t = 13$, og aflæser at for dette punkt er $T = 24$.
Dette har vi vist på skitsen.

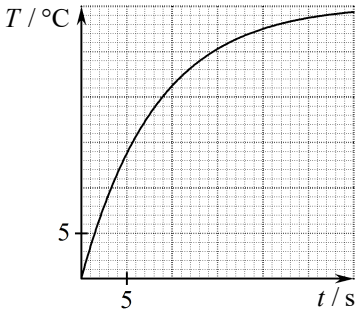


På tidspunktet 13 sekunder er temperaturen $\underline{\underline{24\,°\mathrm{C}}}$.

33. Aflæs væksthastigheden når tidspunktet er kendt.

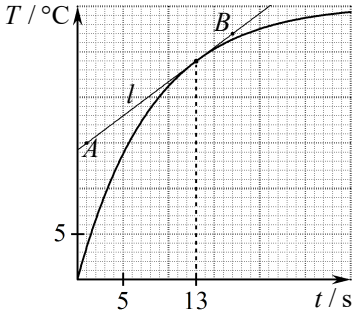
Opgave

Grafen viser hvordan temperaturen T er vokset.
Tiden t måles i sekunder.
Bestem temperaturens væksthastighed på tidspunktet 13 sekunder.



Besvarelse

Vi finder grafpunktet hvor $t = 13$, og
vi tegner tangenten l i dette punkt, og
på l aflæser vi punkterne $A(1, 15)$ og $B(17, 27)$.
Alt dette har vi vist på skitsen.



l 's hældningskoefficient er temperaturens væksthastighed på tidspunktet 13 sekunder.

l 's hældningskoefficient er

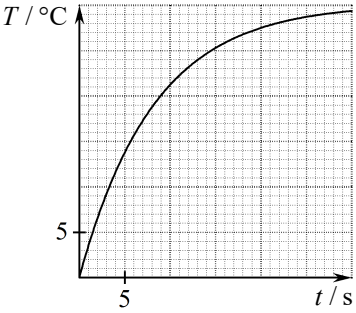
$$\frac{27-15}{17-1} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Temperaturens væksthastighed på tidspunktet 13 sekunder er $\underline{\underline{0{,}75\ °\text{C pr. sekund}}}$.

34. Aflæs tidspunktet når størrelsen er kendt.

Opgave

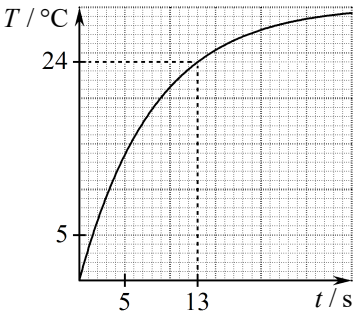
Grafen viser hvordan temperaturen T er vokset.
Tiden t måles i sekunder.
Bestem det tidspunkt hvor temperaturen er 24 °C.



Besvarelse

Vi finder grafpunktet hvor $T = 24$, og
aflæser at for dette punkt er $t = 13$.
Dette har vi vist på skitsen.

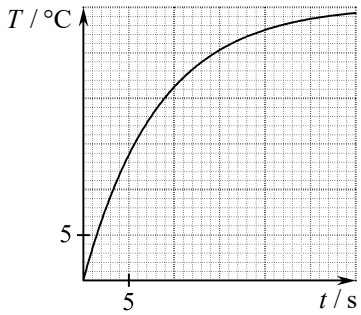
Temperaturen er 24 °C på tidspunktet $\underline{\underline{13\,\text{sekunder}}}$.



35. Aflæs tidspunktet når væksthastigheden er kendt.

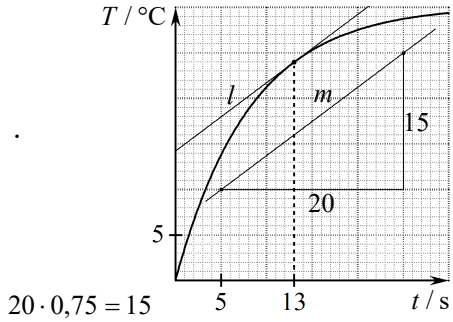
Opgave

Grafen viser hvordan temperaturen T er vokset.
Tiden t måles i sekunder.
Bestem det tidspunkt hvor temperaturens væksthastighed er 0,75 °C pr. sekund.



Besvarelse

Vi tegner en linje m som har hældningskoefficient $0{,}75$, og vi lægger en lineal langs m og parallelforskyder til linjen er en tangent l til grafen, og vi aflæser at for røringspunktet er $t = 13$.
Alt dette har vi vist på figuren.
Væksthastigheden for $t = 13$ er l's hældningskoefficient:
På tidspunktet $\underline{\underline{13 \text{ sekunder}}}$ er temperaturens væksthastighed 0,75 °C pr. sekund.



$20 \cdot 0{,}75 = 15$

36. Udregn størrelsen når tidspunktet er kendt.

Opgave

Vægten af et dyr kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$$

hvor x er dage og $f(x)$ er vægten i gram.
Bestem dyrets vægt på tidspunktet 30 dage.

Besvarelse

$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$ er dyrets vægt på tidspunktet x dage.

$$f(30) = 56 \cdot (1.02)^{30} + 240 = 341.436$$

Hvis du skriver i hånden, skal der ikke parentes om 1,02 .

Dyrets vægt er $\underline{\underline{341 \text{ gram}}}$ på tidspunktet 30 dage.

37. Udregn væksthastigheden når tidspunktet er kendt.

Opgave

Vægten af et dyr kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$$

hvor x er dage og $f(x)$ er vægten i gram.

Bestem den hastighed hvormed dyrets vægt vokser på tidspunktet 30 dage.

Besvarelse

$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$ er dyrets vægt på tidspunktet x dage.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(56 \cdot (1.02)^x + 240\right) = 1.10895 \cdot (1.02)^x$$

udregnet af Nspire

$$f'(30) = 1.10895 \cdot (1.02)^{30} = 2.00871$$

Hvis du skriver i hånden, skal der ikke parentes om 1,02 .

På tidspunktet 30 dage vokser dyrets vægt med hastigheden $\underline{\underline{2{,}0 \text{ gram pr. dag}}}$.

38. Udregn tidspunktet når størrelsen er kendt.

Opgave

Vægten af et dyr kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$$

hvor x er dage og $f(x)$ er vægten i gram.

Bestem det tidspunkt hvor dyrets vægt er 500 gram.

Besvarelse

$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$ er dyrets vægt på tidspunktet x dage.

vægt = 500

$f(x) = 500$

$56 \cdot 1{,}02^x + 240 = 500$

solve$\left(56 \cdot (1.02)^x + 240 = 500, x\right)$ ▸ $x = 77.5316$

Nspire løser ligning $56 \cdot 1{,}02^x + 240 = 500$ mht. x og får $x = 77{,}5316$.

Dyrets vægt er 500 gram på tidspunktet $\underline{\underline{78}}$ dage.

39. Udregn tidspunktet når væksthastigheden er kendt.

Opgave

Vægten af et dyr kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$$

hvor x er dage og $f(x)$ er vægten i gram.

Bestem det tidspunkt hvor dyrets vægt vokser med hastigheden 4 gram pr. dag.

Besvarelse

$f(x) = 56 \cdot 1{,}02^x + 240$ er dyrets vægt på tidspunktet x dage.

f '(x) = $\frac{d}{dx}\left(56 \cdot (1.02)^x + 240\right) = 1.10895 \cdot (1.02)^x$ *udregnet af Nspire*

Hvis du skriver i hånden, skal der ikke parentes om 1,02 .

Vi får

hastighed = 4

$f'(x) = 4$ Se 2e.

$1{,}10895 \cdot 1{,}02^x = 4$

solve$\left(1.10895 \cdot (1.02)^x = 4, x\right)$ ▸ $x = 64.7834$

Nspire løser ligningen $1{,}10895 \cdot 1{,}02^x = 4$ mht. x og får $x = 64{,}7834$.

På tidspunktet $\underline{\underline{65 \text{ dage}}}$ vokser dyrets vægt med hastigheden 4 gram pr. dag.

40. Du skal ikke altid differentiere for at finde hastighed!

Opgave Et linjestykkes længde ændres sådan at $f(x) = x^2$ hvor $f(x)$ er længden på tidspunktet x .

Hvor hurtigt ændres længden på tidspunktet 3 ?

Besvarelse $f(x)$ er længden på tidspunktet x .

$f(x) = x^2$. $f'(x) = 2x$. $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$. På tidspunktet 3 ændres længden med hastigheden $\underline{\underline{6}}$.

Opgave Et linjestykkes længde ændres sådan at $f(x) = x^2$ hvor $f(x)$ er den hastighed som længden ændres med på tidspunktet x .

Hvor hurtigt ændres længden på tidspunktet 3 ?

Besvarelse $f(x)$ er den hastighed som længden ændres med på tidspunktet x .

$f(x) = x^2$. $f(3) = 3^2 = 9$. På tidspunktet 3 ændres længden med hastigheden $\underline{\underline{9}}$.

Monotoni

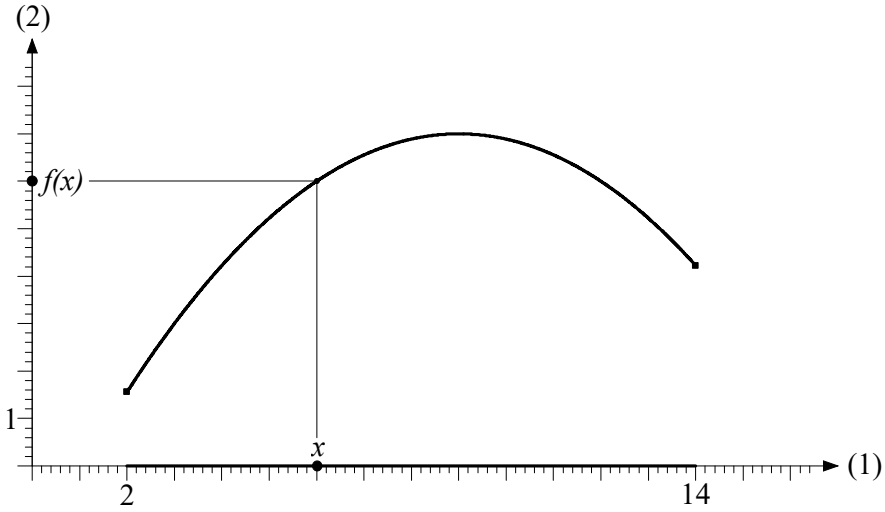
41. Voksende og aftagende.

Figuren viser en interaktiv figur fra en computerskærm. Når vi trækker x-punktet hen på et tal x kan vi aflæse funktionsværdien $f(x)$.

På figuren kan vi se:

Når vi trækker $\boldsymbol{x}$ gennem tallene fra og med 2 til og med 9, vil $\boldsymbol{f(x)}$ hele tiden blive større.

Når vi trækker $\boldsymbol{x}$ gennem tallene fra og med 9 til og med 14, vil $\boldsymbol{f(x)}$ hele tiden blive mindre.



Som bekendt siger man:

$f(x)$ er voksende i intervallet $2 \le x \le 9$

$f(x)$ er aftagende i intervallet $9 \le x \le 14$

<u>Er $f(x)$ både aftagende og voksende i 9 ?</u>

Nej, vi taler ikke om at en funktion er voksende i <u>ét tal</u>. Vi taler om at en funktion er voksende i et <u>interval</u>. Der skal være mindst to y-værdier hvis vi skal kunne tale om at y er blevet større eller mindre.

<u>At</u> $f(x)$ er voksende i intervallet $2 \le x \le 9$

<u>betyder at</u> når vi i intervallet vælger større og større x-værdi,
så bliver y-værdien $f(x)$ større og større.

<u>At</u> $f(x)$ er aftagende i intervallet $9 \le x \le 14$

<u>betyder at</u> når vi i intervallet vælger større og større x-værdi,
så bliver y-værdien $f(x)$ mindre og mindre.

42. Hvad er monotoniforhold?

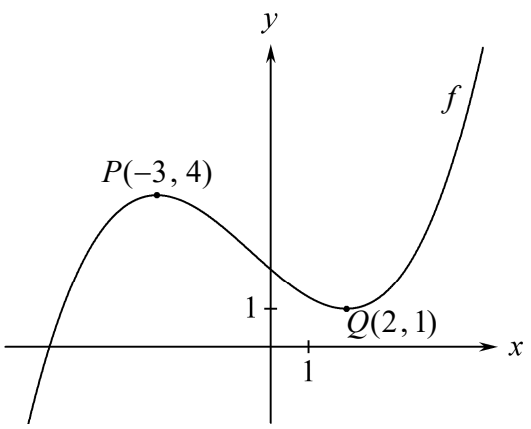
I nogle opgaver står at vi skal

<u>bestemme monotoniforholdene</u>

for en funktion.

<u>Det betyder at vi skal skrive</u>

i hvilke x-intervaller funktionen aftager, og
i hvilke x-intervaller funktionen vokser.



På figuren er vist grafen for et tredjegradspolynomium.

<u>Monotoniforholdene kan vi skrive sådan:</u>

$f(x)$ er voksende i intervallet $x \le -3$

$f(x)$ aftagende i intervallet $-3 \le x \le 2$

$f(x)$ voksende i intervallet $2 \le x$

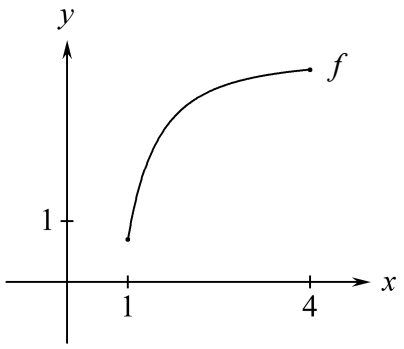
43. Regel for at finde monotoniforhold.

<u>Hvis $f'(x)$ er positiv</u>

$(*)$ tangenthældningen $f'(x)$ er positiv for hvert tal x i intervallet $1 \le x \le 4$.

$(**)$ $f(x)$ er voksende i intervallet $1 \le x \le 4$.

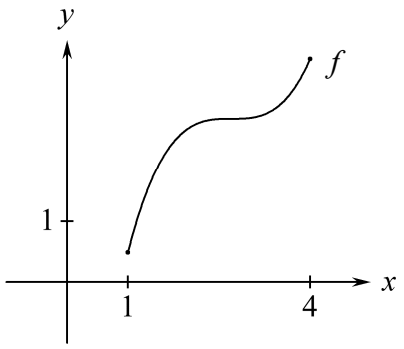
Hvis man prøver at tegne grafen sådan at $(*)$, men ikke $(**)$ gælder, så bliver man overbevist om at det ikke kan lade sig gøre. Man kan bevise at hvis $(*)$ gælder, så gælder $(**)$ også.



<u>Hvis der er undtagelser fra at $f'(x)$ er positiv</u>

Funktionen $f(x)$ på nederste figur er voksende selv om der er ét punkt hvori tangenthældningen er 0.

Selv om der er enkelte undtagelser fra $(*)$, kan man slutte at $(**)$ gælder.



<u>Sætning 43a</u>

Hvis $f'(x)$ er <u>positiv</u> for alle x i et interval, evt. med endeligt mange undtagelser,
så er $f(x)$ <u>voksende</u> i intervallet.

Hvis $f'(x)$ er <u>negativ</u> for alle x i et interval, evt. med endeligt mange undtagelser,
så er $f(x)$ <u>aftagende</u> i intervallet.

44. Bestem monotoniforhold.

Opgave

Bestem monotoniforholdene for funktionen

$$f(x)=\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{7}{3}\ .$$

Besvarelse 1

$$f(x)=\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{7}{3}$$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\cdot x^4+\frac{2}{3}\cdot x^3+\frac{7}{3}\right)=x^3+2\cdot x^2 \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

$f'(x)$ kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor $f'(x)=0$, dvs. hvor $x^3+2x^2=0$.

Nspire løser ligningen $x^3+2x^2=0$ mht. x og får $x=-2$ eller $x=0$:

$$\text{solve}\left(x^3+2\cdot x^2=0,x\right) \blacktriangleright x=-2 \text{ or } x=0$$

Disse to tal deler tallinjen op i tre intervaller. I hvert af disse vælger vi et tal og udregner f' :

$f'(-3) = (-3)^3+2(-3)^2 = -9$ så $f'(x)$ negativ for $x<-2$

$f'(-1) = (-1)^3+2(-1)^2 = 1$ så $f'(x)$ positiv for $-2<x<0$

$f'(1) = 1^3+2\cdot 1^2 = 3$ så $f'(x)$ positiv for $0<x$

Af dette følger at monotoniforholdene er følgende:

$f(x)$ er aftagende i intervallet $x\le -2$

$f(x)$ er voksende i intervallet $-2\le x$

Husk at kontrollere at tallene der afgrænser intervallerne, er de tal du fik som løsning til $f'(x)=0$.

Oversigt:

x :		-2		0	
$f'(x)$:	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$:	↘		↗		↗

Besvarelse 2

$$f(x):=\frac{1}{4}\cdot x^4+\frac{2}{3}\cdot x^3+\frac{7}{3} \blacktriangleright \textit{Udført}$$

$$fm(x):=\frac{d}{dx}(f(x)) \blacktriangleright \textit{Udført} \qquad fm(x)=x^3+2\cdot x^2 \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

f'(x) kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor f'(x)=0.

Nspire løser ligningen f'(x)=0 mht. x og får $x=-2$ eller $x=0$:

$$\text{solve}(fm(x)=0,x) \blacktriangleright x=-2 \text{ or } x=0$$

De to tal −2 og 0 deler tallinjen op i tre intervaller.

I hvert af disse vælger vi et tal og udregner f':

$fm(-3)=-9$ så f'(x) er negativ for x<−2

$fm(-1)=1$ så f'(x) er positiv for −2<x<0

$fm(1)=3$ så f'(x) er positiv for 0<x

Af dette følger at monotoniforholdene er følgende:

f(x) er aftagende i intervallet x≤−2 og f(x) er voksende i intervallet −2≤x

45. Gør rede for at f er voksende (eller at f er aftagende).

Opgave En funktion f er givet ved $f(x) = 22 + 14x - e^{-4x}$.

Bestem $f'(x)$ og gør rede for at f er voksende.

Besvarelse $f(x) = 22 + 14x - e^{-4x}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(22 + 14\cdot x - e^{-4\cdot x}\right) = 4\cdot e^{-4\cdot x} + 14$$ *udregnet af Nspire*

Da e^{-4x} altid er positiv, er $f'(x)$ positiv, og så er f voksende.

Bemærkning: Hvis $f(x) = e^{-4x} - x$, er $f'(x) = -4e^{-4x} - 1$.

Da e^{-4x} altid er positiv, er $f'(x)$ negativ, så f er aftagende.

46. Bestem k så f er voksende (eller så f er aftagende).

Opgave En funktion f er givet ved $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + kx$.

Bestem de værdier af k for hvilke f er voksende.

Besvarelse

$$f'(x) = x^2 + k$$

Hvis $k > 0$ er $f'(x)$ positiv, da $x^2 \geq 0$, så f er voksende.
Hvis $k = 0$ er $f'(x)$ lig 0 når x er 0, og ellers positiv, så f er voksende.
Hvis $k < 0$ er $f'(x)$ negativ når x er 0, så f er ikke voksende.

f er voksende netop når $\underline{\underline{k \geq 0}}$.

Bemærkning: Hvis $f'(x) = (k-2)e^x$, er $f'(x)$ negativ netop når $k < 2$,
så f er aftagende netop når $\underline{\underline{k < 0}}$.

47. Tegn f-graf ud fra f'-fortegn m.m.

Opgave

Tegn for $-6 \leq x \leq 10$ en mulig graf for en funktion f der opfylder at

$$f(-3) = 6 \text{ og } f(8) = -2$$

og hvor fortegn og nulpunkter for f' er som vist på tallinjen:

x:		-6		-3		3		8		10
$f'(x)$:			+	0	–	0	–	0	+	

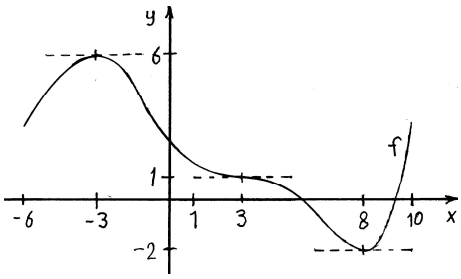
Besvarelse

Når $f(m) = n$, går f-grafen gennem punktet (m,n) .

f er aftagende i x-intervaller hvor $f'(x)$ er negativ.

f er voksende i x-intervaller hvor $f'(x)$ er positiv.

For de x-værdier hvor $f'(x)$ er 0, har grafen vandret tangent.

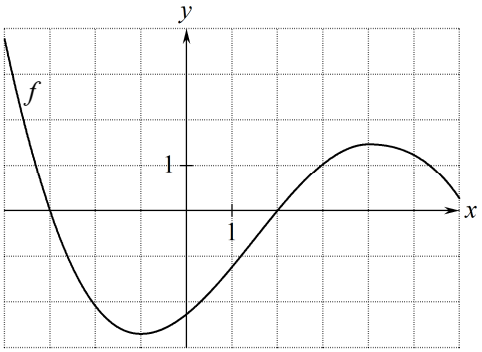


48. Bestem monotoniforhold for f ud fra f-graf.

Opgave

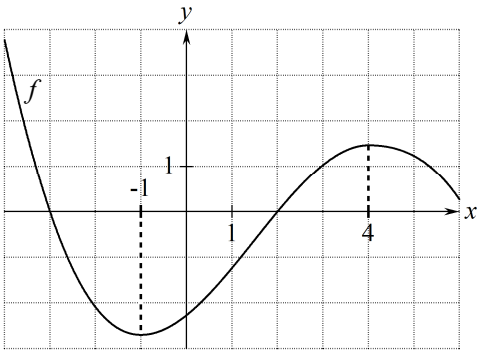
Figuren viser grafen for en funktion f.

Bestem monotoniforholdene for f i intervallet $-4 \le x \le 6$.



Besvarelse

På figuren har vi vist hvordan vi aflæser at x-værdierne for de lokale ekstrema er $x = -1$ og $x = 4$.



På figuren ser vi at

f er aftagende i intervallet $-4 \le x \le -1$

f er voksende i intervallet $-1 \le x \le 4$

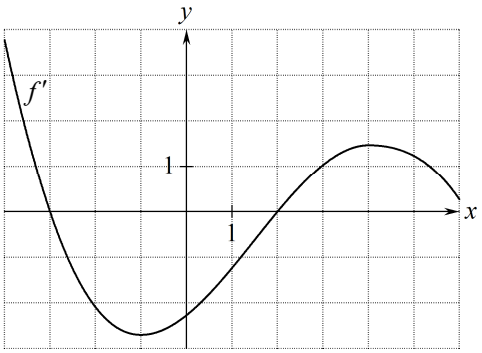
f er aftagende i intervallet $4 \le x \le 6$

49. Bestem monotoniforhold for f ud fra f'-graf.

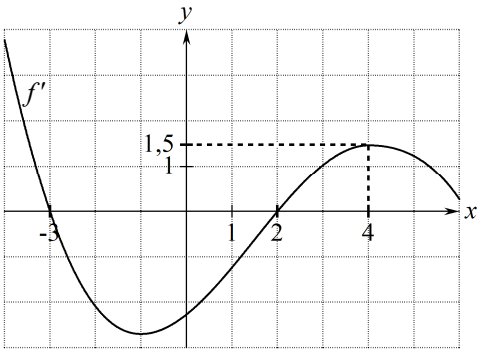
Opgave

Figuren viser grafen for den afledede funktion f' for en funktion f.

Bestem monotoniforholdene for f i intervallet $-4 \le x \le 6$.



Besvarelse



På figuren har vi vist hvordan vi aflæser at $f'(4) = 1{,}5$.

På næsten samme måde kan vi aflæse $f'(x)$ for andre værdier af x end 4. F.eks. ser vi at

$f'(x)$ er 0 når x er -3 eller 2

og at

$f'(x)$ er positiv for $-4 < x < -3$

$f'(x)$ er negativ for $-3 < x < 2$

$f'(x)$ er positiv for $2 < x < 6$

Heraf følger at

f er voksende i intervallet $-4 \le x \le -3$

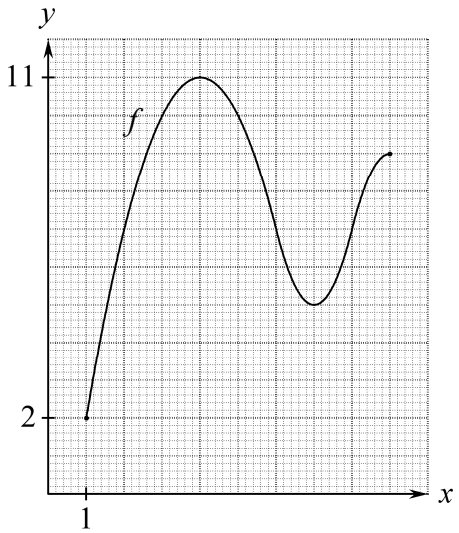
f er aftagende i intervallet $-3 \le x \le 2$

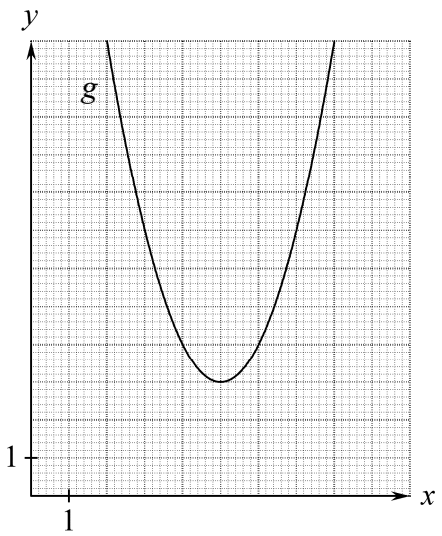
f er voksende i intervallet $2 \le x \le 6$

> På f-graf er $f'(x)$ lig tangenthældning.
>
> På f'-graf er $f'(x)$ lig y-koordinat.
>
> På f'-graf er $(f')'(x)$ lig tangenthældning.

Ekstrema

50. Maksimum og minimum.





Maksimum for f er den største y-koordinat til et punkt på f-grafen. Vi ser at

maksimum for f er $y = 11$. Maksimums**stedet** for f er $x = 4$.

Minimum for f er den mindste y-koordinat til et punkt på f-grafen. Vi ser at

minimum for f er $y = 2$. Minimums**stedet** for f er $x = 1$.

Grafen for g er en parabel hvor grenene går uendelig højt op.

Der er ikke noget punkt på grafen der har den største y-koordinat
da man altid kan afsætte et punkt højere oppe på grafen, så

funktionen g har ikke noget maksimum.

Når vi skriver hvad maksimum eller minimum er,
så skriver vi normalt også hvad punktets x-koordinat er:

f har maksimum for $x = 4$ og maksimum er $y = 11$

f har minimum for $x = 1$ og minimum er $y = 2$

Undertiden er det skrevet kortere, f.eks:

f har maksimum **i** 4 og maksimum **er** 11 .

f har minimum **i** 1 og minimum **er** 2 .

Størsteværdi og mindsteværdi for en funktion er det samme som hhv. maksimum og minimum.

I nogle opgaver står at vi skal bestemme ekstrema. Dette betyder at vi skal finde maksimum hvis der er et maksimum, og minimum hvis der er et minimum.

Ekstremum er en fællesbetegnelse for maksimum og minimum. Ordet ekstremum hedder i flertal ekstremummer eller ekstrema. Det er den sidste form der bruges i eksamensopgaver.
Når f har ekstremum for en værdi af x, så siger man at denne værdi er et ekstremums**sted**.

51. Bestem med $f'(x)$ den værdi af x hvor y er størst.

Opgave Højden af en figur er givet ved $f(x) = 86 - x^2 - \frac{16}{x}$, $\frac{1}{5} < x < 9$,

hvor x er figurens bredde, og $f(x)$ er figurens højde.

Bestem bredden så højden bliver størst mulig.

Besvarelse 1 $f(x) = 86 - x^2 - \frac{16}{x}$, $\frac{1}{5} < x < 9$, hvor figurs bredde og højde er x og $f(x)$.

Vi bestemmer monotoniforholdene for f:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(86 - x^2 - \frac{16}{x}\right) = \frac{16}{x^2} - 2\cdot x \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

$f'(x)$ kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor $f'(x) = 0$, dvs. hvor $\frac{16}{x^2} - 2x = 0$.

Nspire løser ligningen $x^3 + 2x^2 = 0$ mht. x for $\frac{1}{5} < x < 9$ og får $x = -2$:

$$\text{solve}\left(\frac{16}{x^2} - 2\cdot x = 0, x\right) \,|\, \frac{1}{5} < x < 9 \;\blacktriangleright\; x = 2$$

Vi udregner $f'(x)$ i en x-værdi på hver side af 2:

$f'(1) = \frac{16}{1^2} - 2\cdot 1 = 14$ så $f'(x)$ er positiv for $\frac{1}{5} < x < 2$

$f'(4) = \frac{16}{4^2} - 2\cdot 4 = -7$ så $f'(x)$ er negativ for $2 < x < 9$.

Heraf slutter vi følgende monotoniforhold:

f er voksende i intervallet $\frac{1}{5} < x \le 2$ og f er aftagende i intervallet $2 \le x < 9$.

Vi bestemmer bredden så højden er størst mulig:

Af monotoniforholdene følger: $f(x)$ er størst mulig når $x = 2$, dvs.

Højden bliver størst mulig når bredden er $\underline{\underline{2}}$.

Besvarelse 2 Vi bestemmer monotoniforholdene for f:

$$f(x) := 86 - x^2 - \frac{16}{x} \;\blacktriangleright\; \textit{Udført} \qquad \frac{1}{5} < x < 9$$

$$fm(x) := \frac{d}{dx}(f(x)) \;\blacktriangleright\; \textit{Udført} \qquad fm(x) = \frac{16}{x^2} - 2\cdot x \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

f'(x) kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor f'(x)=0.

Nspire løser ligningen f'(x)=0 mht. x og får $x=2$:

$$\text{solve}(fm(x) = 0, x) \;\blacktriangleright\; x = 2$$

Vi udregner f '(x) i en x−værdi på hver side af 2:

$fm(1) = 14$ så f '(x) er positiv for $\frac{1}{5} < x < 2$

$fm(4) = -7$ så f '(x) er negativ for $2 < x < 9$

Heraf slutter vi følgende monotoniforhold:

f er voksende i intervallet $\frac{1}{5} < x \le 2$ og f er aftagende i intervallet $2 \le x < 9$

Vi bestemmer bredden så højden er størst mulig:

Af monotoniforholdene følger: f(x) er størst mulig når x=2, dvs.

Højden bliver størst mulig når bredden er 2 .

52. Bestem med $f'(x)$ den største værdi af y.

Opgave Højden af en figur er givet ved $f(x) = 86 - x^2 - \frac{16}{x}$, $\frac{1}{5} < x < 9$,

hvor x er figurens bredde, og $f(x)$ er figurens højde.

Bestem den størst mulige højde.

Besvarelse 1 $f(x) = 86 - x^2 - \frac{16}{x}$, $\frac{1}{5} < x < 9$, hvor figurs bredde og højde er x og $f(x)$.

Vi bestemmer monotoniforholdene for f:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(86 - x^2 - \frac{16}{x}\right) = \frac{16}{x^2} - 2\cdot x \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

$f'(x)$ kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor $f'(x) = 0$, dvs. hvor $\frac{16}{x^2} - 2x = 0$.

Nspire løser ligningen $x^3 + 2x^2 = 0$ mht. x for $\frac{1}{5} < x < 9$ og får $x = -2$:

$$\text{solve}\left(\frac{16}{x^2} - 2\cdot x = 0, x\right) \,|\, \frac{1}{5} < x < 9 \;\blacktriangleright\; x = 2$$

Vi udregner $f'(x)$ i en x-værdi på hver side af 2:

$f'(1) = \frac{16}{1^2} - 2\cdot 1 = 14$ så $f'(x)$ er positiv for $\frac{1}{5} < x < 2$

$f'(4) = \frac{16}{4^2} - 2\cdot 4 = -7$ så $f'(x)$ er negativ for $2 < x < 9$.

Heraf slutter vi følgende monotoniforhold:

f er voksende i intervallet $\frac{1}{5} < x \le 2$ og f er aftagende i intervallet $2 \le x < 9$.

Vi bestemmer den størst mulige højde:

Af monotoniforholdene følger: $f(x)$ er størst mulig når $x = 2$. $f(2) = 86 - 2^2 - \frac{16}{2} = 74$

Den størst mulige højde er $\underline{\underline{74}}$.

Besvarelse 2 Vi bestemmer monotoniforholdene for f:

$$f(x) := 86 - x^2 - \frac{16}{x} \;\blacktriangleright\; \textit{Udført} \qquad \frac{1}{5} < x < 9$$

$$fm(x) := \frac{d}{dx}(f(x)) \;\blacktriangleright\; \textit{Udført} \qquad fm(x) = \frac{16}{x^2} - 2\cdot x \qquad \textit{udregnet af Nspire}$$

f'(x) kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor f'(x)=0.

Nspire løser ligningen f'(x)=0 mht. x og får $x=2$:

$$\text{solve}(fm(x) = 0, x) \;\blacktriangleright\; x = 2$$

Vi udregner f '(x) i en x−værdi på hver side af 2:

$fm(1) = 14$ så f '(x) er positiv for $\frac{1}{5} < x < 2$

$fm(4) = -7$ så f '(x) er negativ for $2 < x < 9$

Heraf slutter vi følgende monotoniforhold:

f er voksende i intervallet $\frac{1}{5} < x \le 2$ og f er aftagende i intervallet $2 \le x < 9$

Vi bestemmer den størst mulige højde:

Af monotoniforholdene følger: f(x) er størst mulig når x=2. $f(2) = 74$

Den størst mulige højde er 74 .

53. Bestem med $f'(x)$ den værdi af x hvor y er mindst.

Dette gøres som vist i ramme 51 bortset fra at monotoniforholdene nu er aftagende-voksende i stedet for voksende-aftagende, og at vi nu skriver mindst i stedet for størst.

54. Bestem med $f'(x)$ den mindste værdi af y .

Dette gøres som vist i ramme 52 bortset fra at monotoniforholdene nu er aftagende-voksende i stedet for voksende-aftagende, og at vi nu skriver mindst i stedet for størst.

55. Bestem ekstrema.

Når der står "Bestem ekstrema", så skal vi bestemme minimum hvis der er et minimum, og vi skal bestemme maksimum hvis der er et maksimum. Se ramme 52 og 54.

56. Gør rede for at funktionen har et minimum (eller maksimum).

Opgave

Gør rede for at funktionen

$$f(x) = x^3 - 9x + 12 \quad , \qquad x > 0$$

har et minimum.

Metode

Vi bestemmer monotoniforhold for $f(x)$ med metoden fra ramme 44. Herefter skriver vi:

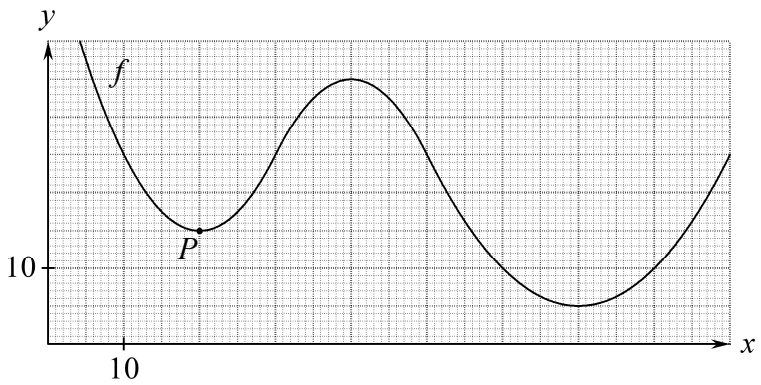
Da $f(x)$ er

aftagende i intervallet $0 < x \le \sqrt{3}$ og voksende i intervallet $\sqrt{3} \le x$

kan vi slutte at

$f(x)$ har minimum for $x = \sqrt{3}$.

57. Lokalt maksimum og minimum.



Figuren viser grafen for en funktion f. I de to ender fortsætter grafen uendelig højt op.

P er grafpunktet med x-koordinat 20 og y-koordinat 15.

Vi kan vælge et stykke af grafen omkring P sådan at 15 er mindste y-koordinat på dette stykke.
Vi siger derfor at

f har lokalt minimum for $x = 20$ og det lokale minimum er $y = 15$.
Tallet 20 er et <u>lokalt minimums**sted**</u>.

15 er ikke minimum da der andre steder på grafen er y-koordinater som er mindre.

Hvis $Q(x_o, y_o)$ er et punkt på grafen for en funktion, og vi kan vælge et stykke af grafen omkring Q sådan at y_o er mindste y-koordinat på dette stykke, så siger vi at

funktionen har <u>lokalt minimum</u> for $x = x_o$ og det lokale minimum er $y = y_o$
Tallet x_o er et <u>lokalt minimums**sted**</u>.

Hvis $Q(x_o, y_o)$ er et punkt på grafen for en funktion, og vi kan vælge et stykke af grafen omkring Q sådan at y_o er største y-koordinat på dette stykke, så siger vi at

funktionen har <u>lokalt maksimum</u> for $x = x_o$ og det lokale maksimum er $y = y_o$
Tallet x_o er et <u>lokalt maksimums**sted**</u>.

Om funktionen fra figuren ovenfor gælder:

f har lokalt minimum for $x = 20$ og det lokale minimum er $y = 15$.

f har lokalt maksimum for $x = 40$ og det lokale maksimum er $y = 35$.

f har lokalt minimum for $x = 70$ og det lokale minimum er $y = 5$.

f har minimum for $x = 70$ og minimum er $y = 5$.

Undertiden er det skrevet kortere, f.eks:

f har minimum **i** 70 og minimum **er** 5.

f har lokalt maksimum **i** 40 og det lokale maksimum **er** 35.

I nogle opgaver står at vi skal bestemme <u>lokale ekstrema</u>. Dette betyder at vi skal finde både de lokale minimummer og de lokale maksimummer.

Ordet ekstremum hedder i flertal ekstremummer eller ekstrema. Det er den sidste form der bruges i eksamensopgaver.

Når f har lokalt ekstremum for en værdi af x, så siger man at denne værdi er et <u>lokalt ekstremums**sted**</u>.

58. Bestem lokale ekstrema.

Opgave Bestem de lokale ekstrema for funktionen $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-18x-90$.

Besvarelse 1 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-18x-90$

Vi bestemmer monotoniforholdene for f:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{3}{2}\cdot x^2-18\cdot x-90\right)=x^2+3\cdot x-18$$ *udregnet af Nspire*

$f'(x)$ kan kun skifte fortegn i de værdier af x hvor $f'(x)=0$, dvs. hvor $x^2+3x-18 = 0$.

Nspire løser ligningen $x^2+3x-18=0$ mht. x og får $x=-6$ eller $x=3$.

$\text{solve}\left(x^2+3\cdot x-18=0,x\right)$ ▸ $x=-6$ or $x=3$

-6 og 3 deler tallinjen op i tre intervaller. I hvert af disse vælger vi et tal og udregner f':

Da $f'(-7) = (-7)^2+3(-7)-18 = 10$ er $f'(x)$ positiv for $x<-6$

Da $f'(0) = 0^2+3\cdot 0-18 = -18$ er $f'(x)$ negativ for $-6<x<3$

Da $f'(4) = 4^2+3\cdot 4-18 = 10$ er $f'(x)$ positiv for $3<x$

Af dette følger at monotoniforholdene er følgende:

$f(x)$ er voksende i intervallet $x\le -6$,
aftagende i intervallet $-6\le x\le 3$ og
voksende i intervallet $3\le x$.

x:		-6		3	
$f'(x)$:	+	0	–	0	+
$f(x)$:	voks		aft		voks

Vi bestemmer de lokale ekstrema: Af monotoniforholdene følger:

der er lokalt maksimum for $x=-6$ og lokalt minimum for $x=3$.

$f(-6) = \frac{1}{3}(-6)^3+\frac{3}{2}(-6)^2-18(-6)-90 = 0$

$f(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3+\frac{3}{2}\cdot 3^2-18\cdot 3-90 = -\frac{243}{2}$

$f(x)$ har lokalt maksimum for $x=-6$ og det lokale maksimum er $y=0$

$f(x)$ har lokalt minimum for $x=3$ og det lokale minimum er $y=-\frac{243}{2}$

Besvarelse 2

Vi bestemmer monotoniforholdene for f:

$f(x):=\frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{3}{2}\cdot x^2-18\cdot x-90$ ▸ *Udført* $fm(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Udført* $fm(x)=x^2+3\cdot x-18$ *udregnet af Ns*

f '(x) kan skifte fortegn i de x hvor f '(x)=0. Nspire løser ligningen f '(x)=0 mht. x og får $x=-6$ eller $x=3$:

$\text{solve}(fm(x)=0,x)$ ▸ $x=-6$ or $x=3$

−6 og 3 deler tallinjen op i tre intervaller. I hvert af disse vælger vi et tal og udregner f ':

$fm(-7)=10$ så f '(x) er positiv for x<−6

$fm(0)=-18$ så f '(x) er negativ for −6<x<3

$fm(4)=10$ så f '(x) er positiv for 3<x

Af dette følger at monotoniforholdene er følgende:

f(x) er voksende i intervallet x≤−6, aftagende i intervallet −6≤x≤3 og voksende i intervallet 3≤x .

Vi bestemmer lokale ekstrema:

Af monotoniforhold følger: der er lokalt maksimum for x = −6 og lokalt minimum for x = 3 .

$f(-6)=0$ og $f(3)=\frac{-243}{2}$

f(x) har lokalt maksimum for x = −6 og det lokale maksimum er y = 0 .

f(x) har lokalt minimum for x = 3 og det lokale minimum er $y=\frac{-243}{2}$.

59. Bestem for hver værdi af a antal løsninger til $f(x)=a$.

Opgave

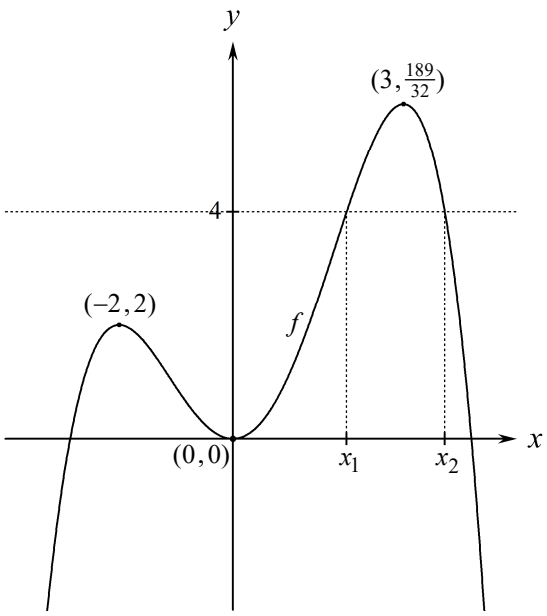
$$f(x)=-\tfrac{3}{32}x^4+\tfrac{1}{8}x^3+\tfrac{9}{8}x^2$$

(a) Undersøg f mht. lokale ekstrema.

(b) Bestem for hver værdi af a antal løsninger til ligningen $f(x)=a$.

Besvarelse af (b)

Af undersøgelsen i (a) følger at grafen for f er som vist på skitsen.



På skitsen har vi vist hvordan vi ser at hvis $a=4$, har $f(x)=a$ to løsninger x_1 og x_2.

På næsten samme måde ser vi:

$a<0$:	0 løsninger
$a=0$:	3 løsninger
$0<a<2$:	4 løsninger
$a=2$:	3 løsninger
$2<a<\frac{189}{32}$:	2 løsninger
$a=\frac{189}{32}$:	1 løsning
$\frac{189}{32}<a$:	0 løsninger

60. Gør rede for at ligning ikke kan have mere end én løsning.

Opgave

For funktionen $f(x)=\sin(x)-\cos(x)+5x$ ser vi på ligningen $f(x)=c$ hvor c er et tal. Gør rede for at denne ligning ikke kan have mere end én løsning.

Besvarelse $f(x)=\sin(x)-\cos(x)+5x$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(\sin(x)-\cos(x)+5\cdot x)=\cos(x)+\sin(x)+5$$

Udregnet af Nspire med matematikfelt indstillet til radianer.

$\cos(x)$ og $\sin(x)$ kan ikke være under –1. Da der lægges 5 til, er resultatet positivt. Da $f'(x)$ er positiv, er $f(x)$ voksende, og kan derfor ikke vær lig c for mere end én værdi af x.

61. Bestem konstant i forskrift ud fra lokalt ekstremum.

Opgave

Funktionen $f(x)=x^3-k\cdot x$ har lokalt minimum for $x=2$. Bestem k .

Besvarelse $f(x)=x^3-k\cdot x$ har lokalt minimum for $x=2$

$$f'(x)=3x^2-k$$

Da f har lokalt minimum for $x=2$, får vi

$$f'(2)=0$$

$$3\cdot 2^2-k=0$$

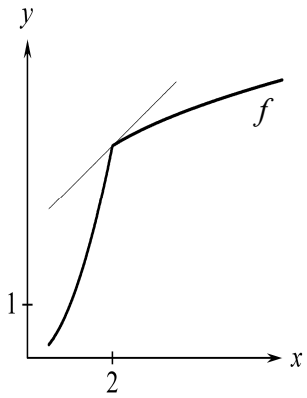
$$\underline{\underline{k=12}}$$

Hvis der i stedet er oplyst en x-værdi med lokalt maksimum, løses opgaven på samme måde.

Beviser

62. Differentiabel.

62a Graf med knæk

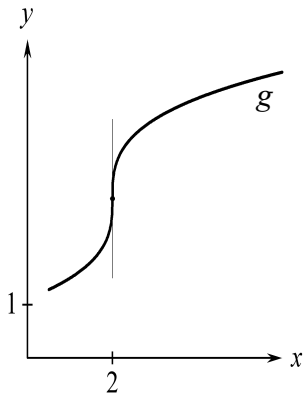


Grafen for f har et knæk i punktet med x-koordinat 2.
Derfor har grafen ikke nogen tangent i dette punkt.
(Tangenten er en linje der følger grafen nær punktet).

Funktionen f har ikke nogen differentialkvotient i 2, for differentialkvotienten er tangentens hældningskoefficient, og der er ikke nogen tangent.

Der gælder altså at $f'(2)$ ikke eksisterer.

62b Graf med lodret tangent



Grafen for g har en lodret tangent i punktet med x-koordinat 2.
En lodret linje har ikke nogen hældningskoefficient.

Funktionen g har ikke nogen differentialkvotient i 2, for differentialkvotienten er tangentens hældningskoefficient, og tangenten har ikke nogen hældningskoefficient.

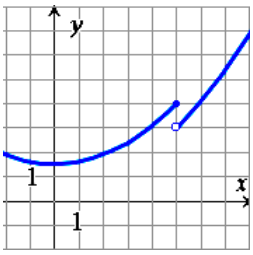
Der gælder altså at $g'(2)$ ikke eksisterer.

62c Definition

Man siger at en funktion er <u>differentiabel</u> i et tal x_0
hvis funktionen har en differentialkvotient i x_0
dvs. hvis $f'(x_0)$ eksisterer.

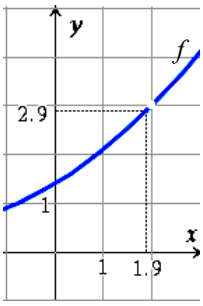
63. Kontinuert.

Figuren viser grafen for en funktion f.
For $x = 5$ er der et spring i grafen.
Man siger at f ikke er <u>kontinuert</u> i 5.
f er kontinuert i ethvert andet tal end 5.



64. Grænseværdi.

64 a Hvad er grænseværdi?



Figuren viser grafen for en funktion f.

For $x = 2$ er der ikke noget grafpunkt.
Forskriften kan ikke udregnes for $x = 2$.
2 er ikke med i funktionens definitionsmængde.

Da vi ikke kan udregne funktionsværdien for x-værdien 2, prøver vi med x-værdier tæt på 2 .
På figuren ses at for x-værdien 1,9 er funktionsværdien $f(1{,}9) = 2{,}9$.
Ved at sætte ind i forskriften fås $f(1{,}99) = 2{,}99$.

Det tal som som funktionsværdierne er tæt på når x er tæt på 2, er tallet 3.
Vi siger at 3 er

grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod 2 .

Symbolet for denne grænseværdi er

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

Symbolet læses "grænseværdien af $f(x)$ for x gående mod 2" .

Der gælder

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3 .$$

64 b Eksempel på grænseværdi

Vi undersøger størrelsen $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ for x-værdier nær 4.

Indsætter vi 4 for x , får vi

$$\frac{\sqrt{4}-2}{4-4} = \text{undef}$$

Størrelsen eksisterer ikke for x lig 4. Det skyldes at nævneren bliver 0.

Vi vil udregne størrelsen for x-værdier der ligger tæt på 4:

$$\frac{\sqrt{3.9}-2}{3.9-4} = 0.251582$$

$$\frac{\sqrt{3.99}-2}{3.99-4} = 0.250156$$

$$\frac{\sqrt{4.01}-2}{4.01-4} = 0.249844$$

$$\frac{\sqrt{4.001}-2}{4.001-4} = 0.249984$$

Vi ser at størrelsen er tæt på 0,25, når x er tæt på 4.

Nspire kan udregne den nøjagtige grænseværdi:

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \right) = \frac{1}{4}$$

Størrelsens grænseværdi for x gående mod 4 er $\dfrac{1}{4} = 0{,}25$.

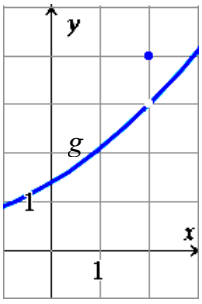
65. Udregning af grænseværdi.

65a Oplæg

Figuren viser grafen for en funktion g ,
På figuren ser vi:

For x gående mod 2 er grænseværdien 3 .
Funktionsværdien i 2 er 4 .

Vi ser at hvis funktionsværdien havde været 3 ,
så ville der ikke have været noget spring i grafen,
så funktionen havde været kontinuert i 2.



65b Regel

En funktion h er kontinuert i et tal x_0
netop hvis
funktionsværdien i x_0 = funktionens grænseværdi for x gående mod x_0 .

Hvis en funktion er kontinuert, kan vi altså finde grænseværdien ved at udregne funktionsværdien.

65c Regel

Hvis et regneudtryk $u(x)$ er opbygget af sædvanlige symboler (ikke lim), så gælder:

Regneudtrykket er kontinuert i ethvert tal x hvor det er defineret (dvs. i x-værdier hvor det kan udregnes)

65d Metode

Udtrykket $u = \dfrac{3x^2-6x}{x-2}$ kan vi ikke regne ud for $x=2$ da nævneren bliver 0.
I stedet vil vi udregne grænseværdien af u for x gående mod 2 .

Vi kan regne os frem til denne grænseværdi ved at bruge følgende metode:

Vi faktoriserer brøkens tæller og forkorter brøken.
Så får vi et udtryk som vi kan udregne når x er 2:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-6x}{x-2} = \lim_{x\to 2} 3x \quad \text{da} \quad \frac{3x^2-6x}{x-2} = \frac{3x(x-2)}{x-2} = 3x \quad \text{for} \quad x\neq 2$$

$$= 3\cdot 2 \quad \text{da } 3x \text{ er kontinuert i } x=2$$ se 65b og 65c .

$$= 6$$

65e $\lim\limits_{x\to x_o}(k\cdot udtryk) = k\cdot \lim\limits_{x\to x_o} udtryk$ når k er en kontant

65f $\lim\limits_{x\to x_o}(udtryk1+udtryk2) = \lim\limits_{x\to x_o} udtryk1 + \lim\limits_{x\to x_o} udtryk2$

65g Udregning af grænseværdi med Nspire.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \quad \textit{udregnet af Nspire}$$

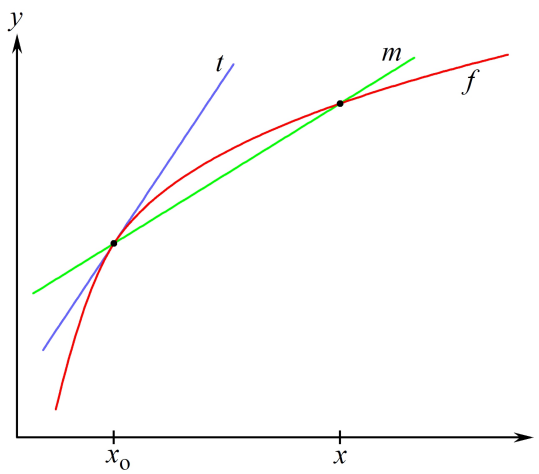
På Nspire kan vi vælge grænseværdi-skabelonen på skabelonpaletten.
Skabelonen ser sådan ud: $\lim\limits_{\square\to\square}(\square)$ Vi behøver ikke skrive noget i det tredje felt.

66. Grænseværdi-formlen for differentialkvotient.

Hvis f er differentiabel i x_o, så gælder

66a $$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$ Dette er grænseværdi-formlen for differentialkvotient.

Begrundelse for 66a:



En sekant er en linje der går gennem to punkter på grafen.

Linjen m er en sekant.

t er tangent til f-grafen.

$f'(x_o)$ = t's hældk. Dette er definitionen på differentialkvotient.

Vi tegner en linje m der skærer f-grafen i punkterne med x-koordinater x_o og x.
y-koordinater til disse punkter er $f(x_o)$ og $f(x)$. Så

$$m\text{'s hældk.} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$ ifølge formlen $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Når x nærmer sig til x_o
vil m's hældk. nærme sig til t's hældk., så

$$t\text{'s hældk.} = \lim_{x \to x_o} (m\text{'s hældk.}) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Vi har nu indset at både venstre og højre side i ligningen i 64a er lig t's hældk.,
så ligningen gælder.

67. Udledning af formlen for at differentiere x^2.

Når $f(x)=x^2$ er

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$ ifølge grænseværdi-formlen for differentialkvotient (66a)

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{x^2-x_o^2}{x-x_o}$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{(x+x_o)\cdot(x-x_o)}{x-x_o}$$ ifølge en af kvadratsætningerne

$$= \lim_{x\to x_o} (x+x_o)$$ vi har forkortet med $x-x_o$

$$= x_o+x_o$$ da $x+x_o$ er kontinuert

$$= 2x_o$$

Vi har nu fundet frem til følgende:

67a: $\left(x^2\right)' = 2x$

68. Udledning af formlen for at differentiere *udtryk plus udtryk* .

Når $f(x) = g(x)+h(x)$ er

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$ ifølge grænseværdi-formlen for differentialkvotient (66a)

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{\left(g(x)+h(x)\right)-\left(g(x_o)+h(x_o)\right)}{x-x_o}$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{\left(g(x)-g(x_o)\right)+\left(h(x)-h(x_o)\right)}{x-x_o}$$

$$= \lim_{x\to x_o} \left(\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}+\frac{h(x)-h(x_o)}{x-x_o}\right)$$

$$= \lim_{x\to x_o} \frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} + \lim_{x\to x_o} \frac{h(x)-h(x_o)}{x-x_o}$$ ifølge 63f

$$= g'(x_o)+h'(x_o)$$ grænseværdi-formlen for differentialkvotient (66a) er brugt to gange

Vi har nu fundet frem til følgende:

68a: $\left(g(x)+h(x)\right)' = g'(x)+h'(x)$

Stikordsregister

afledede funktion 8
aftagende 19, 20, 22
differentiabel 31
differentialkvotient 1, 3, 34
differentialkvotient på graf 6
differentialkvotient, udledning 35
differentialkvotients forskrift 3
differentialkvotients fortolkning 2
differentiationsregler 3
ekstrema 24, 27
ekstremum 24
ekstremumssted 24
fortolkning af differentialkvotient 2
funktionsværdi 1
funktionsværdi på graf 6
graf 22
grænseværdi 32, 33, 34
hældningskoefficient 9, 11, 16, 17, 31
konstant i forskrift, bestem 14
kontinuert 31
lokale ekstrema 28, 29
lokalt ekstremum 30
lokalt ekstremumssted 28
lokalt maksimum 28, 29, 30
lokalt maksimumssted 28
lokalt minimum 28, 29, 30
lokalt minimumssted 28
løs ligning ud fra graf 7
løsninger, antal 30
maksimum 24, 27
maksimumssted 24
mindsteværdi 24, 27
minimum 24, 27
minimumssted 24
monotoniforhold 20, 21, 23
Nspire 3, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 26, 29, 30
røringspunkt 1, 2, 13, 14
størsteværdi 24, 25, 26
tangent 1, 9, 11, 12, 15, 31
tangent, vinkel 13
tangenthældning 10, 11, 12, 14
vinkel og tangent 13
voksende 19, 20, 22
væksthastighed 15, 16, 17, 18