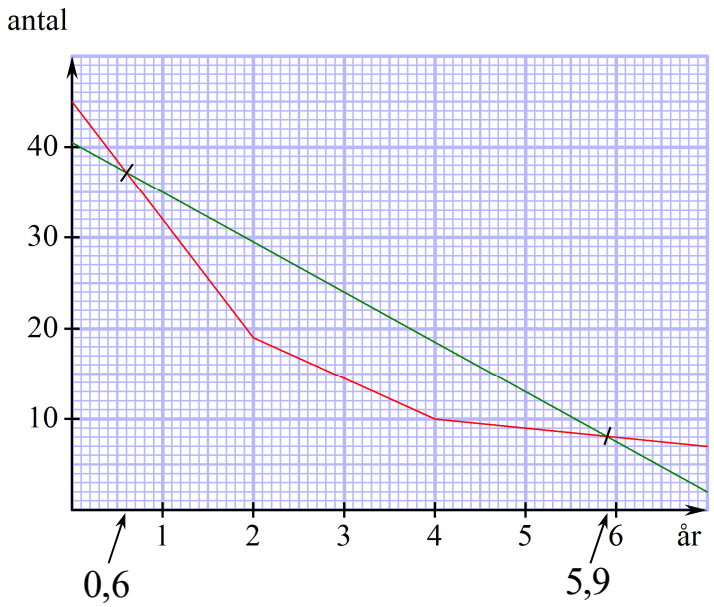
Funktioner

1. del



2018 Karsten Juul

1. Koordinater

1.1 Koordinatsystem 1
1.2 Kvadranter 1
1.3 Koordinater 2
1.4 Aflæs x-koordinat 2
1.5 Aflæs y-koordinat 2
1.6 Koordinatsæt 2
1.7 Tegn punkt med given x-koordinat på given linje 3

2. Funktion

2.1 Variabel 4
2.2 Funktion 4
2.3 Forskrift 5
2.4 Brug forskrift til at bestemme x eller y 5
2.5 Funktionsværdi 6

3. Graf

3.1 Oplæg til graf 7
3.2 Definition af graf 7
3.3 Aflæs graf på papir 8
3.4 Aflæs graf i Nspire 9
3.5 Tegn graf i Nspire 9
3.6 Vælg passende udsnit af koordinatsystem 10
3.7 Tegn graf på papir 11
3.8 Undersøg om punkt ligger på graf 12
3.9 Bestem k så punkt ligger på graf 12

4. Skæring

4.1 Udregn skæring med y-akse 13
4.2 Udregn skæring med x-akse 13
4.3 Udregn skæring mellem to grafer 14

5. Skrivemåden $f(x)$

5.1 Navn for funktion 15
5.2 Når tal indsættes for x, skal det være på begge ligningens sider 15
5.3 $h(x)$ og graf 15

6. Løse ligning

6.1 Oplæg 16
6.2 Regler for ligevægt 16
6.3 Eksempel på fejl 16

6.4 Modsat regning 17
6.5 Eksempel på detaljeret løsning 17
6.6 Små-eksempler med regler for ligevægt 17
6.7 Forkorte 18
6.8 Små-eksempler med forkorte og regler for ligevægt 18
6.9 Forklar løsningen 19

7. Typer af omskrivninger
7.1 Samle led 20
7.2 Parentes og gange 20
7.3 Hæve parentes 21
7.4 Gange ind i minus-parentes 21
7.5 Forklar løsningen 22
7.6 Find og forklar fejlene 23
7.7 Bestem x når vi kender y. Herunder: regler for ligevægt 24
7.8 Bestem y når vi kender x 24

8. Lineær funktion – intro
8.1 Oplæg til definition af lineær funktion 25
8.2 Definition af lineær funktion 25
8.3 Sætning om graf for lineær funktion 26

9. Lineær funktion – betydning af *a* of *b*
9.1 Oplæg til betydning af *a* og *b* 26
9.2 Sætning om betydning af *a* og *b* 26
9.3 Eksempler på betydning af *a* og *b* 27
9.4 Aflæs *a* og *b* på graf 28
9.5 Bruge *a* og *b* til at afsætte grafpunkter 28
9.6 Graf og fortegn for *a* 29

10. Lineær funktion – forskrift er kendt, betydning af *a* og *b*
10.1 Opgave med voksende funktion 30
10.2 Opgave med aftagende funktion 30
10.3 Når *x* stiger mere end 1 enhed 31

11. Lineær funktion – skriv forskrift, betydning af *a* og *b*
11.1 Opgave med voksende funktion 32
11.2 Opgave med aftagende funktion 32

12. Lineær funktion – argumentation, betydning af *a* og *b*
12.1 Eksempel på argumentation, *a* 33

12.2 Eksempel på argumentation, b 34
12.3 Bevis for reglen om betydningen af a 34
12.4 Bevis for reglen om betydningen af b 34

13. Lineær funktion – udregn *a* og *b*

13.1 Udregn b i $y = a \cdot x + b$ ud fra a og et punkt..... 35
13.2 Udregn a i $y = a \cdot x + b$ ud fra b og et punkt..... 35
13.3 Udregn a og b i $y = a \cdot x + b$ ud fra to punkter uden brug af formel .. 36
13.4 Udregn a og b i $y = a \cdot x + b$ ud fra to punkter givet ved tekst..... 36
13.5a Løs ligningssystem med nspire 37
13.5b Løs ligningssystem uden hjælpemidler 37
13.6 Sammensat opgave med udregning af a og b..... 38
13.7 Sammensat opgave med udregning af a og b..... 38
13.8 Udregn a og b i $y = a \cdot x + b$ ved hjælp af formler 39
13.9 Udregn a og b i $y = a \cdot x + b$ ved regression..... 40

14. Residual-plot

14.1 Hvad er residualer og residual-plot?..... 43
14.2 Residual-plot, brugsanvisning til Nspire 43
14.3 Residual-plot – Aflæs største afvigelse 44
14.4 Residual-plot – Vurder typen af model 44

15. Model

15.1 Hvad er en model?..... 45
15.2 Absolut og relativ afvigelse..... 45
15.3 Når der står ”Brug model”..... 46
15.4 Når x kun kan være et helt tal..... 46

16. Proportionale variable

16.1 Proportionale variable, regler 47
16.2 Proportionale variable, opgave..... 47
16.3 Proportionale variable, graf..... 48

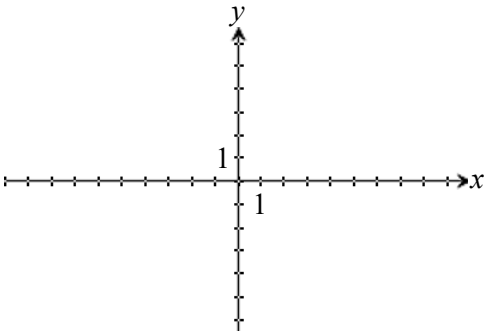
17. Omvendt proportionale variable

17.1 Omvendt proportionale variable, regler..... 49
17.2 Omvendt proportionale variable, opgave 49
17.3 Omvendt proportionale variable, graf 50
17.4 Opgave hvor variable fra virkeligheden er omvendt proportionale ... 51

1. Koordinater

1.1 Koordinatsystem

Figuren viser et koordinatsystem.



Koordinatsystemet består af to tallinjer:

Den vandrette tallinje kaldes x-aksen eller førsteaksen .

Den lodrette tallinje kaldes y-aksen eller andenaksen .

På hver af tallinjerne er der en pil:

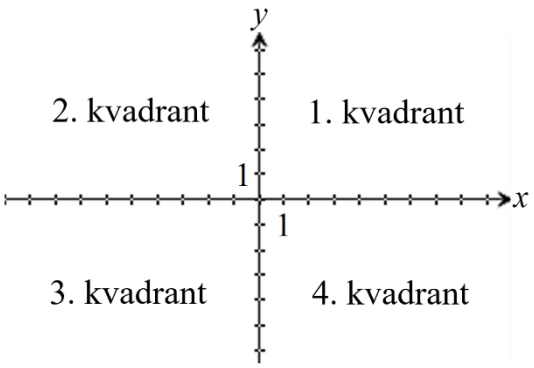
tallene bliver større i pilens retning.

Det er altså en fejl at sætte pil i begge ender af tallinjen.

1.2 Kvadranter

De fire felter i koordinatsystemet hedder

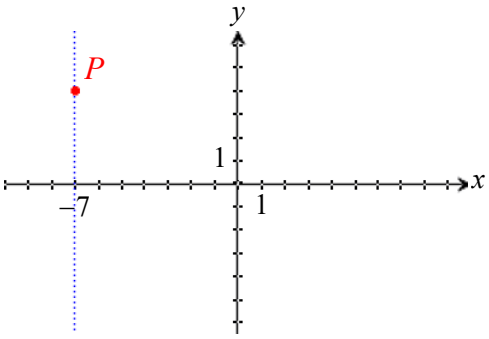
1. kvadrant , 2. kvadrant , 3. kvarant og 4. kvadrant .



1.3 Koordinater

Hvert punkt i koordinatsystemet har et **koordinatsæt** .
Det røde punkt på figurerne nedenfor har koordinatsættet $(-7, 4)$.
Det første af tallene i koordinatsættet kaldes
x-koordinaten eller **første-koordinaten** .
Det andet af tallene i koordinatsættet kaldes
y-koordinaten eller **anden-koordinaten** .

1.4 Aflæs x-koordinat

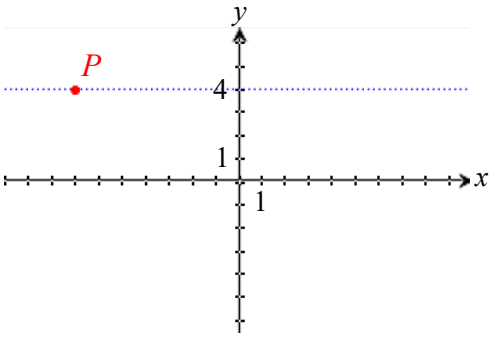


En lodret linje gennem punktet P
skærer x-aksen ved -7 .

Derfor:

P har x-koordinaten -7 .
P har første-koordinaten -7 .

1.5 Aflæs y-koordinat



En vandret linje gennem punktet P
skærer y-aksen ved 4 .

Derfor:

P har y-koordinaten 4 .
P har anden.-koordinaten 4 .

1.6 Koordinat-sæt

P har koordinatsættet $(-7 , 4)$

Tallet før kommaet er altid x-koordinaten (første-koordinaten)

Tallet efter kommaet er altid y-koordinaten (anden-koordinaten)

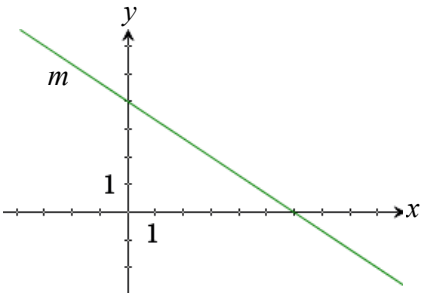
1.7 Tegn punkt med given x-koordinat på given linje

Opgave

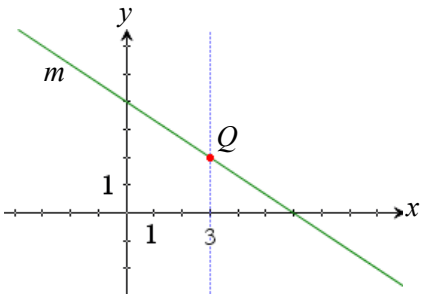
Punktet Q ligger på linjen m.

Q har x-koordinat 3.

Tegn Q.



Svar



2. Funktion

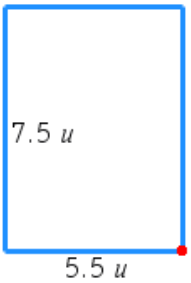
2.1 Variabel

Billedet til højre viser et rektangel på en computerskærm.

Det røde punkt kan trækkes mod venstre eller højre så bredden ændres.

Figuren er indrettet sådan at når bredden ændres,
så ændres højden på en bestemt måde.

Nedenfor er vist to figurer der er fremkommet
ved at trække i det røde punkt.



En talstørrelse der ændres kaldes en **variabel** .

Bredden er er en variabel.
Højden er en variabel.

Man bruger ofte et bogstav som navn for en variabel:

b = bredde

h = højde

På et af billederne ovenfor ser vi:

Når $b = 5{,}5$ så er $h = 7{,}5$.

2.2 Funktion

Der gælder

højden er **en funktion af** bredden

fordi der gælder

til hver værdi af bredden er der én værdi af højden.

(Der gælder også: bredden er en funktion af højden).

2.3 Forskrift

På hvert af de tre billeder ovenfor ser vi at man får højden ved at lægge 2 til bredden. Det viser sig at dette altid gælder for denne figur:

$$h = b + 2 .$$

Udtrykket på ligningens højre side kaldes

en **forskrift** for funktionen

eller

en **regneforskrift** for funktionen.

Ofte er en forskrift mere indviklet, f.eks.:

$$y = 3 \cdot x^2 - x + 5 .$$

2.4 Brug forskrift til at bestemme *x* eller *y*

Prisen for en vare er fastlagt ved funktionen

$$y = 0{,}18 \cdot x + 1{,}95$$

hvor y er pris i kr. og x er vægt i gram.

a) Bestem prisen når vægten er 132 gram

b) Bestem vægten når prisen er 40,65 kr.

132 er vægt
og x er vægt
så 132 skal erstatte x i ligningen.

40,65 er pris
og y er pris
så 40,65 skal erstatte y i ligningen.

Besvarelse

$y = 0.18 \cdot x + 1.95$

y = pris i kr.

x = vægt i gram

HUSK at skrive de oplysninger fra opgaveteksten som du bruger.

Hvis $y=$ skrives i samme matematikfelt som $0.18 \cdot 132 + 1.95$, så kommer det ikke til at stå korrekt.

a) Når $x = 132$ er $y = 0.18 \cdot 132 + 1.95 = 25.71$

Når vægten er 132 gram, er prisen 25,71 kr.

HUSK at skrive **konklusion** til hvert spørgsmål, og markér **facit** i konklusionen.

b) Når $y = 40.65$ er

$$40.65 = 0.18 \cdot x + 1.95$$

Nspire løser ovenstående ligning mht. x og får $x=215$.

$\text{solve}(40.65=0.18 \cdot x+1.95, x) \blacktriangleright x=215.$

Over solve skrives hvad solve udfører, da solve ikke er normalt matematiksprog.

Når prisen er 40,65 kr. er vægten 215 gram

Brug af solve:

solve(,)

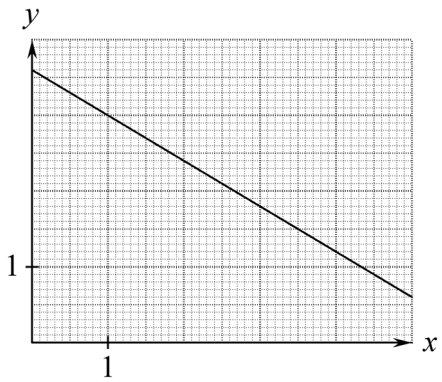
Her står ligningen.
HUSk at skrive **punktum i kommatal**.

Her står det bogstav vi skal finde.
Foran bogstavet står et rigtigt komma, ikke punktum.

2.5 Funktionsværdi

Betydningen af ordet **funktionsværdi** ses af eksemplerne nedenfor.

2.5a På figuren ses grafen for en funktion.
Bestem funktionsværdien af 3,5 .



Metode: Vi finder punktet på grafen med x lig 3,5 .

Punktets y er 1,5 ,

så

funktionsværdi af 3,5 = 1,5 .

2.5b Udviklingen i antallet af kager kan beskrives ved modellen

$y = 240 - 22 \cdot x$

hvor y er antal kager og x er antal timer efter kl. 9.

9 er timer
og x er timer
så 9 skal erstatte x i ligningen.

Ved at indsætte i ligningen får vi at

3,5 timer efter kl. 9 er antal kager163 .

så

funktionsværdien af 3,5 = 163 .

2.5c Udviklingen i antallet af kager kan beskrives ved modellen

$y = 240 - 22 \cdot x$

hvor y er antal kager og x er antal timer efter kl. 9.

115 er er kager
og y er kager
så 115 skal erstatte y i ligningen.

Ved at indætte i ligningen får vi

Hvis antallet af kager er 115 , så er tiden 5,7 timer efter kl. 9

så vi har fundet ud af at

Det tal som har **funktionsværdien** 163 , er 5,7 .

2.5d En funktion har forskriften

$y = 0{,}5 \cdot x + 6{,}2$

Bestem **funktionsværdien** af 8.

$y = 0.5 \cdot 8 + 6.2 = 10.2$

Funktionsværdien af 8 er 10,2 .

2.5e En funktion har forskriften

$y = 0{,}5 \cdot x + 6{,}2$

Bestem det tal som har **funktionsværdien** 11 .

Nspire løser ligningen $11 = 0{,}5 \cdot x + 6{,}2$ mht. x og får $x = 9{,}6$.

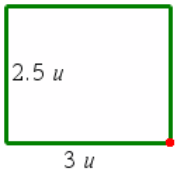
solve(11=0.5· x+6.2,x) ▸ x=9.6

Det tal som har funktionsværdien 11 , er 9,6 .

3. Graf

3.1 Oplæg til graf

Billedet til højre viser et rektangel på en skærm.
Man kan ændre bredden ved at trække det røde punkt mod venstre eller højre.
Så ændres højden automatisk.



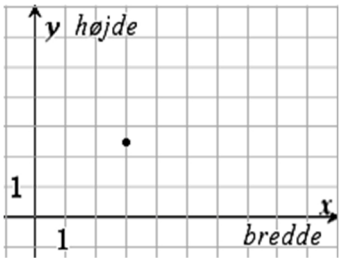
Ved at gøre dette kan man se at

højden er en funktion af bredden

fordi der gælder

til hver værdi af bredden er der én værdi af højden.

På billedet ser vi at når bredden er 3 , så er højden 2,5 .
Denne oplysning afsætter vi som et punkt i koordinatsystemet.



En person der ser koordinatsystemet, kan se:

x-koordinat = 3 og y-koordinat = 2,5 .

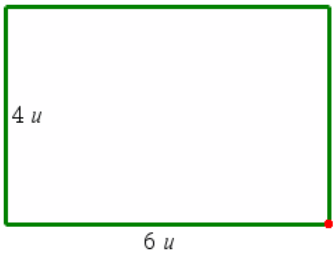
Dette fortæller:

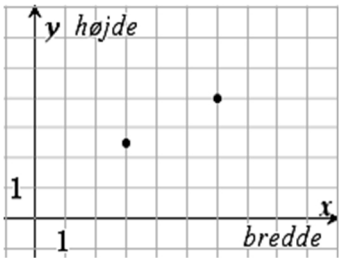
når bredde er 3, er højde 2,5 ,

dvs.

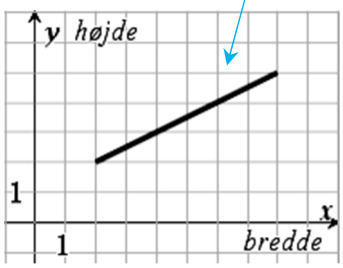
funktionsværdien af 3 er 2,5 .

Vi trækker i det røde punkt så bredde bliver 6. Vi ser at højde er 4.
Denne oplysning afsætter vi i koordinatsystemet.





Hvis der for hver bredde er et punkt i koordinatsystemet, så har vi funktionens **graf** :



På grafen ser vi at de tal der har en funktionsværdi,
er tallene fra 2 til 8,
og at de tal der er funktionsværdier,
er tallene fra 2 til 5 .

En **definition** er en forklaring på hvad et ord betyder.

3.2 Definition af graf

Grafen for en funktion f består at de punkter (x,y) hvor

y er funktionsværdien af x ,

dvs. $y = f(x)$.

3.3 Aflæs graf på papir

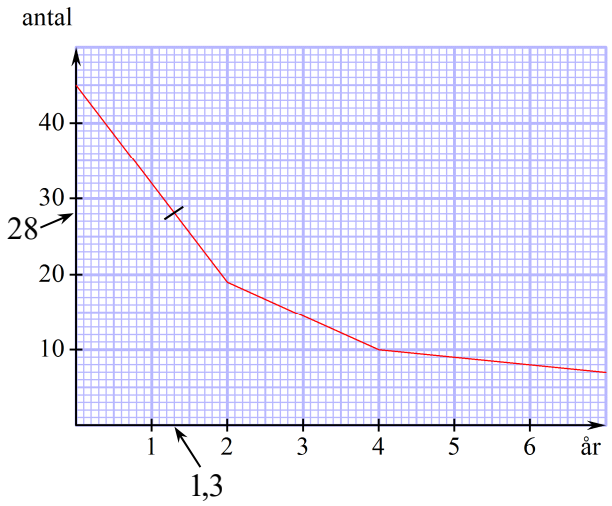
Grafen viser antal ansatte som funktion af tiden (år efter kontorets oprettelse).

3.3a Aflæs antal til tiden 1,3

Vi vil bestemme antal til tiden 1,3 år.
For at gøre dette, finder vi det punkt på grafen hvor x (tiden) er 1,3 .
Vi ser at dette punkts y er 28 , og y er antal.

Til tiden 1,3 år er antal lig 28 .

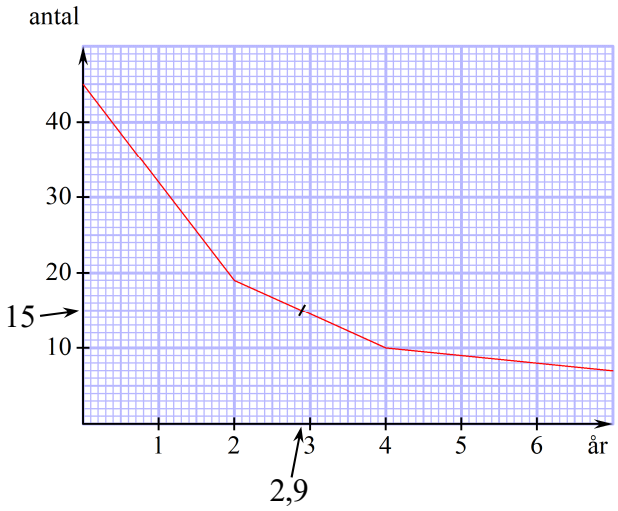
Skriv tallene 1,3 og 28 på papiret.
Vis med pile hvor tallene er aflæst



3.3b Aflæs hvornår antal er 15

Vi vil bestemme hvornår antal er 15.
Vi finder det punkt på grafen hvor y (antal) er 15 . Vi ser at dette punkts x er 2,9 , og x er tid.

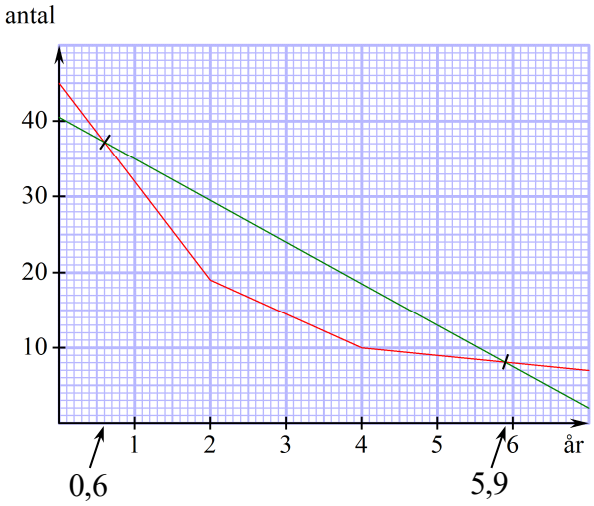
Antal er 15 til tiden 2,9 år.



3.3c Aflæs hvornår de to kontorer har samme antal

I koordinatsystemet er tilføjet grafen for et andet kontor.
Vi vil bestemme hvornår de to kontorer har samme antal.
Vi finder de x-værdier (tider) hvor de to grafer har samme y (antal).
Vi ser at det er x-værdierne 0,6 og 5,9 .

De to kontorer har samme antal til tiderne 0,6 år og 5,9 år .

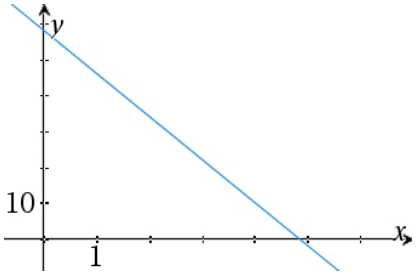


3.4 Aflæs graf i Nspire

Hvis grafen er tegnet i Nspire,
så kan vi aflæse grafen elektronisk.

Når vi aflæser elektronisk, så laver Nspire en udregning så resultatet får stor nøjagtighed .

Sådan aflæses en graf elektronisk:



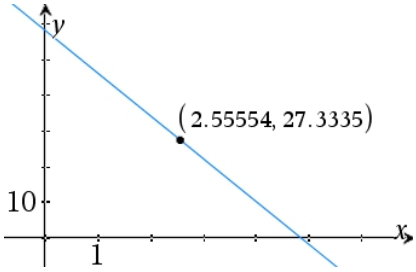
Skift til vindue med graf.
Vælg i værktøjsmenu

Geometri / Punkter og linjer / Punkt på .

Klik på grafen. Klik igen.
Så fremkommer et punkt på grafen.

VIGTIGT: Når vi klikker på grafen, så skal det være et "tomt" sted. Der må altså ikke være andet end grafen der hvor vi klikker.

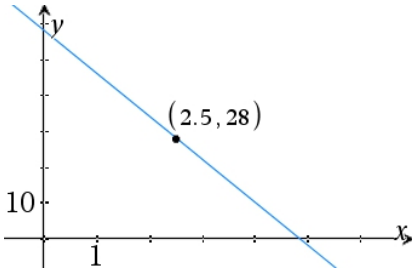
Tryk på esc (så du kan foretage dig andet).



På nogle grafer fremkommer punktets koordinatsæt automatisk.
Hvis ikke, så højreklik på punktet og vælg

Koordinater og ligninger .

Dobbeltklik på den af koordinaterne som er kendt, og ret den til den kendte værdi.
Så ændres den ukendte koordinat automatisk til den søgte værdi.



På figuren har vi ændret y til 28.
Vi ser at x så bliver 2,5.
Vi har altså fundet ud af at 2,5 er det tal hvis funktionsværdi er 28.

3.5 Tegn graf i Nspire

Vi vil tegne grafen for

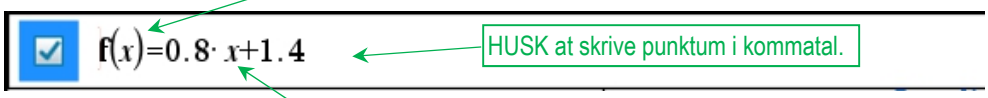
$$y = 0{,}8 \cdot x + 1{,}4$$

Når et grafvindue er aktivt:

Vælg i værktøjsmenuen Grafindtastning/Rediger og Funktion

Så fremkommer indtastningsfeltet.
Skriv følgende:

BEMÆRK: Du skal IKKE skrive y= .
Du kan bruge andre bogstaver end f .



HUSK at skrive punktum i kommatal.

Skriv altid x i graf-vindue.
Også selvom der står et andet bogstav i opgaven.

Tryk på Enter.
Så fremkommer grafen.

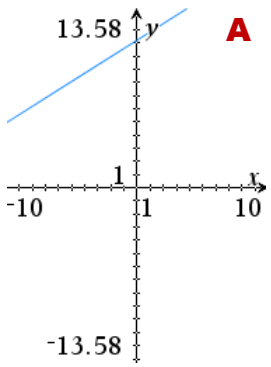
3.6 Vælg passende udsnit af koordinatsystemet

Vi har tegnet grafen for

$$f(x) = 0{,}63x+11{,}2$$

Vi skal vælge et korrekt udsnit af koordinatsystemet sådan at blandt andet punktet på grafen med x lig 16 kommer med.

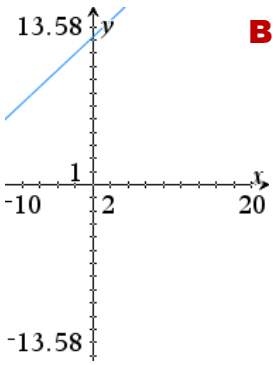
Vi ser at x-aksen går til 10. Se **A** .



3.6a Vi ændrer Xmax:

Da vi skal bruge x-værdi 16, lader vi x-akse gå til et tal noget større end 16, f.eks. 20.

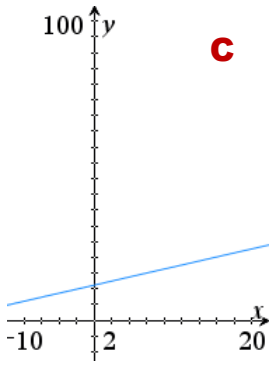
Standardmetoden til dette er:
Vælg i Værktøjsmenuen
Vindue/Zoom og Indstillinger for vindue,
og sæt XMax til 20. Se **B** .



3.6b Vi ændrer Ymax:

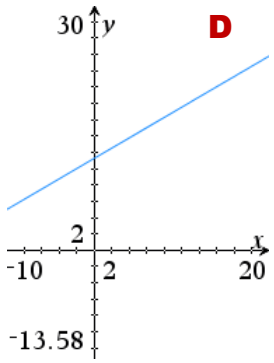
En væsentlig del af grafen ligger over vinduet.
Vi må vælge et meget større tal for YMax.

Vi kan prøve med 100. Se **C** .



Det var for meget med 100.
Grafen skal fylde en større del af koordinatsystemet.

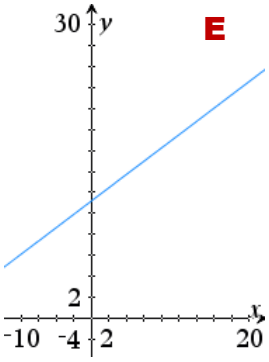
Vi prøver at sætte YMax til 30. Se **D** .



Afsnittet fortsætter på næste side!

3.6c Vi ændrer YMin:

Den negative del af y-aksen er ikke relevant, så vi sætter YMin til et tal tættere på 0, f.eks. –4. Se **E** .

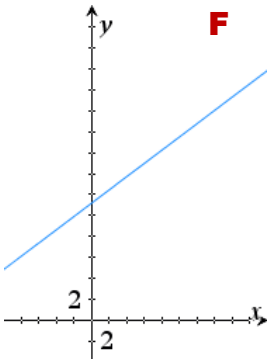


3.6d Vi fjerner aksers slutværdier:

For at pynte på figuren vælger vi i Værktøjsmenuen

Vis og Skjul aksernes slutværdier.

Se **F** .



3.7 Tegn graf på papir

På papir vil vi tegne grafen for funktionen

$$y = \frac{12}{x} \ , \quad 1 \le x \le 4 \ .$$

Dette betyder at x kan være 1 eller 4 eller et tal mellem 1 og 4 . Tal mellem 1 og 4 er også et tal som f.eks. 1,37 .

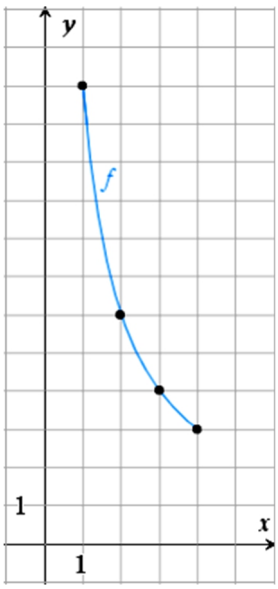
For grafpunktet med x-koordinat 2 er y-koordinaten

$$y = \frac{12}{2} = 6 \ .$$

På tilsvarende måde er de andre y-koordinater i tabellen udregnet:

x:	1	2	3	4
y:	12	6	4	3

Vi afsætter disse punkter i et koordinatsystem og tegner en kurve gennem dem.



3.8 Undersøg om punkt ligger på graf

Vi vil undersøge om punktet $P(2,15)$ ligger på grafen for $y = 3 \cdot x + 8$.
Punktet ligger på grafen netop hvis

funktionsværdi af x-koordinat = y-koordinat .

Vi skal altså undersøge om

funktionsværdi af 2 = 15

Vi udregner funktionsværdien af 2 :

$y = 3 \cdot 2 + 8$

$y = 6 + 8$

$y = 14$

Funktionsværdien af 2 er altså 14 .
Da den ikke er 15, gælder:

Punktet P ligger ikke på grafen .

3.9 Bestem k så punkt ligger på graf

En funktion har forskriften

$y = k \cdot x$

hvor k er et tal.

Billedet viser grafen når $k = 2$.
Vi ser at P ikke ligger på grafen når $k = 2$.

Vi vil bestemme k så P ligger på grafen.

P ligger på grafen netop hvis

funktionsværdi af 10 = 14

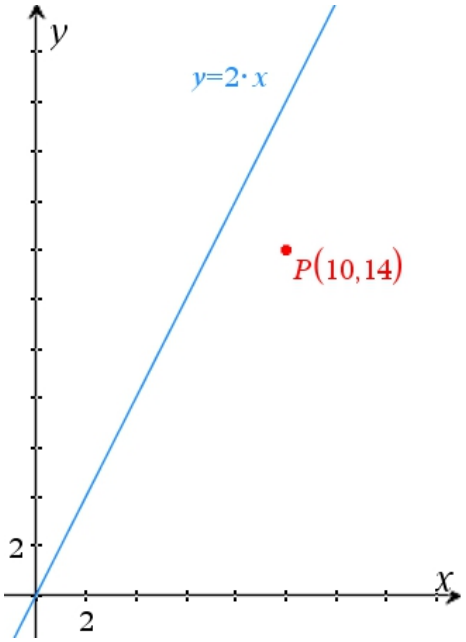
dvs.

$k \cdot 10 = 14$

Hvis denne ligning skal være sand, skal

$k = 1{,}4$

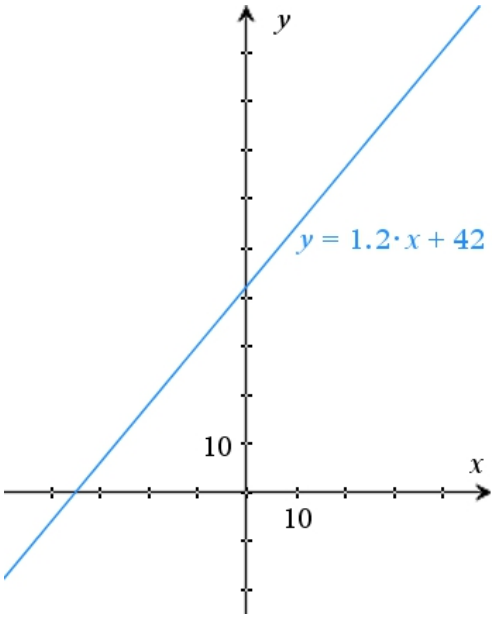
P ligger på grafen netop hvis $k = 1{,}4$.



Vi løste ligningen $k \cdot 10 = 14$ ved at dividere begge sider med 10.
Vi kunne også have løst den ved at bruge solve .

4. Skæring

4.1 Udregn skæring med *y*-akse



Billedet viser grafen for funktionen der har forskriften

$$y = 1{,}2 \cdot x + 42$$

For alle punkter på y-aksen er x lig 0 ,
så for grafens skæringspunkt med y-aksen gælder

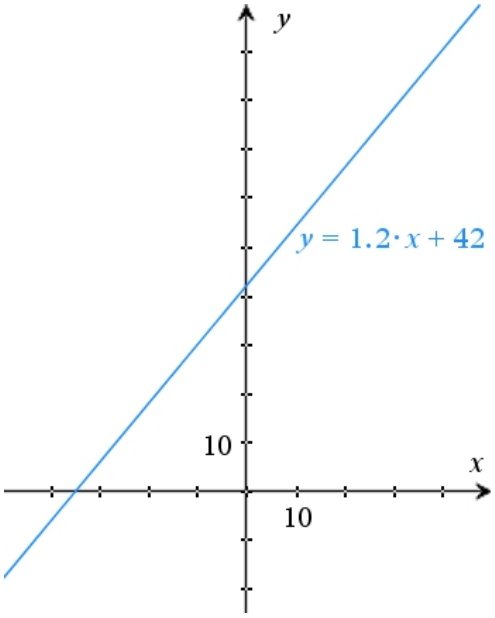
$$x = 0 .$$

Skæringspunktet ligger på grafen, så

$$\begin{aligned} \text{punktets } y &= \text{funktionsværdi af punktets } x \\ y &= 1{,}2 \cdot 0 + 42 \\ y &= 0 + 42 \\ y &= 42 \end{aligned}$$

Grafen skærer y-aksen i punktet $(0 , 42)$.

4.2 Udregn skæring med *x*-akse



Billedet viser grafen for funktionen der har forskriften

$$y = 1{,}2 \cdot x + 42$$

For alle punkter på x-aksen er y lig 0 ,
så for grafens skæringspunkt med x-aksen gælder

$$y = 0 .$$

Skæringspunktet ligger på grafen, så

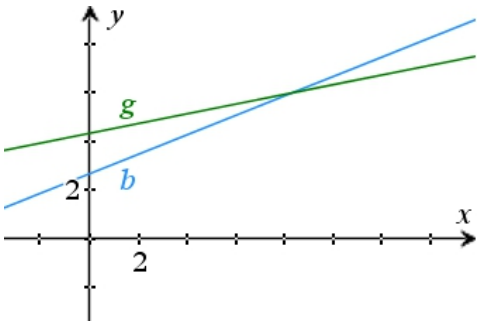
$$\begin{aligned} \text{punktets } y &= \text{funktionsværdi af punktets } x \\ 0 &= 1{,}2 \cdot x + 42 \end{aligned}$$

Heraf får vi at $x = -35$.

Grafen skærer x-aksen i punktet $(-35 , 0)$.

Vi løste ligningen $0 = 1{,}2 \cdot x + 42$ ved først at trække 42 fra begge sider, og derefter at dividere begge sider med 1,2 .
Vi kunne også have løst den ved at bruge solve .

4.3 Udregn skæring mellem to grafer



Billedet viser

grafen for en funktion b med blå graf

og

grafen for en funktion g med grøn graf.

Forskrifterne for b og g er

b: $y = 0{,}4 \cdot x + 2{,}6$

g: $y = 0{,}2 \cdot x + 4{,}3$

På billedet kan vi f.eks. se at

g-funktionsværdien af 4 er større end b-funktionsværdien af 4 .

Dette kan vi kontrollere ved udregning:

b-funktionsværdien af 4 $= 0{,}4 \cdot 4 + 2{,}6 = 4{,}2$

g-funktionsværdien af 4 $= 0{,}2 \cdot 4 + 4{,}3 = 5{,}1$

På billedet ser vi at hvis t er x-koordinaten til grafernes skæringspunkt, så er

g-funktionsværdien af t = b-funktionsværdien af t

$$0{,}2 \cdot t + 4{,}3 = 0{,}4 \cdot t + 2{,}6$$

$$t = 8{,}5$$

Vi løste ligningen med solve :

solve(0.2·t+4.3=0.4·t+2.6,t) ▸ t=8.5

Skæringspunktet ligger på g-grafen, så

Skæringspunktets y-koordinat = g-funktionsværdien af 8,5

Skæringspunktets y-koordinat $= 0{,}2 \cdot 8{,}5 + 4{,}3$

Skæringspunktets y-koordinat $= 6$

Vi havde selvfølgelig fået samme resultat hvis vi havde brugt b-forskriften.

Skæringspunktets koordinatsæt er (8,5 , 6) .

5. Skrivemåden $f(x)$

5.1 Navn for funktion

En funktion har forskriften

$y = 4 \cdot x - 18$

Vi giver funktionen navnet f.

Så vil f.eks.

$f(5)$ = funktionsværdien af 5

dvs.

$f(5) = 2$

Symbolet

$f(5)$

læses

f af 5

5.2 Når tal indsættes for x, skal det være på begge ligningens sider

En funktion g har forskriften

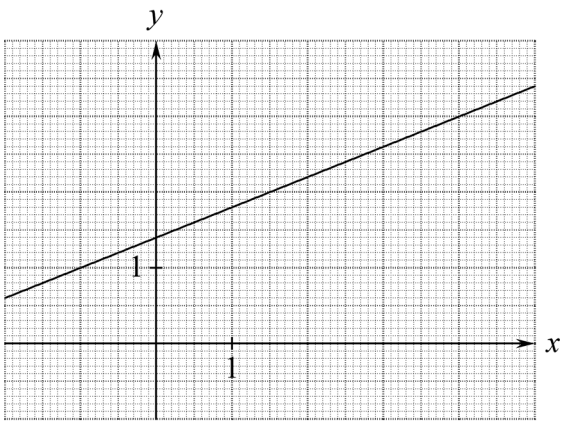
$g(x) = 0{,}5 \cdot x + 3$

$g(4) = 0{,}5 \cdot 4 + 3$ Når tal indsættes for x, skal det være på begge ligningens sider.

$g(4) = 5$

5.3 $h(x)$ og graf

Billedet viser grafen for en funktion h.



På grafen har vi aflæst at

$h(3) = 2{,}6$

dvs.

funktionsværdien af 3 er 2,6 .

Sådan gjorde vi:

Vi fandt det punkt på grafen hvor x er 3 .

Vi så at for dette punkt er y lig 2,6 .

På grafen har vi aflæst at

Ligningen $h(x) = 1{,}7$ har løsningen $x = 0{,}8$.

Sådan gjorde vi:

Vi fandt det punkt på grafen hvor y er 1,7 .

Vi så at for dette punkt er x lig 0,8 .

6. Løse ligning

6.1 Oplæg

For den lineære funktion $y = 3x + 5$ vil vi bestemme x når y er 17 :

$$17 = 3x + 5$$

$$12 = 3x$$ Vi har trukket 5 fra begge sider.

$$\frac{12}{3} = \frac{3x}{3}$$ Vi har divideret begge sider med 3.

$$4 = x$$ Vi har udregnet venstre side. Vi har forkortet højre side.

Vi løste ligningen ved at bruge regler for ligevægt.

I forbindelse med lineære funktioner bruger man nedenstående fire regler for ligevægt.

6.2 Regler for ligevægt

Vi må **lægge** samme tal **til** begge sider af lighedstegnet.

Vi må **trække** samme tal **fra** begge sider af lighedstegnet.

Vi må **gange** begge sider af lighedstegnet med samme tal
hvis dette tal **ikke** er **nul**.

Vi må **dividere** begge sider af lighedstegnet med samme tal
hvis dette tal **ikke** er **nul**.

6.3 Eksempel på fejl

Følgende omskrivning er **forkert**:

$$2x + 2 = 6$$

$$\frac{2x}{2} + 2 = \frac{6}{2}$$

Fejlen er at det kun er en del af venstre side der er divideret med 2 .
Det er meningen at du skal tænke på ligningen som en vægt:

Grøn klods vejer *x* kg. Gul klods vejer 1 kg.

Øverste billede er $2x + 2 = 6$.
På næste billede har vi halveret det på højre vægtskål.
Det er kun en del af det på venstre vægtskål der er halveret.
Derfor er der ikke mere ligevægt.

$$2x + 2 = 6$$

$$\frac{2x}{2} + 2 = \frac{6}{2}$$

6.4 Modsat regning

Da vi løste $17 = 3x + 5$ startede vi med at trække 5 fra begge sider.

Begrundelsen for dette er:

Den modsatte regning til læg 5 til er træk 5 fra .

Andre eksempler:

Den modsatte regning til træk $6x$ fra er læg $6x$ til .

Den modsatte regning til gang med 4 er divider med 4 .

Den modsatte regning til divider med 2 er gang med 2 .

6.5 Eksempel på detaljeret løsning

6.5a Opgave: Gør rede for hvordan man kan løse ligningen

$$11x - 2 = 4x + 19$$

ved at bruge regler for ligevægt og modsat regning .

6.5b Redegørelse:

Der står ikke noget foran $4x$, så der er underforstået + , dvs. $4x$ lægges til.

$11x - 2 = 4x + 19$	Omvendt udregning til **lægge 4x til** er **trække 4x fra**
$11x - 2 \mathbf{-4x} = 4x+19 \mathbf{-4x}$	**Trækker 4x fra** begge ligningens sider
$7x - 2 = 19$	Omvendt udregning til **trække 2 fra** er **lægge 2 til**
$7x - 2 \mathbf{+2} = 19 \mathbf{+2}$	**Lægger 2 til** begge ligningens sider
$7x = 21$	Omvendt udregning til **gange med 7** er **dividere med 7**
$\frac{7x}{\mathbf{7}} = \frac{21}{\mathbf{7}}$	Begge ligningens sider **divideres med 7**
$x = 3$	7 kan forkortes væk da der står gange mellem 7 og x

6.5c Kontrol af facit: Vi indsætter 3 for x i den oprindelige ligning:

$$11 \cdot \mathbf{3} - 2 = 4 \cdot \mathbf{3} + 19$$
$$33 - 2 = 12 + 19$$
$$31 = 31 \quad \text{OK}$$

Hver side skal udregnes direkte uden at bruge regler for omformning af udtryk og uden at bruge ligningsregler.

6.6 Små-eksempler med regler for ligevægt

6.6a $x + 8 = 12$ Der er lagt 8 til x. Det modsatte er at trække 8 fra.

$x + 8 \mathbf{-8} = 12 \mathbf{-8}$ Derfor trækker vi 8 fra begge sider.

$x = 4$

6.6b $x + 5 = -14$ Der er lagt 5 til x. Det modsatte er at trække 5 fra.

$x + 5 \mathbf{-5} = -14 \mathbf{-5}$ Derfor trækker vi 5 fra begge sider.

$x = -19$

6.6c $x - 6 = 9$ Der er trukket 6 fra x. Det modsatte er at lægge 6 til.

$x - 6 + 6 = 9 + 6$ Derfor lægger vi 6 til begge sider.

$x = 15$

6.6d $4 - x = 3$ Der står plus foran 4 (da der ikke står noget).

$4 - x - 4 = 3 - 4$ Derfor trækker vi 4 fra begge sider.

$-x = -1$ I **6.6g** står hvordan vi fjerner minus så x står alene.

6.6e $-7 + x = 2$ Der er trukket 7 fra x. Det modsatte er at lægge 7 til.

$-7 + x + 7 = 2 + 7$ Derfor lægger vi 7 til begge sider.

$x = 9$

6.6f $24 = -3 - x$ Der er trukket 3 fra $-x$. Det modsatte er at lægge 3 til.

$24 + 3 = -3 - x + 3$ Derfor lægger vi 3 til begge sider.

$27 = -x$ I **6.6g** står hvordan vi fjerner minus så x står alene.

6.6g $-x = 9$

$-x \cdot (-1) = 9 \cdot (-1)$ Vi ganger begge sider med -1.

$x = -9$ Fordi minus gange minus er plus.

6.7 Forkorte

$\frac{4x}{4}$ kan forkortes til x fordi der står **gange** mellem 4 og x.

$\frac{x \cdot (-5)}{-5}$ kan forkortes til x fordi der står **gange**.

$\frac{x-5}{-5}$ og $\frac{3+x}{3}$ kan **ikke** forkortes til x fordi der **ikke** står **gange**.

6.8 Små-eksempler med forkorte og regler for ligevægt

6.8a $3x = 12$ x er ganget med 3. Det modsatte er at dividere med 3.

$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$ Derfor dividerer vi begge sider med 3.

$x = 4$ På venstre side kan 3 forkortes væk fordi der står gange mellem 3 og x.

6.8b $-2 = x \cdot 5$ x er ganget med 5. Det modsatte er at dividere med 5.

$\frac{-2}{5} = \frac{x \cdot 5}{5}$ Derfor dividerer vi begge sider med 5.

$-0{,}4 = x$ På højre side kan 5 forkortes væk fordi der står gange mellem x og 5.

6.8c $-8x = 1$ x er ganget med -8. Det modsatte er at dividere med -8.

$\frac{-8x}{-8} = \frac{1}{-8}$ Derfor dividerer vi begge sider med -8.

$x = -0{,}125$ -8 forkortes væk fordi der står gange mellem -8 og x.

6.9 Forklar løsningen

Nedenstående omskrivninger viser en korrekt løsning af ligningen

$4x + 8 = -3x - 13$.

Forklar linje for linje hvordan løsningen af ligningen fremkommer.

$4x + 8 = -3x - 13$	Ligningen opstilles
$7x + 8 = -13$	
$7x = -21$	
$x = -3$	

Svar

$4x + 8 = -3x - 13$	Ligningen opstilles
$7x + 8 = -13$	$3x$ er lagt til begge sider
$7x = -21$	8 er trukket fra begge sider
$x = -3$	Begge sider er divideret med 7

Bemærkning

Når du skriver sådan en forklaring, så tænk på at hver linje er af en af følgende typer:

Ligningen opstilles

er lagt til begge sider

er trukket fra begge sider

Begge sider er ganget med

Begge sider er divideret med

7. Typer af omskrivninger

7.1 Samle led

For at skrive

$$6 - 5\cdot x + 7 + 2\cdot x$$

simplere (reducére den), skal vi:

1) Først gøre os klart hvilke **led** der er.
   Plus og minus skiller led, så der er følgende fire led:
   $16 \qquad -5\cdot x \qquad +7 \qquad +2\cdot x$

2) Dernæst skal vi gøre os klart hvilke af leddene der af samme type:
   Led nr. 2 og 4 er af typen tal gange x, så de er samme type.
   Led nr. 1 og 3 er af typen tal uden bogstav, så de er af samme type.

3) Til sidst skal led af samme type slås sammen:
   $16 + 7 = 23$
   $-5\cdot x + 2\cdot x = -3x$
   Dvs.
   $6 - 5\cdot x + 7 + 2\cdot x = 23 - 3\cdot x$.

7.2 Parentes og gange

Der gælder

$$4\cdot(3 + x) = 4\cdot 3 + 4\cdot x$$

Regel: Man ganger et tal ind i en parentes ved at gange hvert led i parentesen med tallet.

Hvis vi bytter om på de to sider i ligningen, så får vi ligningen

$$4\cdot 3 + 4\cdot x = 4\cdot(3 + x)$$

Regel: En faktor der er i hvert led, kan sættes uden for en parentes.

Faktorer er noget der er ganget med hinanden.

7.3 Hæve parentes

Regel:

$$p - (q - r) = p - q + r\,.$$

Hvis der står et minus lige foran parentesen –(så hedder det en minus-parentes.

Regelen formuleret i ord:

Når man hæver en minus-parentes, (dvs. fjerner parentes og minus foran)
skal man ændre fortegn for hvert led i parentesen.

Eksempel:

$$\begin{aligned} & 7 - (5 - 2\cdot x) \\ = \; & 7 - (+5 - 2\cdot x) \\ = \; & 7 \quad -5 + 2\cdot x \end{aligned}$$

Regel:

$$p + (q - r) = p + q - r\,.$$

Hvis der står et plus lige foran parentesen +(så hedder det en plus-parentes.

Regelen formuleret i ord:

Når man hæver en plus-parentes, (dvs. fjerner parentes og plus foran)
skal man IKKE ændre fortegn i parentesen.

Eksempel:

$$\begin{aligned} & 2\cdot x + (6 - x) \\ = \; & 2\cdot x + (+6 - x) \\ = \; & 2\cdot x \quad +6 - x \end{aligned}$$

7.4 Gange ind i minus-parentes

Eksempel:

$$\begin{aligned} & 1 - 4\cdot(-2 + a) \\ = \; & 1 - (-8 + 4\cdot a) \\ = \; & 1 \quad +8 - 4\cdot a \end{aligned}$$

Først ganger vi ind i parentesen uden at hæve den.

7.5 Forklar løsningen

7.5a Opgave

Nedenstående omskrivninger viser en korrekt løsning af ligningen

$3(5 - 2x) = x + 1$.

Forklar linje for linje hvordan løsningen af ligningen fremkommer.

$3(5 - 2x) = x + 1$	Ligningen opstilles
$15 - 6x = x + 1$	
$15 = 7x + 1$	
$14 = 7x$	
$2 = x$	

7.5b Svar

$3(5 - 2x) = x + 1$	Ligningen opstilles
$15 - 6x = x + 1$	3 er ganget ind i parentesen
$15 = 7x + 1$	$6x$ er lagt til begge sider
$14 = 7x$	1 er trukket fra begge sider
$2 = x$	Begge sider er divideret med 7

7.5c Bemærkning

Når du skriver sådan en forklaring, så tænk på at hver linje er af en af følgende typer:

Ligningen opstilles

Minusparentesen er hævet

■ er ganget ind i parentesen

■ er lagt til begge sider

■ er trukket fra begge sider

Begge sider er ganget med ■

Begge sider er divideret med ■

7.5d Kontrol af løsning

Hvis man selv har fundet løsningen, så er det relevant at lave kontrol.

$3(5 - 2x) = x + 1$

$3(5 - 2\cdot\mathbf{2}) = \mathbf{2} + 1$

$3(5 - 4) = 3$

$3(1) = 3$

$3 = 3$ OK

Kontrollér at 2 er en løsning sådan:

(1) Indsæt 2 for x i den oprindelige ligning.

(2) Udregn de to sider hver for sig.

(3) Omformningsregler må ikke bruges.
F.eks. må man ikke gange ind i parentes.

(4) Ligningsregler må ikke bruges.

7.6 Find og forklar fejlene

Opgave

Nedenstående omskrivninger viser et forsøg på at løse ligningen

$2(2 + 5x) = x + 2$.

Det oplyses at omskrivningerne indeholder tre typer fejl.

Identificér og beskriv de tre typer af fejl.

$2(2 + 5x) = x + 2$.

$4 + 5x = x + 2$

$9x = x + 2$

$8x = 2$

$x = 4$

Svar

$2(2 + 5x) = x + 2$.

$4 + 5x = x + 2$	Kun første led i parentesen er ganget med 2. $5x$ skal også ganges med 2.
$9x = x + 2$	To led af forskellig type er lagt sammen. 4 er "tal uden x", og $5x$ er "tal gange x".
$8x = 2$	
$x = 4$	Der er udregnet 8 delt med 2 i stedet for 2 delt med 8.

Andre eksempler på fejl

$12x = 2 - 4(3 + x)$

$12x = -2(3 + x)$	4 kan ikke trækkes fra 2 da 4 er ganget med parentesen

$6x = 2x + 10$

$8x = 10$	$2x$ skal trækkes fra begge sider, men er lagt til på venstre side.

$3x + 5 = 2$

$3x = 3$	Der er udregnet $5 - 2$ i stedet for $2 - 5$.

7.7 Bestem x når vi kender y Herunder: Regler for ligevægt.

Opgave:

Nogle skiver findes i forskellige størrelser. Når y er diameter, målt i mm, og x er tykkelse, målt i mm, er $y = 3x + 5$.

Hvad er **tykkelsen** når **diameteren** er 17 mm?

Metode:

Spørgsmålet kan oversættes til

Hvad er x når y er 17 ? ← Da der i opgave står at y er diameter og x er tykkelsde.

Vi indsætter 17 for y i $y = 3x + 5$ og får

$$17 = 3x + 5$$

$$12 = 3x$$ Vi har trukket 5 fra begge sider .

$$\frac{12}{3} = \frac{3x}{3}$$ Vi har divideret begge sider med 3 .

$$4 = x$$ Vi har udregnet venstre side. Vi har forkortet højre side

I opgave står at x er tykkelse.

Konklusion:

Når skivens tykkelse er $\underline{\underline{4 \text{ mm}}}$, så er dens tykkelse er 17 mm

7.8 Bestem y når vi kender x

Opgave:

Nogle skiver findes i forskellige størrelser. Når y er diameter, målt i mm, og x er tykkelse, målt i mm, er $y = 3x + 5$.

Hvad er **diameteren** når **tykkelsen** er 2 mm?

Metode:

Spørgsmålet kan oversættes til

Hvad er y når x er 2 ? ← Da der i opgave står at y er diameter og x er tykkelse.

Vi indsætter 2 for x i $y = 3x + 5$ og får

$$y = 3 \cdot 2 + 5$$

Vi udregner højresiden og får

$$y = 11$$ ← I opgave står at y er diameter.

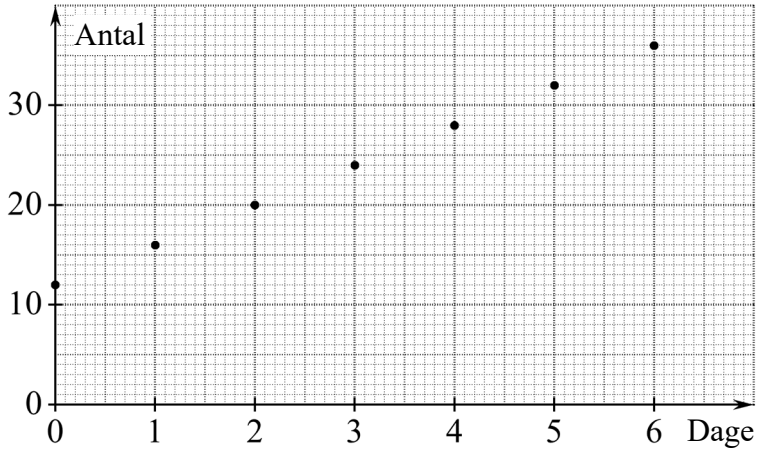
Konklusion:

En skives diameter er $\underline{\underline{11 \text{ mm}}}$ når dens tykkelse er 2 mm

8. Lineær funktion – intro

8.1 Oplæg til definition af lineær funktion

I dag er antal 12 . Hver dag stiger antal med 4 .
Vi kan tænke os til følgende:
Om 1 dag: antal $= 4 + 12$.
Om 2 dage: antal $= 4 + (4 + 12) = 4 + 4 + 12 = 4 \cdot 2 + 12$.
Om 3 dage: antal $= 4 + (4 \cdot 2 + 12) = 4 + 4 \cdot 2 + 12 = 4 \cdot 3 + 12$.
Om x dage: antal $= 4 \cdot x + 12$.
Forskriften er på formen $a \cdot x + b$.



8.2 Definition af lineær funktion

Hvis man om to variable x og y siger

y er en lineær funktion af x

så betyder det at

funktionen har en forskrift af typen $y = a \cdot x + b$

hvor konstanterne a og b kan være alle tal.
Konstanten a kaldes hældningskoefficienten .
Konstanten b kaldes konstantleddet .
På x's plads kan indsættes alle tal (dvs. definitionsmængden er alle tal).

At a og b er konstanter, betyder at deres talværdier ikke ændres når x ændres.

Eksempel:

$y = 5{,}2 \cdot x - 12{,}6$ er en lineær funktion.
hældningskoefficient $= 5{,}2$.
konstantled $= -12{,}6$

Begrundelse:

$y = a \cdot x + b$ vi sætter $a = 5{,}2$ og $b = -12{,}6$
$y = 5{,}2 \cdot x + (-12{,}6)$
$y = 5{,}2 \cdot x - 12{,}6$ dette er den givne forskrift

Eksempel:

$y = 2 - x$ er en lineær funktion.
hældningskoefficient $= -1$. Det er tallet foran x der er a .
konstantled $= 2$

Begrundelse:

$y = a \cdot x + b$ vi sætter $a = -1$ og $b = 2$
$y = (-1) \cdot x + 2$
$y = -x + 2$
$y = 2 - x$ dette er den givne forskrift

8.3 Sætning om graf for lineær funktion

At f er en lineær funktion,
er det samme som at grafen er en ret linje.

Ordet sætning betyder at det er en vigtig regel

9. Lineær funktion – betydning af *a* og *b*

9.1 Oplæg til betydning af *a* og *b*

Funktionen $y = \mathbf{0{,}4} \cdot x + \mathbf{1{,}2}$
er af typen $y = a \cdot x + b$

med $a = 0{,}4$ og $b = 1{,}2$

Funktionsværdien af -1 kan vi udregne sådan

Når $x = -1$ er $y = 0{,}4 \cdot (-1) + 1{,}2 = 0{,}8$

I tabellen er udregnet nogle flere funktionsværdier:

x:	-1	0	1	2	3
y:	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4

I tabellen ser vi:

Hver gang vi lægger 1 til x-værdien,
så bliver der lagt **0,4** til y-værdien,
dvs. der bliver lagt a til y-værdien

Når $x = 0$, er $y = \mathbf{1{,}2}$
dvs. $y = b$

Dette kan tydeliggøres sådan:

	+1	+1	+1	+1
x:	-1	**0**	1	2	3
y:	0,8	**1,2**	1,6	2,0	2,4
	+0,4	+0,4	+0,4	+0,4

$y = \mathbf{0{,}4} \cdot x + \mathbf{1{,}2}$

9.2 Sætning om betydning af a og b

For en lineær funktion $y = a \cdot x + b$ gælder:

9.2a Hver gang vi lægger 1 til x-værdien,
så bliver der lagt a til y-værdien.

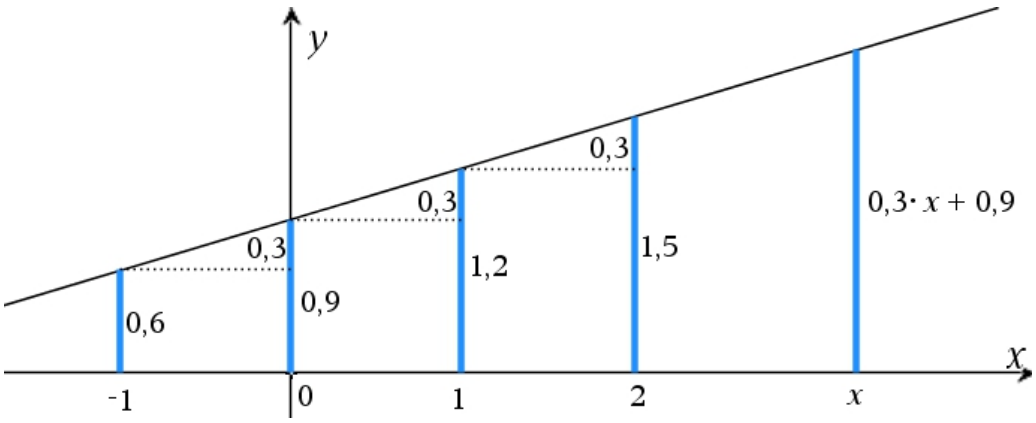
9.2b Når $x = 0$, er $y = b$.

9.3 Eksempler på betydning af a og b

9.3a Funktionen $y = 0{,}3x+0{,}9$
er af typen $y = a \cdot x + b$

Af 9.2b slutter vi at punktet (0 , 0,9) ligger på grafen.
Herefter kan vi af 9.2a slutte at punktet (1 , 1,2) ligger på grafen.
Herefter kan vi af 9.2a slutte at punktet (2 , 1,5) ligger på grafen.
Osv.

Billedet viser grafen.
Vi ser at den blå stolpes højde (dvs. y-koordinaten) bliver 0,3 større når x bliver 1 større.



9.3b Hvis vi aflæser punkterne

(0,7), (1,11), (2,15), (3,19)

på grafen for en lineær funktion $y = a \cdot x + b$,
så kan vi af 9.2a og 9.2b slutte at $a = 4$ og $b = 7$,
så forskriften er $y = 4x+7$.

9.3c En funktion har forskriften $y = 3x+5$.

<u>Af 9.2a følger:</u> Hver gang x bliver 1 enhed større, så vil y blive 3 enheder større.

<u>Heraf følger:</u> Når x bliver 10 enheder større, så vil y blive 30 enheder større.

		+10	+10	+10	+10
x:	–10	**0**	10	20	30
y:	–25	**5**	35	65	95
		+30	+30	+30	+30

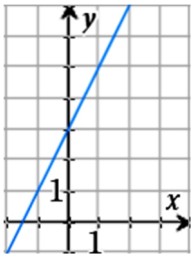
$y = 3 \cdot x + 5$ $\quad$ $3 \cdot 10 = 30$

9.4 Aflæs a og b på graf

Billederne viser grafen for en funktion f.

Grafen er en ret linje, så

forskrift er af typen $f(x) = a \cdot x + b$.

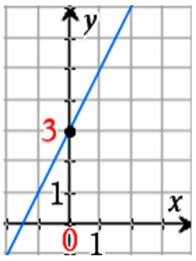


På graf aflæser vi at

når $x = 0$, så er $y = 3$,

så

$b = 3$.

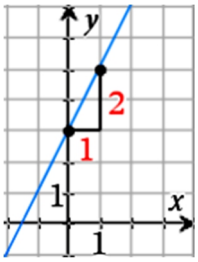


På graf ser vi at når vi trækker punkt langs grafen

så x bliver 1 større ,
så vil y blive 2 større,

så

$a = 2$.



Vi har nu aflæst på grafen at f har forskriften

$f(x) = 2 \cdot x + 3$.

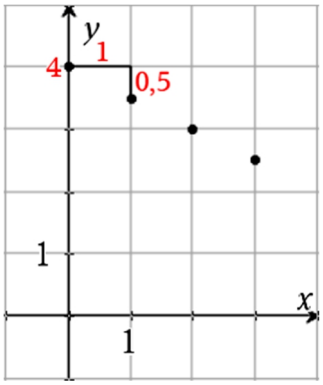
9.5 Bruge a og b til at afsætte grafpunkter

En funktion f har forskriften $f(x) = -0{,}5 \cdot x + 4$.
Forskriften er af typen $f(x) = a \cdot x + b$.

$b = 4$, så grafen skærer y-aksen ved 4 .
Dette bruger vi til at tegne et punkt på grafen (se figur).

$a = -0{,}5$, så når et punkt skubbes langs grafen så x bliver én større, så vil y blive 0,5 **mindre** .

Dette bruger vi til at tegne nogle flere punkter på grafen (se figur).



9.6 Graf og fortegn for *a*

9.6a På en lineær graf går vi en enhed mod højre.
Så bliver der lagt a til y-koordinaten.
Heraf følger:

Når a er positiv, går graf opad mod højre.
Når a er nul, er graf vandret.
Når a er negativ, går graf nedad mod højre.

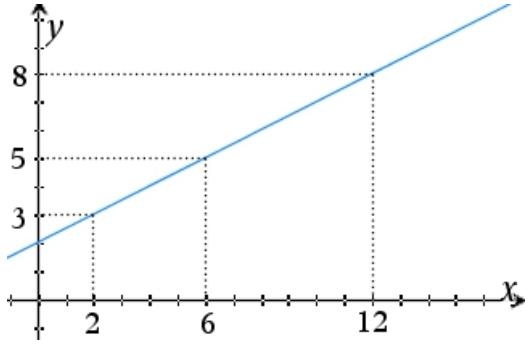
9.6b Voksende funktion

Billedet til højre viser grafen for en funktion.

Vi trækker et punkt langs grafen så x bliver større og større.
Vi ser at så bliver y også større og større.

En funktion siges at være **voksende** hvis der altid gælder at

når x bliver større,
så bliver y også større.



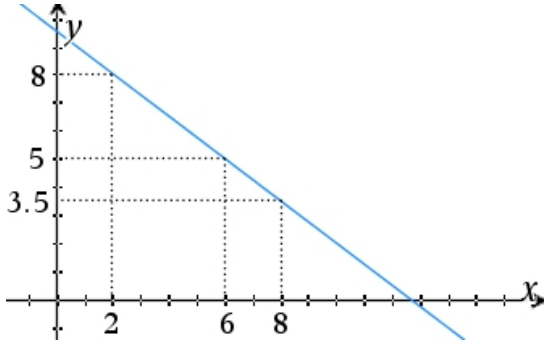
9.6c Aftagende funktion

Billedet til højre viser grafen for en funktion.

Vi trækker et punkt langs grafen så x bliver større og større.
Vi ser at så bliver y mindre og mindre.

En funktion siges at være **aftagende** hvis der altid gælder at

når x bliver større,
så bliver y mindre.



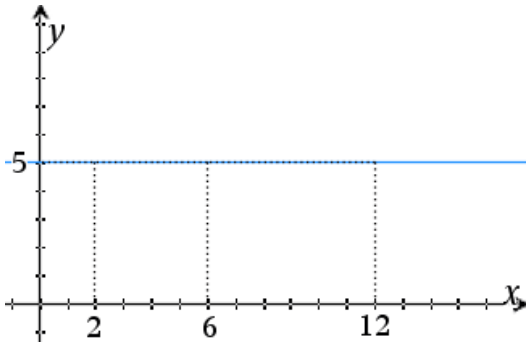
9.6d Konstant funktion

Billedet til højre viser grafen for en funktion.

Vi trækker et punkt langs grafen så x bliver større og større.
Vi ser at så bliver y ved med at være samme tal.

En funktion siges at være **konstant** hvis der altid gælder at

når x bliver større,
så bliver y ved med at være samme tal.



9.6e Af 9.5a følger at for en lineær funktion $f(x) = a \cdot x + b$ gælder:
Når a er positiv, er funktionen voksende.
Når a er nul, er funktionen konstant.
Når a er negativ, er funktionen aftagende.

10. Lineær funktion – forskrift er kendt, betydning af a og b

10.1 Opgave med voksende funktion

For en dåse er $y = 12 \cdot x + 35$
hvor y = pris i kr. og x = vægt i gram af dåsens indhold.
Hvad fortæller tallene 12 og 35 om varen?

Svar:

Forskriften er af typen $y = a \cdot x + b$ med $a = 12$

så når man lægger 1 til x så lægges a til y
dvs. når man lægger 1 til **vægt** så lægges **12** til **pris**

Denne linje er en tekst-formel. Sæt ind i denne formel for at finde betydningen af tallet på a's plads i $a \cdot x + b$.

så tallet 12 fortæller:

Når vægten stiger med 1 gram, så stiger prisen med 12 kr.

Forskriften er af typen $y = a \cdot x + b$ med $b = 35$

så når $x = 0$ er $y = b$
dvs. når **vægt** = 0 er **pris** = 35

Denne linje er en tekst-formel. Sæt ind i denne formel for at finde betydningen af tallet på b's plads i $a \cdot x + b$.

så tallet 35 fortæller:

Når dåsen er tom, er prisen 35 kr.

10.2 Opgave med aftagende funktion

I en by er $y = -40 \cdot x + 520$

hvor y = antal beboere og x = tid i år efter 2007.
Hvad fortæller tallene –40 og 520 om byen?

Svar:

Forskriften er af typen $y = a \cdot x + b$ med $a = -40$

så når man lægger 1 til x så lægges a til y
dvs. når man lægger 1 til **tid** så lægges **–40** til **antal**

Denne linje er en tekst-formel. Sæt ind i denne formel for at finde betydningen af tallet på a's plads i $a \cdot x + b$.

så tallet –40 fortæller:

Når der går et år, så falder antal beboere med 40.

Forskriften er af typen $y = a \cdot x + b$ med $b = 520$

så når $x = 0$ er $y = b$
dvs. når **tid** = 0 er **antal** = 520

Denne linje er en tekst-formel. Sæt ind i denne formel for at finde betydningen af tallet på b's plads i $a \cdot x + b$.

så tallet 520 fortæller:

I 2007 var antal beboere 520.

10.3 Når x stiger mere end 1 enhed

Udviklingen i afgiftens størrelse er fastlagt ved funktionen

$$f(x) = 1{,}2 \cdot x + 21$$

hvor $f(x) = \text{afgift}$ i kr. og $x = \text{tid}$ målt i uger efter uge 3 .

Hvor meget stiger afgiften på 6 uger?

Svar:

Forskriften er af typen $a \cdot x + b$, og $a = 1{,}2$, så

hver gang x bliver 1 enhed større, vil y blive 1,2 enheder større.

Dvs.

hver uge stiger afgiften 1,2 kr.

Da

$6 \cdot 1{,}2 = 7{,}2$

gælder

På 6 uger stiger afgiften med 7,2 kr.

11. Lineær funktion – skriv forskrift, betydning af *a* og *b*

11.1 Opgave med voksende funktion

Ved køb var plantens højde 27 cm, og højden bliver 2,5 cm større på en uge.
Indfør passende variable og opstil en model der beskriver udviklingen i plantens højde.

Svar:

Vi indfører følgende variable:

y = højde (cm) og x = tid (uger efter køb)

Oplyst: y stiger samme antal enheder hver gang x stiger 1 enhed
Så: Funktionen er lineær: $y = a \cdot x + b$.

Oplyst: Hver uge bliver højde 2,5 cm støre
Dvs.: Når man lægger 1 til x (tid)
så lægges 2,5 til y (højde)

Så $a = 2{,}5$

Oplyst: På tidspunkt for køb er højde 27 cm
Dvs. Når $x = 0$ så er $y = 27$

Så $b = 27$

Vi kan nu opstille følgende model:

$y = 2{,}5 \cdot x + 27$, y = højde (cm), x = tid (uger efter køb)

11.2 Opgave med aftagende funktion

Afstanden bliver 0,2 mm mindre for hver grad temperaturen stiger, og ved 0 °C er afstanden 8,4 mm.

Opstil en formel til at beregne afstanden y mm når temperaturen er x °C.

Svar:

Oplyst: y = afstand (mm) og x = temperatur (°C)

Oplyst: y falder samme antal enheder hver gang x stiger 1 enhed
så funktionen er lineær: $y = a \cdot x + b$.

Oplyst: For hver grad bliver afstand 0,2 mm mindre
Dvs. Når man lægger 1 til x (temperatur) så lægges –0,2 til y (afstand)

Så $a = -0{,}2$

Oplyst: Når temperaturen er 0 °C er afstand 8,4 mm
Dvs. Når $x = 0$ så er $y = 8{,}4$

Så $b = 8{,}4$

Formel:

$y = -0{,}2 \cdot x + 8{,}4$, y = afstand (mm), x = temperatur (°C)

12. Lineær funktion – argumentation, betydning af *a* og *b*

12.1 Eksempel på argumentation, *a*

For funktionen $y = 2 \cdot x + 5$ vil vi bevise hvad der sker med y når x bliver 3 enheder større.

Når vi skal gøre x tre enheder større, må vi starte med en bestemt værdi af x.
Vi kalder denne x-værdi for t.
Da t kan være ethvert tal, gælder vores argumentation for alle x-værdier.
Hvis vi skrev 8 i stedet for t, så ville vores argumentation kun gælde når start-værdien af x er 8.

Næste x-værdi skal være 3 enheder større end t,
så den næste x-værdi er $t+3$:

x :	t	$t+3$
$y = 2 \cdot x + 5$:		

Ved hjælp af forskriften finder vi de y-værdier der svarer til de to x-værdier
t og $t+3$:

Når x er t, så er $y = 2 \cdot x + 5 = 2 \cdot t + 5$

Når x er $t+1$, så er $y = 2 \cdot x + 5 = 2 \cdot (t+3) + 5$

x :	t	$t+3$
$y = 2 \cdot x + 5$:	$2 \cdot t + 5$	$2 \cdot (t+3) + 5$

Vi omskriver den anden y-værdi:

$$2 \cdot (t+3) + 5$$

$$= 2 \cdot t + 2 \cdot 3 + 5$$ Vi har ganget 2 ind i parentesen.

$$= 2 \cdot t + 6 + 5$$ Vi har reduceret.

$$= 2 \cdot t + 5 + 6$$ Vi har byttet om på to af leddene.

Den nye y-værdi $2 \cdot t + 5 + 6$ er altså den gamle y-værdi $2 \cdot t + 5$ plus 6 :

+3

x :	t	$t+3$
$y = 2 \cdot x + 5$:	$2 \cdot t + 5$	$2 \cdot t + 5 + 6$

+6

Vi har bevist følgende:

For funktionen $y = 2 \cdot x + 5$ gælder:

Når x bliver 3 enheder større,
vil y blive 6 enheder større.

12.2 Eksempel på argumentation, *b*

For funktionen $y = 2 \cdot x + 5$ vil vi bevise følgende:

Grafen skærer y-aksen i punktet med y-koordinat 5 .

Skæringspunktet ligger på y-aksen, så dets x-koordinat er 0 .

Skæringspunktet ligger på grafen så dets y-koordinat fås ved at sætte dets x-koordinat ind i forskriften:

$$y = 2 \cdot 0 + 5 = 5 \ .$$

Det var dette vi skulle bevise.

12.3 Bevis for reglen om betydningn af *a*

For funktionen $y = a \cdot x + b$ vil vi bevise hvad der sker med y når x bliver 1 enhed større.

Vi starter med en vilkårlig x-værdi. Vi kalder denne x-værdi for t .
Næste x-værdi skal være 1 enhed større end t , så næste x-værdi er $t+1$:

x :	t	$t+1$
$a \cdot x + b$:		

Ved hjælp af forskriften finder vi de y-værdier der svarer til de to x-værdier
t og $t+1$:

Når x er t , så er $y = a \cdot x + b = a \cdot t + b$

Når x er $t+1$, så er $y = a \cdot x + b = a \cdot (t+1) + b$

x :	t	$t+1$
$y = a \cdot x + b$:	$a \cdot t + b$	$a \cdot (t+1) + b$

Vi omskriver den anden y-værdi:

$$a \cdot (t+1) + b$$

$$= a \cdot t + a \cdot 1 + b$$ Vi har ganget a ind i parentesen.

$$= a \cdot t + a + b$$ Vi har reduceret.

$$= a \cdot t + b + a$$ Vi har byttet om på to af leddene.

Den nye y-værdi $a \cdot t + b + a$ er altså den gamle y-værdi $a \cdot t + b$ plus a :

x :	t	$t+1$
$y = a \cdot x + b$:	$a \cdot t + b$	$a \cdot t + b + a$

+1

+a

Vi ser at man skal lægge a til den første y-værdi for at få den anden y-værdi.
Vi har bevist følgende:

For funktionen $y = a \cdot x + b$ gælder:

Når x bliver 1 enheder større,
vil y blive a enheder større.

12.4 Bevis for reglen om betydningen af *b*

For funktionen $y = a \cdot x + b$ vil vi bevise følgende:

b er y-værdien når x-værdien er 0 .

Man kan finde y-værdien ved at sætte x-værdien ind i forskriften,
og her er x-værdien 0 :

$$y = a \cdot 0 + b = 0 + b = b \ .$$

Det var dette vi skulle bevise.

13. Lineær funktion – udregn *a* og *b*

13.1 Udregn *b* i $y = a \cdot x + b$ ud fra *a* og et punkt

Punktet $(4, 35)$ ligger på grafen for funktionen $y = 8 \cdot x + b$.
Bestem tallet b .

Svar:

Punktet $(4, 35)$ ligger på grafen for funktionen $\boldsymbol{y} = 8 \cdot \boldsymbol{x} + b$

så $\mathbf{35} = 8 \cdot \mathbf{4} + b$

$35 = 32 + b$

$3 = b$

Konklusion: $\underline{\underline{b = 3}}$.

For når vi indsætter punktets x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi punktets y-koordinat.

Her er ligningen løst uden hjælpemidler.
I stedet kan man bruge solve :
Nspire løser ligningen $35 = 8 \cdot 4 + b$
mht. b og får $b = 3$:
solve(35=8· 4+b,b) ▸ b=3

13.2 Udregn *a* i $y = a \cdot x + b$ ud fra *b* og et punkt

Punktet $(5, 8)$ ligger på grafen for funktionen $y = a \cdot x + 18$.
Bestem tallet a .

Svar:

Punktet $(5, 8)$ ligger på grafen for funktionen $\boldsymbol{y} = a \cdot \boldsymbol{x} + 18$

så $\mathbf{8} = a \cdot \mathbf{5} + 18$

$-10 = a \cdot 5$

$-2 = a$

Konklusion: $\underline{\underline{a = -2}}$.

For når vi indsætter punktets x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi punktets y-koordinat.

Her er ligningen løst uden hjælpemidler.
I stedet kan man bruge solve :
Nspire løser ligningen $8 = a \cdot 5 + 18$
mht. a og får $a = -2$:
solve(8=a· 5+18,a) ▸ a=-2

13.3 Udregn a og b i $y = a \cdot x + b$ ud fra to punkter uden brug af formel

Punkterne $(-7, 1)$ og $(8, 4)$ ligger på grafen for funktionen

$$y = a \cdot x + b.$$

Find tallene a og b.

Svar:

Da punkterne $(-7, 1)$ og $(8, 4)$ ligger på grafen for

funktionen $\quad \boldsymbol{y} = a \cdot \boldsymbol{x} + b$

gælder $\quad \mathbf{1} = a \cdot \mathbf{(-7)} + b$

og $\quad \mathbf{4} = a \cdot \mathbf{8} + b$

for når vi indsætter punktets x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi punktets y-koordinat.

Vi løser ligningssystemet

$$1 = a \cdot (-7) + b \quad \text{og} \quad 4 = a \cdot 8 + b$$

mht. a og b, og får $\underline{\underline{a = 0{,}2}}$ og $\underline{\underline{b = 2{,}4}}$.

Du skal vise hvordan du løser ligningssystemet.
I 13.5 er vist hvordan man løser ligningssystemet i Nspire.
I 13.6 er vist hvordan man løser ligningssystemet uden hjælpemidler.

13.4 Udregn a og b i $y = a \cdot x + b$ ud fra to punkter givet ved tekst

Der er en lineær sammenhæng mellem temperatur og overskud.

Når temperaturen er $-3\,°\text{C}$, er overskuddet 12 mio. kr.

Når temperaturen er $5\,°\text{C}$, er overskuddet 28 mio. kr.

Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem temperatur og overskud.

Svar

Vi sætter

x = temperatur (målt i °C)

y = overskud (målt i mio. kr.)

Det er nødvendigt også at skrive dette!

Der er oplyst to x-værdier og tilhørende y-værdier:

Til $x_1 = -3$ svarer $y_1 = 12$.

Til $x_2 = 5$ svarer $y_2 = 28$.

Da sammenhængen er lineær, er den søgte ligning på formen $y = ax + b$.

Her skal skrives udregningen af a og b ud fra de to punkter $(-3, 12)$ og $(5, 28)$.
Man kan bruge metoden fra 13.3 eller metoden fra 13.8c.

Dvs.:

Ligningen $\underline{\underline{y = 2x + 18}}$ viser sammenhængen mellem

temperaturen x i °C og overskuddet y i mio. kr.

13.5a Løs ligningssystem med Nspire

Løs ligningssystemet

$$1 = a \cdot (-7) + b \quad \text{og} \quad 4 = a \cdot 8 + b$$

mht. a og b.

Svar:

Nspire løser ligningssystemet

$$1 = a \cdot (-7) + b \quad \text{og} \quad 4 = a \cdot 8 + b$$

mht. a og b og får $a = 0{,}2$ og $b = 2{,}4$:

solve(1=a· -7+b and 4=a· 8+b,a,b) ▸ a=0.2 and b=2.4

Konklusion: $\underline{\underline{a = 0{,}2}}$ og $\underline{\underline{b = 2{,}4}}$.

13.5b Løs ligningssystem uden hjælpemidler

Løs ligningssystemet

$$1 = a \cdot (-7) + b \quad \text{og} \quad 4 = a \cdot 8 + b$$

Her hedder de ukendte a og b.

mht. a og b.

Svar:

Vi løser følgende ligningssystem:

(1) $1 = a \cdot (-7) + b$

(2) $4 = a \cdot 8 + b$

Vi starter med at isolere a eller b i en af ligningerne.

Her har vi valgt at isolere b i ligning (1).

Facit ville blive det samme hvis vi havde valgt en af de tre andre muligheder:
isolere a i ligning (1).
isolere b i ligning (2).
isolere a i ligning (2).

Af (1) får vi

(3) $1 + 7a = b$

Vi indsætter dette i (2) og får

$$4 = 8a + (1 + 7a)$$

hvoraf

$$4 = 15a + 1$$
$$3 = 15a$$
$$\frac{3}{15} = \frac{15a}{15}$$
$$0{,}2 = a$$

Vi indsætter i ligning (2) fordi vi isolerede i ligning (1).

Hvis vi isolerer i ligning (2), så skal vi indsætte i ligning (1)

Dette indsætter vi i (3) og får

$$1 + 7 \cdot 0{,}2 = b$$

hvoraf

$$1 + 1{,}4 = b$$
$$2{,}4 = b$$

Den metode vi har brugt, hedder:
Løsning af ligningssystem ved **substitution**.
Ordet substitution betyder udskifte.
I besvarelsen **udskifter** vi b i (2) med 1+7a.

Konklusion: $\underline{\underline{a = 0{,}2}}$ og $\underline{\underline{b = 2{,}4}}$.

Kontrol af facit:

Vi kan kontrollere facit ved at vi i

(1) $1 = a \cdot (-7) + b$

(2) $4 = a \cdot 8 + b$

indsætter 0,2 og 2,4 for a og b:

(1) $1 = 0{,}2 \cdot (-7) + 2{,}4$

(2) $4 = 0{,}2 \cdot 8 + 2{,}4$

(1) $1 = -1{,}4 + 2{,}4$

(2) $4 = 1{,}6 + 2{,}4$

Vi ser at begge ligninger passer.

13.6 Sammensat opgave om udregning af *a* og *b*

Grafen for funktionen f er en ret linje der har hældningskoefficienten 1,5 og skærer andenaksen i punktet med andenkoordinat 2,5.

Bestem førstekoordinaten til det punkt på grafen hvis andenkoordinat er 10 .

Svar:

Grafen for funktionen f er en ret linje der har hældningskoefficienten 1,5 og skærer andenaksen i punktet med andenkoordinat 2,5 .

Derfor er $f(x) = 1{,}5x + 2{,}5$.

Nspire løser ligningen $1{,}5x + 2{,}5 = 10$ mht. x og får $x = 5$.

solve(1.5·x+2.5=10,x) ▸ x=5.

Grafens punkt med andenkoordinat 10 har førstekoordinat 5 .

Der står ikke at du skal finde forskriften.
Du skal selv indse at forskriften skal bruges til at finde svaret.

13.7 Sammensat opgave om udregning af *a* og *b*

Grafen for funktionen $f(x) = 3x + b$ går gennem punktet (4, 5).
Bestem $f(-3)$.

Svar:

Da grafen for funktionen $f(x) = 3x + b$ går gennem punktet $P(4, 5)$, fås

$3 \cdot \mathbf{4} + b = \mathbf{5}$

$b = 5 - 12$

$b = -7$

Dvs. $f(x) = 3 \cdot x - 7$ så

$f(-3) = 3 \cdot (-3) - 7$

$f(-3) = -9 - 7$

$f(-3) = -16$

Der står ikke at du skal finde forskriften.
Du skal selv indse at forskriften skal bruges til at finde svaret.

13.8 Udregn a og b i $y = a \cdot x + b$ ved hjælp af formler

13.8a Sætning

Når

(x_1, y_1) og (x_2, y_2)

er forskellige punkter på grafen for funktionen

$$f(x) = a \cdot x + b$$

så er

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = y_1 - a \cdot x_1$$

13.8b Bevis

Da punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) ligger på grafen for funktionen $y = a \cdot x + b$

gælder $y_1 = a \cdot x_1 + b$
og $y_2 = a \cdot x_2 + b$

for når vi indsætter punktets x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi punktets y-koordinat.

Vi løser følgende ligningssystem mht. a og b :

(1) $y_1 = a \cdot x_1 + b$
(2) $y_2 = a \cdot x_2 + b$

I ligningen (1) trækker vi $a \cdot x_1$ fra begge sider:

(3) $y_1 - a \cdot x_1 = b$ Dette er den ene af de formler vi ville bevise.

I ligningen (2) erstatter vi $\boldsymbol{b}$ med venstre side af ligningen (3):

$$y_2 = a \cdot x_2 + \boldsymbol{y_1 - a \cdot x_1}$$

I denne ligning trækker vi y_1 fra begge sider:

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 - a \cdot x_1$$

a er en fælles faktor for de to led på højre side.

På højre side sætter vi a uden for en parentes:

$$y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$$

Vi dividerer begge sider med $x_2 - x_1$:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Dette er den første af de formler vi ville bevise.

Vi dividerer begge sider med tallet $x_2 - x_1$ som ikke er 0 da de to punkter er forskellige. Når to punkter på en graf er forskel–lige, så er deres x-koordinater forskellige.

13.8c Eksempel på brug af formlerne

Opgave:

Punkterne $(-7,\ 1)$ og $(8,\ 4)$ ligger på grafen for funktionen $y = a \cdot x + b$.

Oplysningen om de to punkter er nogle gange skrevet sådan: $f(-7) = 1$ og $f(8) = 4$.

Bestem tallene a og b.

Svar:

Vi indsætter i formler for a og b:

Af $(x_1, y_1) = (-7,\ 1)$ og $(x_2, y_2) = (8,\ 4)$ får vi

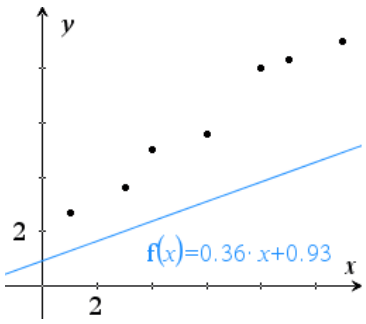
$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{y_2 - y_1}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}} = \frac{4-1}{8-(-7)} = \frac{3}{15} = \underline{\underline{0,2}}$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y_1 - a \cdot x_1} = 1 - 0,2 \cdot (-7) = \underline{\underline{2,4}}$$

13.9 Udregn a og b i $y = a \cdot x + b$ ved regression

13.9a Oplæg til regression

Billedet viser Nspire-skærmen.
Den blå linje er graf for funktionen med den viste forskrift.



Med musen kan man flytte og dreje linjen.
Så ændres forskriften automatisk.

De sorte punkter viser målte værdier.

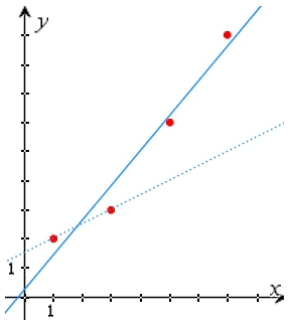
Hvis vi trækker i linjen så den passer godt med punkterne, så vil den viste forskrift være en model af den pågædende sammenhæng.

Vi kan få Nspire til at udføre lineær regression på punkterne.
Så får vi forskriften for den linje der passer bedst med punkterne.

13.9b Alle tal skal bruges

Tabel:

x:	1	3	5	7
y:	2	3	6	9



De fire punkter i tabellen er vist som røde prikker.

Hvis vi bruger alle punkter til at bestemme lineær graf, så får vi den fuldt optrukne linje.

Hvis vi kun bruger de to første punkter, så får vi den punkterede linje som passer dårligere med tabellen.

Man skal altså bruge alle tal i tabellen.

13.9c Opgavens formulering

Vi har målt længde og bredde for nogle plader:

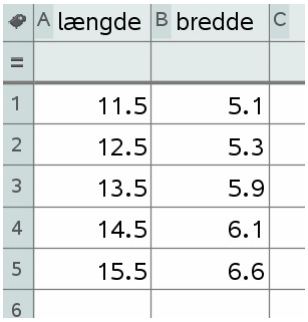
længde i cm	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5
bredde i cm	5,1	5,3	5,9	6,1	6,6

For plader af denne type gælder med god tilnærmelse $y = ax+b$
hvor y er bredde i cm, og x er længde målt i cm.

a) Benyt tabellens data til at bestemme a og b.

b) Tegn et punktplot af tabellens data.

13.9d Brugsanvisning til regression i Nspire



	A längde	B bredde	C
=			
1	11.5	5.1	
2	12.5	5.3	
3	13.5	5.9	
4	14.5	6.1	
5	15.5	6.6	
6			

Del siden op i to.
Vælg Lister og Regneark i venstre vindue.
Tast tal og søjlenavne som vist til højre.
Når du har tastet tabellen, så flyt markør til tomt felt.

Vælg i højre vindue Diagrammer og statistik .
Klik under x-aksen og vælg søjlen med x-værdier.
Klik til venstre for y-aksen og vælg søjlen med y-værdier.

Vælg i værktøjsmenuen Undersøg data / Regression / lineær .

Der er automatisk fremkommet et punktplot.
Behold dette som illustration selv om der ikke i opgaven er krav om punktplot.

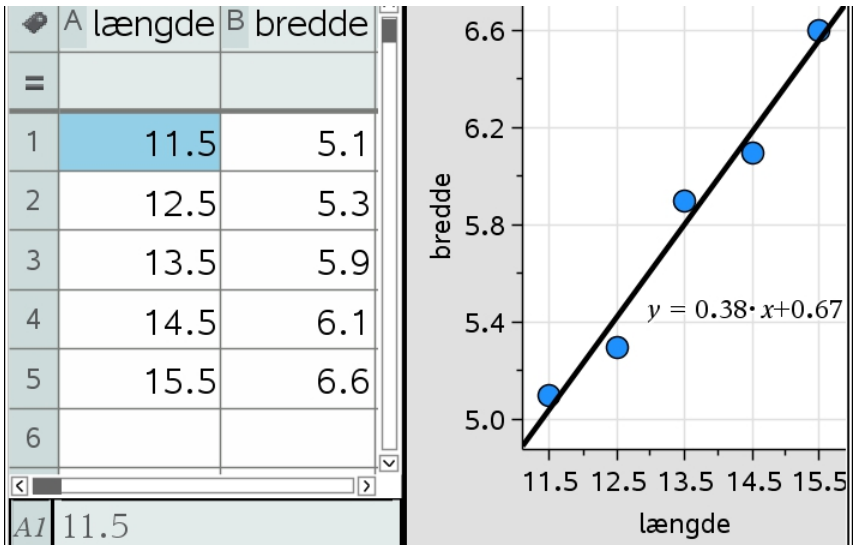
13.9e Besvarelsen

I Nspire kan besvarelsen se sådan ud:

Med tilnærmelse er $f(x) = a \cdot x+b$
hvor $f(x)$ er bredde (cm), og x er længde (cm).

a) Vi taster længde i x–søjle og bredde i y–søjle som vist i næste vindue.
Nspire laver **lineær regression** og får $f(x) = 0{,}38 \cdot x + 0{,}67$.
Dvs. $a = 0{,}38$ og $b = 0{,}67$.

b) I næste vindue viser figuren til højre et punktplot af tabellens data.



13.9f Krav til besvarelsen

Besvarelsen skal indeholde følgende oplysninger:

Hvilke tal du har tastet.
Hvilke af tallene du har tastet i x-søjlen.
Hvilke af tallene du har tastet i y-søjlen.
At du får Nspire til at udføre regression.
Hvilken type regression.

13.9g Årstal

Tabellen viser antallet af boliger i et bestemt område.

Årstal	1998	2000	2002	2004	2006	2008
Antal boliger	133	170	186	218	232	247

Antallet af boliger kan med god tilnærmelse beskrives ved en ligning af typen $y = ax + b$ hvor y er antallet af boliger, og x er antal år efter 1998.

Bestem tallene a og b.
I Nspire kan besvarelsen se sådan ud: Se brugsanvisning i 13.9d .

Med tilnærmelse: $y = a \cdot x + b$, y = antal boliger, x = antal år efter 1998 .

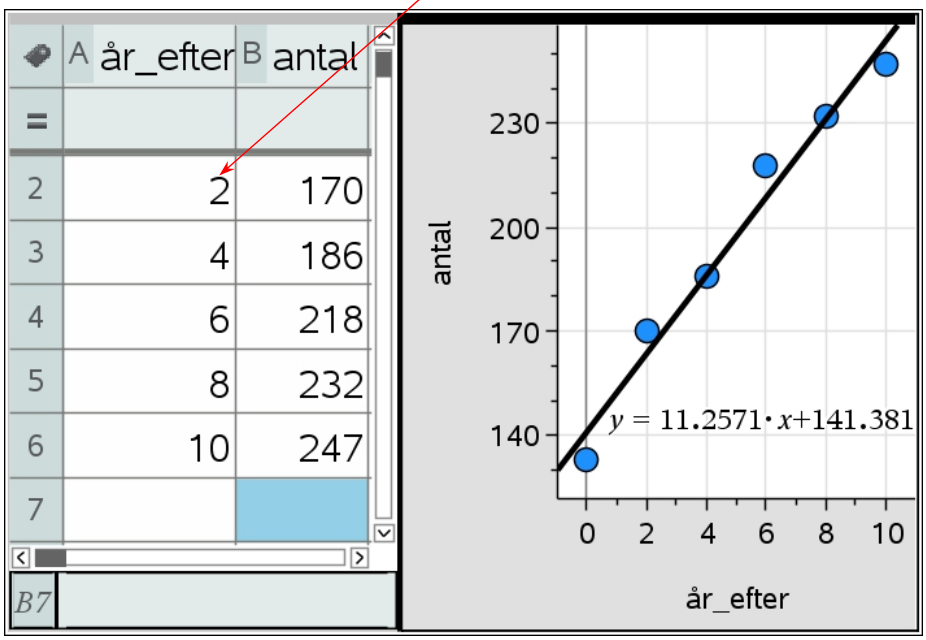
År:	1998	2000	2002	2004	2006	2008
Antal boliger:	133	170	186	218	232	247

a) Antal år efter 1998 er tastet i x–søjle og antal boliger i y–søjle som vist i næste vindue.

Nspire laver **lineær regression** og får $f(x) = 11{,}2571 \cdot x + 141{,}381$.

Dvs. a = 11,26 og b = 141,4 .

Vi taster IKKE årstal
da x ikke er årstallet!



14. Residual-plot

14.1 Hvad er residualer og residual-plot

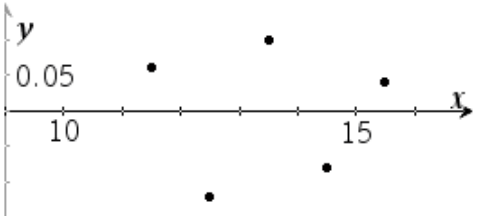
I de to øverste rækker i tabellen nedenfor står tallene fra 13.9c ,
dvs. anden række viser de **målte y-værdier**.

Vi fandt modellen $y = 0{,}38 \cdot x + 0{,}67$. I denne model gælder:
Når $x = 11{,}5$, så er $y = 0{,}38 \cdot 11{,}5 + 0{,}67 = 5{,}04$ (modellens y-værdi).
I tredje række står **modellens y-værdier**.

I fjerde række har vi trukket models y fra målt y .
Tallene i denne række kaldes **residualer** .

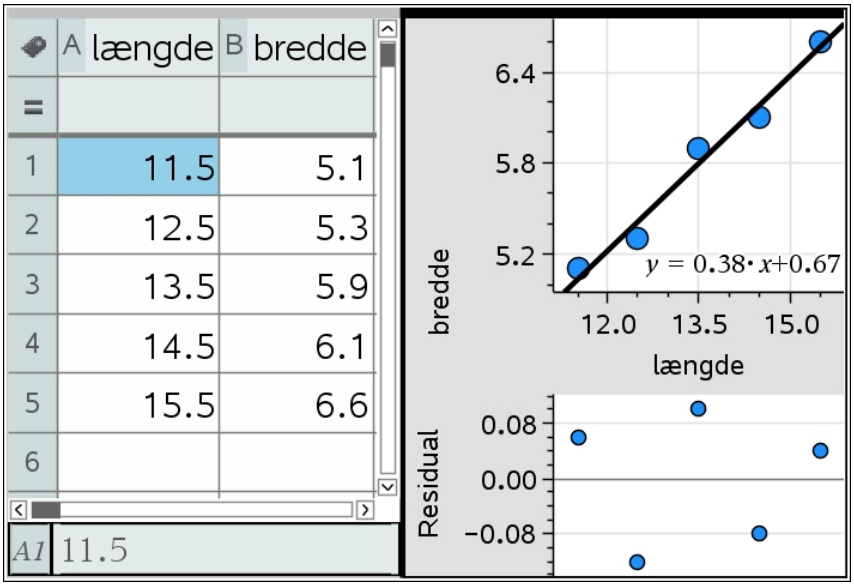
Længde i cm	x	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5
Bredde i cm	$y_{\text{målt}}$	5,1	5,3	5,9	6,1	6,6
Bredde i cm	y_{model}	5,04	5,42	5,8	6,18	6,56
Residual i cm	$y_{\text{målt}} - y_{\text{model}}$	0,06	–0,12	0,1	–0,08	0,04

I koordinatsystemet til højre er residualerne afsat som funktion af x . Dette kaldes et residual-plot.



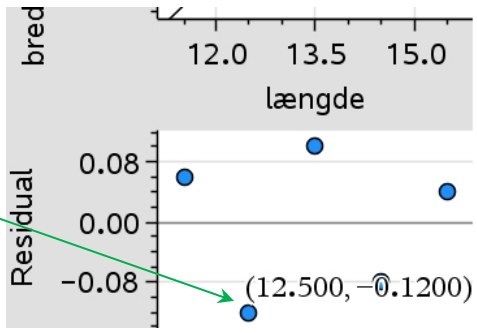
14.2 Residual-plot – brugsanvisning til Nspire

På Nspire kan vi nemt få vist residualplottet:
Start på ny opgave.
Vælg et vindue af typen Lister og regneark .
Navngiv en søjle og tast x-værdier i den.
Navngiv en søjle og tast y-værdier i den.
Tilføj et vindue af typen Diagrammer og statistik .
Klik under x-aksen og vælg søjlen med x-værdier.
Klik til venstre for y-aksen og vælg søjlen med y-værdier.
Vælg i værktøjsmenuen Undersøg data / Regression / lineær .
Vælg i værktøjsmenuen Undersøg data / Residualer / Residualplot



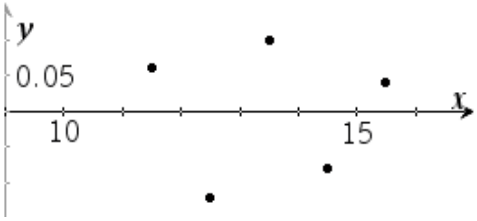
14.3 Residual-plot – Aflæs største afvigelse

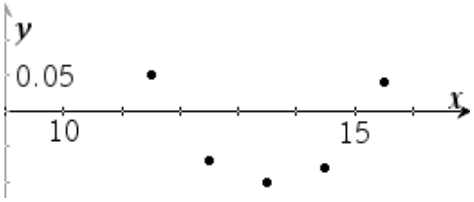
På residualplottet finder vi punktet med størst afstand til x-aksen.
Når markøren føres hen til punktet, fremkommer koordinatsættet.
Vi ser at den største afvigelse mellem målt værdi og modelværdi for bredden er 0,12 cm, og det er når længden er 12,5 cm.



14.4 Residual-plot – Vurder typen af model

I koordinatsystemet nedenfor til venstre er vist residualerne fra 13.9c .





Afvigelserne virker tilfældige.
Dette tyder på at det er rimeligt at bruge en model af typen $y = a \cdot x + b$.

Hvis afvigelserne ligger på kæde som vist til højre, så tyder det på at det er bedre at bruge en anden type model.

15. Model

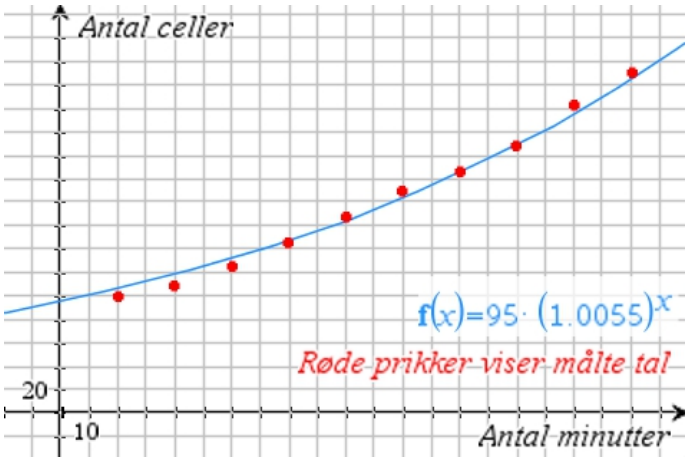
15.1 Hvad er en model?

En **model** er noget matematik der ligner noget fra virkeligheden.

Følgende funktion er en model:

$f(x) = 95 \cdot 1{,}0055^x$
$f(x)$ er antal celler
x er antal minutter.

Den blå kurve er graf for f.
De røde prikker er målte tal.



På billedet ser vi f.eks.:

På tidspunktet 20 minutter:
målt antal er lidt mindre end models antal.

På tidspunktet 100 minutter:
målt antal er lidt større end models antal.

Vigtig egenskab ved en matematisk model:

Et målt tal er normalt ikke præcis lig modellens tal.

15.2 Absolut og relativ afvigelse

15.2a Vi udregner antal dyr med en model:

Udregnet antal: 20 000
Målt antal: 20 200

Absolut afvigelse: $20\,200 - 20\,000 = 200$

Relativ afvigelse: $\dfrac{200}{20\,000} = 0{,}01 = 1\,\%$

Model passer **godt** med målt antal.

15.2b Vi udregner antal dyr med en model:

Udregnet antal: 300
Målt antal: 500

Absolut afvigelse: $500 - 300 = 200$

Relativ afvigelse: $\dfrac{200}{300} = 0{,}67 = 67\,\%$

Model passer **dårligt** med målt antal.

15.3 Når der står "Brug model"

For en type vare er y omsætning x dage efter annoncering.

Målte tal:

x:	6	12	18	24
y:	65	103	151	209

Model: $y = 8x + 12$

Fejl at bruge tal fra tabel da der står "Brug model".

Opgave

Brug model til at bestemme stigning i omsætning fra 6 til 10 dage efter annoncering.

Forkert:

Af tabel: når $x = 6$ er $y = 65$

Af $y = 8x + 12$: når $x = 10$ er $y = 8 \cdot 10 + 12 = 92$

Stigning $92 - 65 = 27$

Rigtigt:

Af $y = 8x + 12$: når $x = 6$ er $y = 8 \cdot 6 + 12 = 60$

Af $y = 8x + 12$: når $x = 10$ er $y = 8 \cdot 10 + 12 = 92$

Stigning $92 - 60 = 32$

Fejl at bruge målt tal når vi skal bruge model.

15.4 Når x kun kan være et helt tal

Opgave:

$y = 50x + 1190$ er antal elever

x = antal år efter 2010

a) Hvornår er antal elever 1500?

b) Hvornår overstiger antallet 1500?

Svar:

$50x + 1190 = 1500$

$x = 6{,}2$

a) Det er i 2016 at der er ca. 1500 elever.

b) Det er i 2017 at antal elever overstiger 1500 .

Opgaven indeholder ikke oplysninger der gør det muligt at afgøre antallet af elever på et bestemt tidspunkt på året.

Derfor har det kun mening at lade x være et helt tal

Elev A siger:

Når x er 6 , er y ikke kommet helt op på 1500, så svaret må være marts 2017.

Elev går altså ud fra at:

1. Forskriften angiver antal elever ved årets slutning.
2. Antal elever stiger jævnt i løbet af året.

Hverken 1 eller 2 er oplyst i opgaven.

For en eksponentiel funktion kan fordoblingstid og halveringstid godt angives som f.eks. 4,3 år. selv om antal/mængde ikke kan afgøres på et bestemt tidspunkt af året. Dette er fordi fordoblingstid og halveringstid angiver hvor langsomt antal/mængde ændres.

16. Proportionale variable

16.1 Proportionale variable, regler.

16.1a Om to variable x og y siger vi at

y er proportional med x

hvis

$y = k \cdot x$

og k er det samme tal for alle værdier af x .

16.1b Tallet k kan udregnes ved hjælp af følgende formel

$$k = \frac{y}{x}$$

hvor x og y skal være sammenhørende værdier af x og y
(dvs. (x,y) er et punkt på grafen).

16.2 Proportionale variable, opgave

Opgave

De to variable x og y er proportionale.

x	12	15	
y	168		266

Hvad skal der stå på de tomme pladser i tabellen?

Svar

Udregne k :

I opgaven står ikke at vi skal udregne k.
Vi skal selv vide at vi skal udregne k først.

Da x og y er proportionale, er der et tal k så

(1) $y = k \cdot x$.

Vi kan bestemme k med formlen

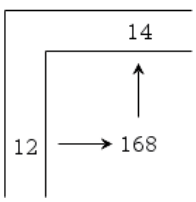
(2) $k = \frac{y}{x}$

I opgaven er oplyst at når $x = 12$ er $y = 168$.
Disse tal indsætter vi i formlen (2) ovenfor:

$$k = \frac{168}{12}$$

$$k = 14$$

Udregning med tabel.



Udregning med nspire.

$$\frac{168}{12} = 14$$

Dette tal indsætter vi i formlen (1) ovenfor og får ligningen for sammenhængen mellem x og y:

(3) $\underline{y = 14 \cdot x}$

Udregne y :

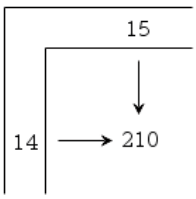
For at finde y når x er 15, sætter vi x til 15 i formlen (3) ovenfor:

$$y = 14 \cdot 15$$

Heraf får vi $y = 210$ så

y er 210 når x er 15

Udregning med tabel.



Udregning med nspire.

$14 \cdot 15 = 210$

Udregne x :

For at finde x når y er 266,
sætter vi y til 266 i formlen (3) ovenfor:

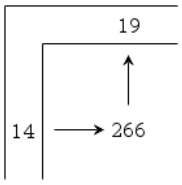
$$266 = 14 \cdot x$$

Vi løser denne ligning mht. x og får

$$x = 19$$

så x er 19 når y er 266

Udregning med tabel.



Udregning med nspire.

$\text{solve}(266=14 \cdot x, x) \blacktriangleright x=19$

Udfyldt tabel :

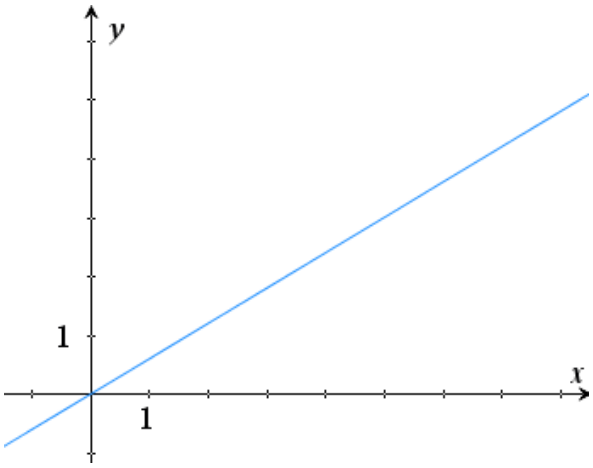
x	12	15	19
y	168	210	266

16.3 Proportionale variable, graf

Forskriften $y = k \cdot x$
er af typen $y = a \cdot x + b$
hvor

$$a = k \quad \text{og} \quad b = 0\,,$$

så grafen er en ret linje der skærer y-aksen ved $y = 0$.



17. Omvendt proportionale variable

17.1 Omvendt proportionale variable, regler.

17.1a Om to variable x og y siger vi at

y er omvendt proportional med x

hvis

$$y = k \cdot \frac{1}{x}$$

og k er det samme tal for alle værdier af x.

17.1b Tallet k kan udregnes ved hjælp af følgende formel

$$k = x \cdot y$$

hvor x og y skal være sammenhørende værdier af x og y (dvs. (x,y) er et punkt på grafen).

17.2 Omvendt proportionale variable, opgave.

Opgave

De to variable x og y er omvendt proportionale.

x		12	18
y	9	6	

Hvad skal der stå på de tomme pladser i tabellen?

Svar

Udregne k :

I opgaven står ikke at vi skal udregne k. Vi skal selv vide at vi skal udregne k først.

Da x og y er omvendt proportionale, er der et tal k så

(1) $y = k \cdot \frac{1}{x}$

Vi kan bestemme k med formlen

(2) $k = x \cdot y$

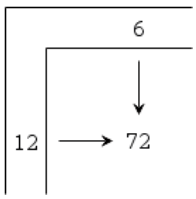
I opgaven er oplyst at når $x = 12$ er $y = 6$.

Disse tal indsætter vi i formlen (2) ovenfor:

$$k = 12 \cdot 6$$

$$k = 72$$

Udregning med tabel.



Udregning med nspire.

$12 \cdot 6 = 72$

Dette tal indsætter vi i formlen (1) ovenfor og får ligningen for sammenhængen mellem x og y:

(3) $y = 72 \cdot \frac{1}{x}$

Udregne y :

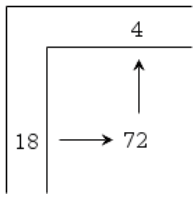
For at finde y når x er 18, sætter vi x til 18 i formlen (3) ovenfor:

$$y = 72 \cdot \frac{1}{18}$$

Heraf får vi $y = 4$ så

y er 4 når x er 18

Udregning med tabel.



Udregning med nspire.

$$72 \cdot \frac{1}{18} = 4$$

Udregne x :

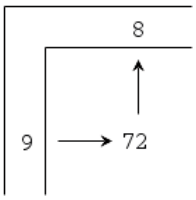
For at finde x når y er 9 , sætter vi y til 9 i formlen (3) ovenfor:

$$9 = 72 \cdot \frac{1}{x}$$

Vi løser denne ligning mht. x og får $x = 8$ så

x er 8 når y er 9

Udregning med tabel.



Udregning med nspire.

$$\text{solve}\left(9=72\cdot\frac{1}{x},x\right) \blacktriangleright x=8$$

Udfyldt tabel :

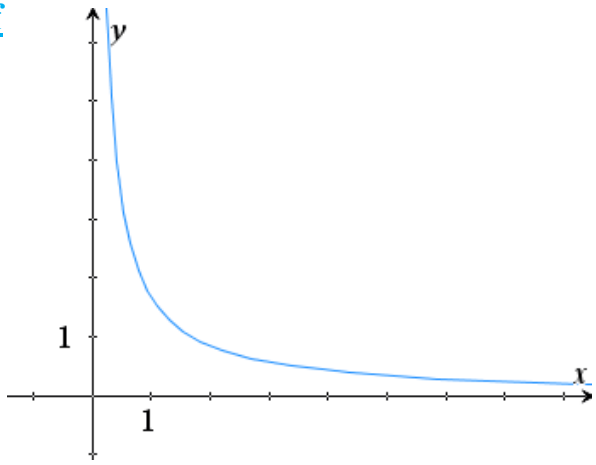
x	8	12	18
y	9	6	4

17.3 Omvendt proportionale variable, graf

Grafen ligger i 1. kvarant

Grafen kommer vilkårlig tæt på y-aksen, men når den aldrig.

Grafen kommer vilkårlig tæt på x-aksen, men når den aldrig.



17.4 Opgave hvor variable fra virkeligheden er omvendt proportionale.

Opgave

På en skærm er et rektangel som vi kan ændre ved at trække med musen.
Højde og bredde er omvendt proportionale. Højden er 2,5 når bredden er 8 .
Hvad er højden når bredden er 3,2 ?

Svar

Vi kalder højden for h og bredden for b.

Udregne k :

Da h er omvendt proportional med b, findes et tal k så

(1) $$h = k \cdot \frac{1}{b}$$

Vi kan bestemme k med formlen

$$k = b \cdot h$$

Da $h = 2{,}5$ når $b = 8$, må

$$k = 8 \cdot 2{,}5$$

$$k = 20$$

Dette tal indsætter vi i (1):

(2) $$\underline{h = 20 \cdot \frac{1}{b}}$$

Udregne h :

Vi sætter $b = 3{,}2$ i formlen (2) ovenfor:

$$h = 20 \cdot \frac{1}{3{,}2}$$

Heraf får vi $h = 6{,}25$ så

højden er 6,25 når bredden er 3,2 .

A
a ud fra *b* og et punkt, lineær 35
a ud fra to punkter, lineær 36
a's betydning for lineær funktion 26, 27, 30, 31, 32
a's betydning for lineær graf 28
aflæs graf i Nspire 9
aflæs graf på papir 8
a-formel for lineær funktion 39, 40
aftagende funktion 29
anden kvadrant 1
andenakse 1
anden-koordinat 2
argumentation 33
B
b ud fra *a* og et punkt, lineær 35
b's betydning for lineær funktion 26, 27, 30, 32
b's betydning for lineær graf 28
bestem *x* 5, 24
bestem *y* 5, 24
bevis, *a*'s betydning, lineær funktion 34
bevis, *b*'s betydning, lineær funktion 35
bevis, formler for *a* og *b* 39
b-formel for lineær funktion 39, 40
F
$f(x)$ 15
faktor 20
fejl 16, 23
fjerde kvadrant 1
forklar løsning 19, 22
forkort 18
forskrift 5
forskrift for lineær funktion 36
funktion 4
funktionsværdi 6
første kvadrant 1
førsteakse 1
første-koordinat 2
G
graf 7
graf for lineær funktion 26
graf, aflæs i Nspire 9
graf, aflæs på papir 8
graf, tegn i Nspire 9
graf, tegn på papir 11
H
hældningskoefficient 25
hæve minus-parentes 21
hæve plus-parentes 21
K
konstant funktion 29
konstantled 25
kontrol 17, 22, 38
koordinat 1, 2
koordinatsystem 1
koordinatsystem, Nspire 10
koordinatsæt 2
kvadrant 1
L
ligevægt, regler 16
ligning, løse 5, 16
ligningssystem, Nspire 37
ligningssystem, uden hjælpemidler 37
lineær funktion 25
lineær regression 40
lineær, bestem ligning 36
løse ligning 5, 16
M
model 45
model, brug 46
modsat regning 17
O
omvendt proportional 49, 51
omvendt proportional, graf 50
P
parentes 20, 21
proportional 47
proportional, graf 48
R
regneforskrift 5
regression, lineær 40
regression, lineær, Nspire 41
residualplot 43
residualplot, anvendelser 44
residualplot, Nspire 43
S
samle led 20
skæring 13
skæring med *x*-akse 13
skæring med *y*-akse 13
skæring mellem to grafer 14
T
tegn graf i Nspire 9
tegn graf på papir 11
tredje kvadrant 1
V
variabel 4
voksende funktion 29
X
x er et helt tal 46
x-akse 1
x-koordinat 2
Y
y-akse 1
y-koordinat 2