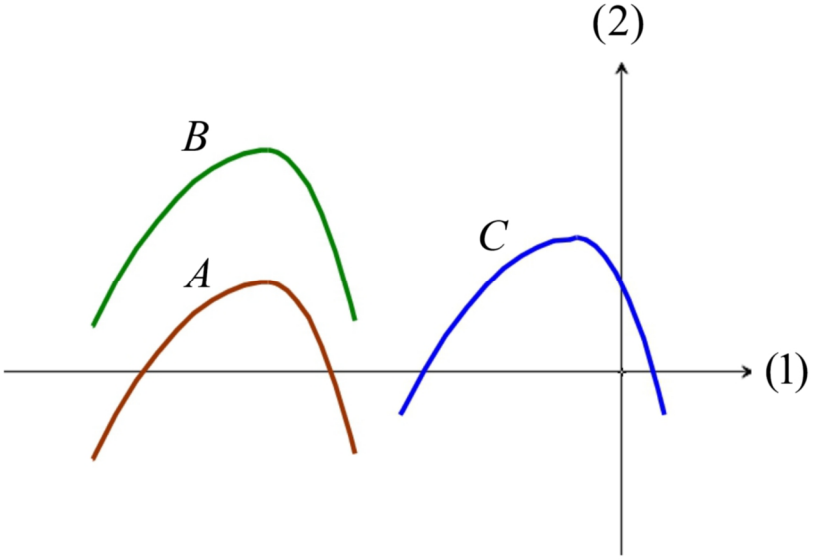
Funktioner

3. del



2019 Karsten Juul

34. Gaffelforskrift

34.1 Eksempler der viser hvordan man bruger en gaffelforskrift 98
34.2 Opgave med besvarelse 98
34.3 Graf og gaffelforskrift i delprøve 1 98
34.4 Opgave med besvarelse 99

35. Forskydning af graf

35.1 Lodret forskydning af graf, oplæg 100
35.2 Lodret forskydning af graf, regel 100
35.3 Vandret forskydning af graf, oplæg 101
35.4 Vandret forskydning af graf, regel 101
35.5 Opgave med besvarelse 101
35.6 Opgave med besvarelse 102

36. Sammensat funktion

36.1 Sammensat funktion, oplæg 103
36.2 Sammensat funktion, definition 103
36.3 Opgave med besvarelse 104
36.4 Eksempel på sammensat funktion 104
36.5 Eksempel på sammensat funktion 104
36.6 Er funktionen sammensat? 104

37. Forskrift med sin (eller cos)

37.1 Eksempler på hvordan opgaver med sin kan løses 105
37.2 Eksempel på hvordan opgave kan løses ved hjælp af graf 106

38. Polynomium

38.1 Polynomiums grad 107
38.2 Antal nulpunkter, oplæg 107
38.3 Nulpunkter og rødder 108
38.4 Opgave med besvarelse 108
38.5 Regel om antal rødder 108

39. Parabel

39.01 Andengradspolynomium 109
39.02 Hvilke tal er a, b og c lig? 109
39.03 Toppunkt 109
39.04 $y = a\cdot(x-h)^2 + k$, oplæg 110
39.04a Symmetri 110
39.04b Gange y-koordinat med tal 110
39.04c Forskyde graf for $a\cdot x^2$ 110
39.05 $y = a\cdot(x-h)^2 + k$, regel 111
39.05a Forskydning 111
39.05b Toppunkt 111
39.06 $y = a\cdot(x-h)^2 + k$, opgave med besvarelse 111
39.07 Beregne toppunkt 112

39.07a Formel for toppunkts x-koordinat 112
39.07b Bevis for formlen for toppunkts x-koordinat 112
39.07c Udregn toppunkt 113
39.07d Tegn uden hjælpemidler graf for $x^2–2x–1$ 113
39.08 Diskriminant 114
39.08a Diskriminant, definition 114
39.08b Diskriminant, eksempel på udregning 114
39.08c Diskriminant, eksempel på udregning 114
39.09 Betydning af a, b, c og d for grafen 115
39.10 Bevis for reglen for betydningen af b 115

40. Nulpunkter

40.1 Nulpunkt, definition 116
40.2 Nulpunkt, løsning, graf 116
40.3 Antal nulpunkter eller løsninger, regel 116
40.4 Antal nulpunkter eller løsninger, eksempel 116
40.5 Løse andengradsligning, regel 117
40.6 Løse andengradsligning, eksempel 117

41. Faktorisere

41.1 Faktorisere andengradspolynomium, regel 118
41.2 Faktorisere andegradspolynomium, eksempler 118
41.3 Nulpunkter (rødder) for $f(x) = a\cdot(x–p)\cdot(x–q)$, regel 118
41.4 Nulpunkter (rødder) for $f(x) = a\cdot(x–p)\cdot(x–q)$, eksempler 118
41.5 Find a, b og c for $a\cdot(x–p)\cdot(x–q)$ 119

42. Ligninger af typen $x^2 = r$

42.1 Ligninger af typen $x^2 = r$, oplæg 120
42.2 Ligninger af typen $x^2 = r$, regel 120
42.3 Ligninger af typen $x^2 = r$, eksempler 120

43. Bestem forskrift for andengradspolynomium 121

44. Andengrads-regression 122

45. Bevis for reglen for løsning af andengradsligninger 123

46. Bevis for formlen for faktorisering af andengradspolynomium ... 125

47. Funktionerne sinus og cosinus

47.1 Funktioner med sin og/eller cos i forskrift 126
47.2 Grafer for sin og cos 126
47.3 Egenskaber ved sin og cos 126
47.4 Funktioner af typerne $f(x) = a\cdot\sin(b\cdot x + c) + d$ og $f(x) = a\cdot\cos(b\cdot x + c) + d$ 126
47.5 Hvis der både er cos og sin i forskrift 126

48. Lineær regression

48.1 Residualer 127
48.2 Valg af model 127
48.3 Residualspredning 128
48.4 Opgave med besvarelse 128

34. Gaffelforskrift

34.1 Eksempel der viser hvordan man bruger en gaffelforskrift

Her er et eksempel på en gaffelforskrift:

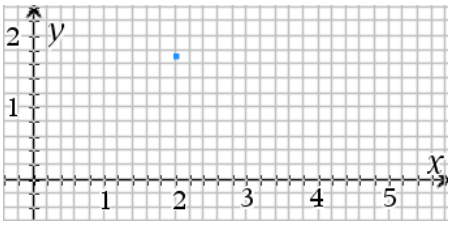
$$f(x) = \begin{cases} 0,4x + 0,9 & \text{for} \quad 1 \le x < 3 \\ -0,5x^2 + 2,4x - 1,5 & \text{for} \quad 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

Der er to linjer i denne forskrift.
Der kan godt være mere end to linjer i en gaffelforskrift.

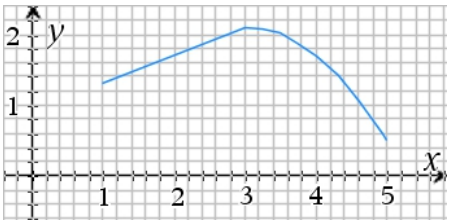
Vi vil udregne funktionsværdien af 2 .
Da x-værdien 2 opfylder betingelsen $1 \le x < 3$,
skal vi bruge den øverste linje i forskriften:

$$f(2) = 0,4 \cdot 2 + 0,9 = 1,7 .$$

Denne oplysning afsætter vi som et punkt i koordinatsystemet.
Det er den blå prik på billedet til højre.



Vi afsætter nogle flere punkter og forbinder dem.
Så får vi grafen for f. Denne er vist på billedet til højre.



For at tegne grafen i Nspire skal vi bruge følgende skabelon:

Hvis gaffelforskriften har mere end to linjer, så skal vi i stedet bruge følgende skabelon:

34.2 Opgave med besvarelse

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{for} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{for} \quad 0 \le x \end{cases}$$

Gør rede for at punktet $P(9, 80)$ ikke ligger på grafen for f.

Besvarelse

Betingelsen for at P ligger på grafen for f er at funktionsværdien af 9 er 80.

Da x-værdien 9 opfylder betingelsen $0 \le x$,
skal vi bruge den nederste linje i forskriften:

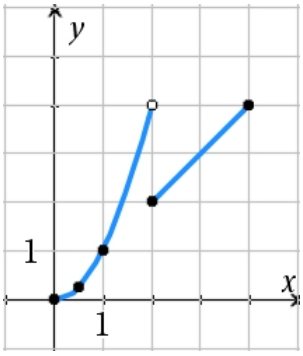
$$f(9) = 9^2 = 81 .$$

Da $f(9)$ ikke er 80 , gælder: P ligger ikke på grafen.

34.3 Graf og gaffelforskrift i delprøve 1

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for} \quad 0 \le x < 2 \\ x & \text{for} \quad 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

Vi har udregnet seks støttepunkter for at tegne grafen:



Punktet $(2,4)$ er tegnet som en cirkel. Det betyder at punktet ikke hører med til grafen.
Venstre del af grafen skal tegnes hen til dette punkt.

34.4 Opgave med besvarelse

Ved forsøgets start er der 15 g væske i en beholder.
De næste 20 minutter løber der væske ned i beholderen med hastigheden 5 g pr. minut.
De næste 10 minutter løber der ikke væske ned i beholderen.
I disse 10 minutter løber der væske ud af beholderen med hastigheden 4 g pr. minut.
Herefter er forsøget slut.

a) Bestem hvor mange gram væske der er i beholderen når forsøget er slut.

b) Opstil en gaffelforskrift der beskriver mængden af væske i beholderen som funktion af tiden x målt i minutter efter forsøgets start.

c) Brug forskriften til at beregne tallet $f(30)$, og beskriv hvad dette tal fortæller om forsøget.

Besvarelse

a) De første 20 minutter løber der hvert minut 5 g væske ned i bekolderen.
Antal gram der løb ned i beholder de første 20 minutter: $20 \cdot 5 = 100$.

I forvejen var der 15 g.
Antal gram i beholder efter første 20 minutter: $15 + 100 = 115$.

De næste 10 minutter løber der hvert minut 4 g ud af beholderen. Herefter er forsøget slut.
Antal gram der løber ud i de 10 minutter: $10 \cdot 4 = 40$.
Antal gram i beholder når forsøget er slut: $115 - 40 = 75$.

Når forsøget er slut, er der $\underline{\underline{75 \text{ g}}}$ væske i beholderen.

b) I de første 20 minutter lægges samme antal enheder til vægten hvert minut, så det er en lineær funktion $y = a \cdot x + b$. Da a er det der lægges til y (vægten) når x (minutter) bliver 1 enhed større, så må $a = 5$.
Da b er det y (vægten) er når x (tid efter start) er 0, må $b = 15$.

I de næste 10 minutter lægges -4 til y når x bliver 1 enhed større, så det er en lineær funktion $y = -4 \cdot x + b$. Når $x = 20$, er $y = 115$, så vi får

$$115 = -4 \cdot 20 + b$$

$$115 + 80 = b$$

$$195 = b$$

Den søgte forskrift er altså

$$\underline{\underline{f(x) = \begin{cases} 5 \cdot x + 15 & \text{for} \quad 0 \le x < 20 \\ -4 \cdot x + 195 & \text{for} \quad 20 \le x \le 30 \end{cases}}}$$

c) Vi vil bruge denne forskrift til at udregne funktionsværdien af x-værdien 30.
Da 30 ligger i intervallet $20 \le x \le 30$, skal vi bruge nederste linje i forskriften:

$$f(30) = -4 \cdot 30 + 195 = -120 + 195 = \underline{\underline{75}}$$

dvs. når forsøget er slut, er der 75 g væske i beholderen.
I spørgsmål a) kom vi til samme resultat.

35. Forskydning af graf

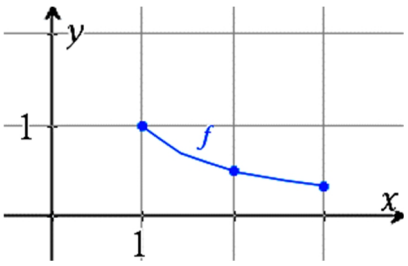
35.1 Lodret forskydning af graf, oplæg

$$f(x)=\frac{1}{x}\ ,\quad 1\le x\le 3$$

Vi udregner funktionsværdien (y-koordinaten) for nogle x-værdier:

$$f(1)=\frac{1}{1}=1\quad ,\quad f(2)=\frac{1}{2}=0{,}5\quad ,\quad f(3)=\frac{1}{3}=0{,}33\ .$$

Vi afsætter de tilsvarende punkter i koordinatsystemet og forbinder dem så vi får grafen for f.



Vi lægger 0,8 til forskriften for f. Så får vi forskriften for en ny funktion g:

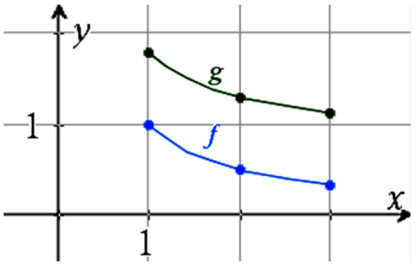
$$g(x)=\frac{1}{x}+0{,}8\ .$$

Vi udregner funktionsværdien (y-koordinaten) for nogle x-værdier:

$$g(1)=\frac{1}{1}+0{,}8=1{,}8\quad ,\quad g(2)=\frac{1}{2}+0{,}8=1{,}3\quad ,$$

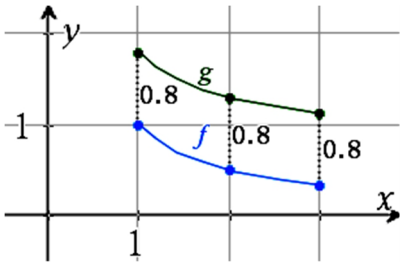
$$g(3)=\frac{1}{3}+0{,}8=1{,}13\ .$$

Vi afsætter de tilsvarende punkter i koordinatsystemet og forbinder dem, så vi får grafen for g.



Når vi lægger 0,8 til et punkts y-koordinat, så får vi et punkt der ligger 0,8 højere oppe i koordinatsystemet.

Vi får g-grafen ved lodret forskydning af f-grafen.



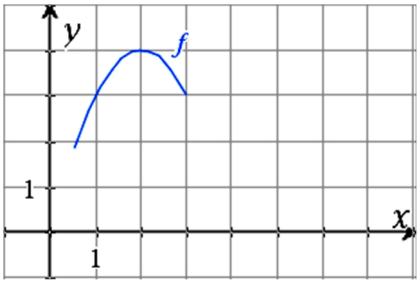
35.2 Lodret forskydning af graf, regel

Når vi lægger 5 til forskriften, så forskydes grafen 5 enheder op.

Når vi lægger -4 til forskriften, så forskydes grafen 4 enheder ned.

Osv.

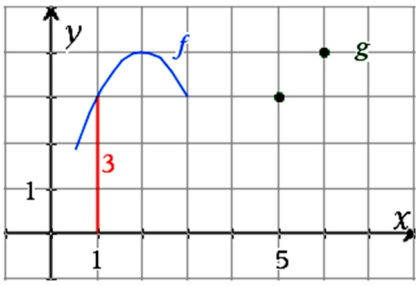
35.3 Vandret forskydning af graf, oplæg



På billedet ses grafen for funktionen f.
En ny funktion g er fastlagt ved at $g(x) = f(x-4)$.

For g bestemmer vi funktionsværdien (y-koordinaten) af x-værdien 5 :

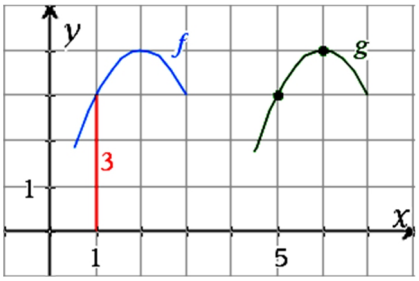
$g(5) = f(5-4) = f(1) = 3$ hvor 3 er aflæst på f-grafen.



Denne oplysning afsætter vi som et punkt i koordinatsystemet.
Vi ser at dette punkt $(5, g(5))$ er forskudt 4 enheder mod højre i forhold til punktet $(1, f(1))$.

Vi bestemmer også $g(6)$:

$g(6) = f(6-4) = f(2) = 4$ hvor 4 er aflæst på f-grafen.



Denne oplysning afsætter vi som et punkt i koordinatsystemet.

Vi ser at der også for andre x-værdier vil være tale om en forskydning på 4 enheder af et punkt på f-grafen.

Det oplyses at f har forskriften

$$f(x) = 4 \cdot x - x^2 .$$

Vi bestemmer forskriften for g :

$$g(x) = f(x-4) = 4 \cdot (x-4) - (x-4)^2 .$$

35.4 Vandret forskydning af graf, regel

Når man i forskriften erstatter x med $(x-4)$, så forskydes grafen 4 enheder mod højre.

Når man i forskriften erstatter x med $(x+6)$, så forskydes grafen 6 enheder mod venstre.

Osv.

35.5 Opgave med besvarelse

Forskriften for funktionen f er

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Grafen for funktionen g fremkommer ved at forskyde grafen for f stykket 3 nedad.
Grafen for funktionen h fremkommer ved at forskyde grafen for g stykket 9 mod højre.

Bestem en forskrift for h .

Besvarelsen står på næste side!

Besvarelse

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Grafen for g fås ved at forskyde f-graf stykket 3 nedad.
Graf forskydes 3 nedad når der trækkes 3 fra forskriften, så

$$g(x) = f(x) - 3 = \sqrt{x} - 3 .$$

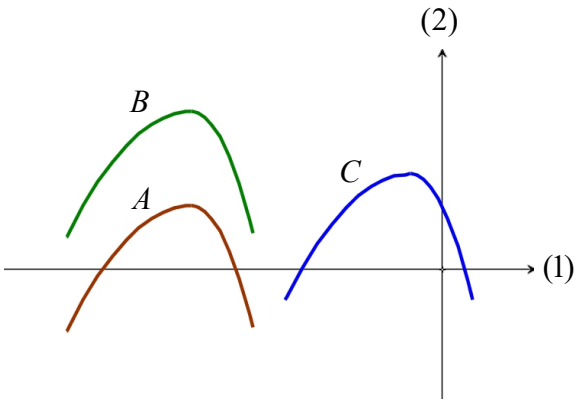
Grafen for h fås ved at forskyde g-grafen stykket 9 mod højre.
Grafen forskydes 9 mod højre når x i forskriften erstattes med $x-9$, så

$$h(x) = g(x-9) = \underline{\underline{\sqrt{x-9} - 3}} .$$

35.6 Opgave med besvarelse

Ud fra en funktion f er funktionerne g og h bestemt ved

$$g(x) = f(x) + 3$$
$$h(x) = f(x-7) + 1 .$$



På figuren ses graferne for de tre funktioner f, g og h.

Gør for hver af de tre grafer A, B og C rede for hvilken funktion f, g eller h den er graf for.

Besvarelse

$$g(x) = f(x) + 3$$

så

g-forskrift fås ved at lægge 3 til f-forskrift

så

g-graf fås ved at forskyde f-graf tre enheder op.

På figur:

Ingen af graferne A og C kan fås ved at forskyde nogen af de andre grafer op

så

$\underline{\underline{B \text{ er } g\text{-graf}}}$.

Vi kan ikke se at B er graf for g, men vi kan se at A ikke er graf for g, og at C ikke er graf for g.

På figur:

B fås ikke ved at forskyde C op

så

$\underline{\underline{A \text{ er } f\text{-graf}}}$.

Vi kan ikke se at A er graf for f, men vi kan se at C ikke er graf for f.

Så er der kun én mulighed tilbage for C:

$\underline{\underline{C \text{ er } h\text{-graf}}}$.

36. Sammensat funktion

36.1 Sammensat funktion, oplæg

For en plante er højden (cm) en funktion h af tiden (uger):

Tid:	0	1	2	3
Højde:	1	3	5	7

Prisen (kr.) for denne plante er en funktion g af højden (cm):

Højde:	1	2	3	4	5	6	7
Pris:	10	40	90	160	250	360	490

Vi kan slutte:
Prisen (kr.) er en funktion f af tiden (uger).

Efter 2 uger er højden i cm $h(2) = 5$ (se tabel).
Når højden er 5 cm, er prisen i kr. $g(5) = 250$ (se tabel).

Efter 2 uger er prisen i kr. $f(2) = g(h(2)) = g(5) = 250$

f er en **sammensat funktion** hvor den **indre funktion** er h, og den **ydre funktion** er g.

Det oplyses at forskrifterne for h og g er:

$$h(x) = 2\cdot x + 1 \quad \text{og} \quad g(x) = 10\cdot x^2 \ .$$

Heraf kan vi finde forskriften for f.

$$f(x) = g\big(h(x)\big) = g\big(2\cdot x+1\big) = 10\cdot\big(2\cdot x+1\big)^2 \ .$$

36.2 Sammensat funktion, definition

en definition fortæller betydningen af et ord

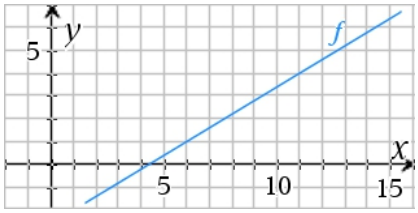
Hvis f, g og h er funktioner og

$$f(x) = g(h(x))$$

så siger man at

f er en sammensat funktion med
g som den ydre funktion og
h som den indre funktion .

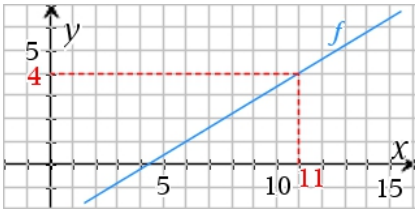
36.3 Opgave med besvarelse



På figuren ses grafen for funktionen f.
Funktionen g er bestemt ved $g(x) = 3x - 7$.

Bestem $g(f(11))$.

Besvarelse



Som vist på figuren aflæser vi at $f(11) = 4$.

Da $g(x) = 3 \cdot x - 7$

er $g(4) = 3 \cdot 4 - 7 = 12 - 7 = 5$.

Altså er $g(f(11)) = g(4) = \underline{\underline{5}}$.

36.4 Eksempel på sammensat funktion

Hvis h er den sammensatte funktion hvor

ydre funktion er $g(x) = x^2$

indre funktion er $f(x) = 2x+3$

så er

$$h(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = (2x+3)^2 .$$

36.5 Eksempel på sammensat funktion

Hvis h er den sammensatte funktion hvor

ydre funktion er $g(x) = \dfrac{1}{x}$

indre funktion er $f(x) = 8 - x$

så er

$$h(x) = g(f(x)) = g(8-x) = \frac{1}{8-x} .$$

36.6 Er funktionen sammensat

Er funktionen $f(x) = (2x - 1) \cdot \ln(x)$ sammensat af $g(x) = 2x - 1$ og $h(x) = \ln(x)$?

Vi undersøger:

$$g(h(x)) = g(\ln(x)) = 2 \cdot \ln(x) - 1 \quad \text{er IKKE } f(x) .$$

$$h(g(x)) = h(2x-1) = \ln(2x-1) \quad \text{er IKKE } f(x) .$$

f er altså ikke sammensat af g og h.

37. Forskrift med sin (eller cos)

Eksemplerne er med **sin** , men opgaver med **cos** kan løses på samme måde.

37.1 Eksempler på hvordan opgaver med sin kan løses

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 20\cdot\sin(0{,}5\cdot x)\ ,\ \ 0 \le x \le 6\ .$$

a) Bestem $f(4)$.

b) Bestem tal x så $f(x) = 14$.

c) Tegn grafen for f .

a) Lav et matematikfelt (ctrl/cmd m).
Højreklik på matematikfeltet, vælg Attributter, Vinkel, Radian, OK.
Tast i matematikfeltet 20·sin(0,5·4) og tryk på ctrl/cmd Enter.
Skriv foran matematikfeltet $f(4) =$.

$$f(4) = 20\cdot\sin(0.5\cdot 4) = 18.1859 \approx 18$$

b) Lav et matematikfelt (ctrl/cmd m).
Højreklik på matematikfeltet, vælg Attributter, Vinkel, Radian, OK.
Tast i matematikfeltet solve(14=20·sin(0.5·x),x)|0≤x≤6 og tryk på ctrl/cmd Enter.
Der må aldrig tilføjes noget eller ændres i en solve-kommando.
Skriv forklaring til solve-kommandoen .

Nspire løser ligningen $14=20\cdot\sin(0.5\cdot x)$ mht. x for $0\le x\le 6$:

$\text{solve}(14=20\cdot\sin(0.5\cdot x),x)|0\le x\le 6$ ▸ x=1.55079 or x=4.73239

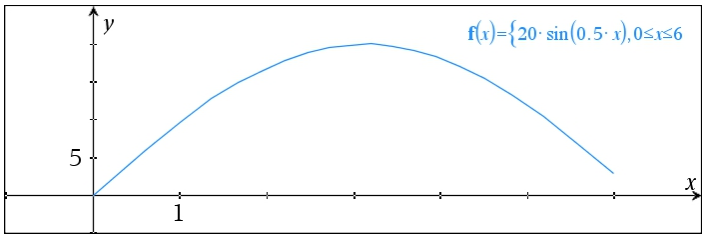
Løsningen til ligningen $f(x) = 14$ er tallene

$1.55079 \approx 1{,}6$ og $4.73239 \approx 4{,}7$.

c) Start et graf-vindue, og vælg i værktøjsmenuen Indstillinger, Indstillinger, Vinkel i grafer, Radian, OK.

Vælg i værktøjsmenuen Grafindtastning, Funktion . I indtastningslinjen skal stå f(x)=20·sin(0.5·x)|0≤x≤ 6 .

Vælg i værktøjsmenuen Vindue/Zoom, Indstillinger for vindue, og vælg intervallet fra Xmin til Xmax lidt større end definitionsmængden 0≤x≤ 6 , og prøv dig frem med Ymin og Ymax så hele grafen kommer med uden at blive lille.



37.2 Eksempel på hvordan opgave kan løses ved hjælp af graf

Funktionen f er givet ved

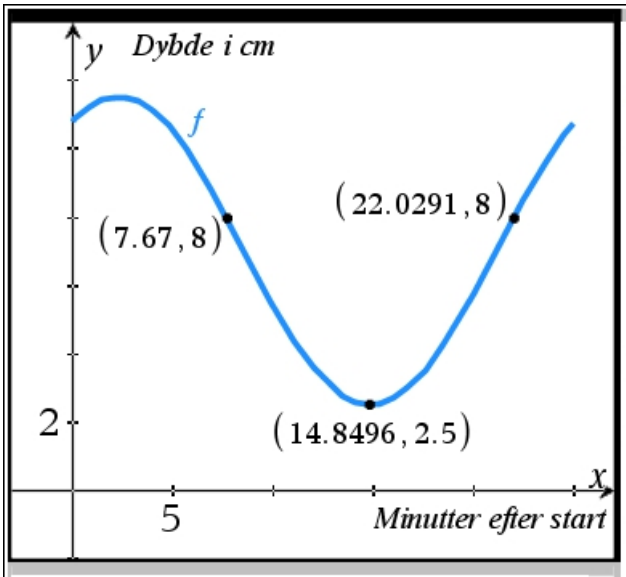
$$f(x) = 7 + 4{,}5 \cdot \sin(0{,}25 \cdot x + 1), \quad 0 \le x \le 25$$

hvor $f(x)$ er dybden (cm) x minutter efter start.

a) Bestem den laveste dybde.

b) Bestem hvor lang tid der går mellem de to tidspunkter hvor dybden er 8 cm.

Besvarelse



$f(x) = 7 + 4.5 \cdot \sin(0.25 \cdot x + 1)$, $0 \le x \le 25$

hvor $f(x)$ er dybden i cm x minutter efter start.

Vi vælger Undersøg grafer, Minimum og klikker på begge sider af det laveste punkt på grafen.

Den laveste dybde er 2,5 cm.

Vi afsætter et punkt på grafen i nærheden af hvert af de to steder hvor y er 8, og ændrer deres y–koordinater til 8.

Forskellen på deres x–koordinater er

$$22.0291 - 7.67 = 14.3591$$

Der er 14 minutter imellem de to tidspunkter hvor dybden er 8 cm.

38. Polynomium

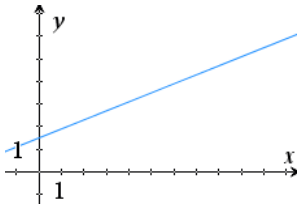
38.1 Polynomiums grad

Et førstegradspolynomium er en funktion af typen $f(x) = ax + b$ hvor $a \neq 0$.

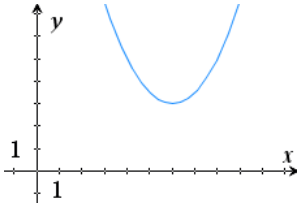
Et andengradspolynomium er en funktion af typen $f(x) = ax^2 + bx + c$ hvor $a \neq 0$.

Et tredjegradspolynomium er en funktion af typen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hvor $a \neq 0$.

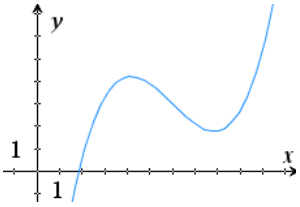
Osv.



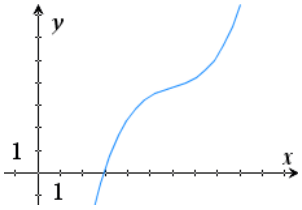
1. grad



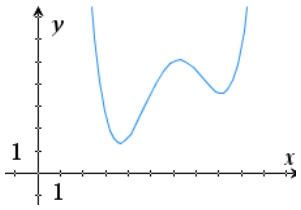
2. grad



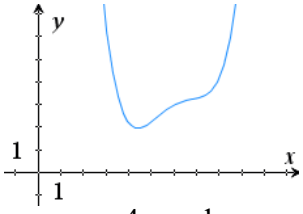
3. grad



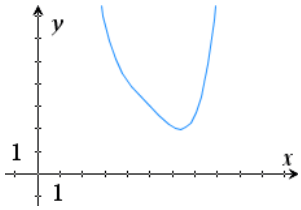
3. grad



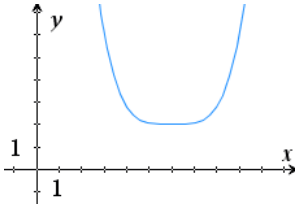
4. grad



4. grad

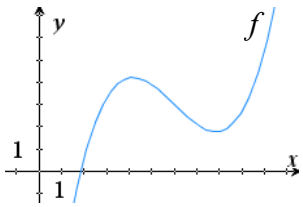


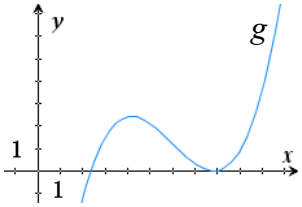
4. grad

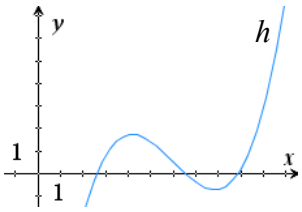


4. grad

38.2 Antal nulpunkter, oplæg







De tre grafer er grafer for tredjegradspolynomier.

På grafen for f ser vi at der er et tal lidt mindre end 2 som har funktionsværdien 0 , og at der ikke er andre nulpunkter end dette.

Forskriften for g er fremkommet ved at trække et positivt tal fra forskriften for f .
Vi ser at g har to nulpunkter.

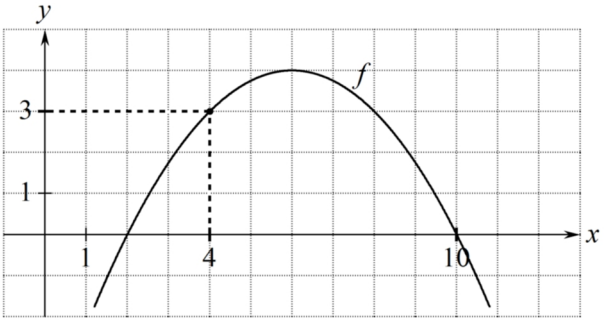
Forskriften for h er fremkommet ved at trække et positivt tal fra forskriften for g .
Vi ser at h har tre nulpunkter.

38.3 Nulpunkter og rødder

Hvis vi i $f(x) = ax^2 + bx + c$ sætter $a = -\frac{1}{4}$, $b = 3$ og $c = -5$, får vi andengradspolynomiet

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}x^2 + 3x - 5$$

Til højre har vi tegnet grafen for dette andengradspolynomium.



På grafen ser vi at hvis vi sætter 4 ind for x i forskriften og regner ud, så får vi y-værdien 3.

På grafen ser vi også at hvis vi sætter 10 ind for x og regner y-værdien ud, så får vi 0.

Et tal kaldes et <u>nulpunkt</u> for f hvis vi får 0 når vi indsætter tallet for x i forskriften og regner ud. Et nulpunkt kaldes også en <u>rod</u>. At finde rødderne er det samme som at løse ligningen $f(x) = 0$.

På grafen ser vi at <u>rødderne</u> er 2 og 10. Hvis vi løser ligningen $-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5 = 0$, så får vi altså løsningerne 2 og 10.

38.4 Opgave med besvarelse

Vis at 10 er rod i polynomiet $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5$.

Besvarelse

Vi indsætter 10 for x i polynomiet $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5$:

$$f(10) = -\tfrac{1}{4}\cdot 10^2 + 3\cdot 10 - 5 = -\tfrac{1}{4}\cdot 100 + 30 - 5 = -25 + 25 = 0$$

Da resultatet er 0, er 10 rod i polynomiet.

38.5 Regel om antal rødder (= antal fællespunkter med x-akse = antal løsninger)

Et polynomium af grad n kan højst have n rødder.

Eksempel

Et tredjegradspolynomium kan ikke have mere end 3 rødder.

Grafen for et tredjegradspolynomium kan højst have 3 punkter fælles med x-aksen.

En tredjegradsligning kan højst have 3 løsninger.

39. Parabel

39.01 Andengradspolynomium

Et **andengradspolynomium** er er en funktion af typen

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad \text{hvor} \quad a \neq 0$$

Hvis vi skriver 0 på a's plads, så bliver det ikke et andengrads-polynomium da x^2 forsvinder.

Grafen for et andengradspolynomium kaldes en **parabel**.

39.02 Hvilke tal er *a*, *b* og *c* lig?

Vi sætter $a = 1 \quad b = -2 \quad c = 0$

i $\quad f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

og får $\quad f(x) = 1 \cdot x^2 + (-2) \cdot x + 0$

så $\quad f(x) = x^2 - 2x$

er et andengradspolynomium.

I dette og andre andengrads-polynomier skal vi kunne se hvad a, b og c er, for at kunne indsætte i formler med a, b og c.

I $f(x) = -3x^2 + x + 1$ er $a = -3$, $b = 1$ og $c = 1$.

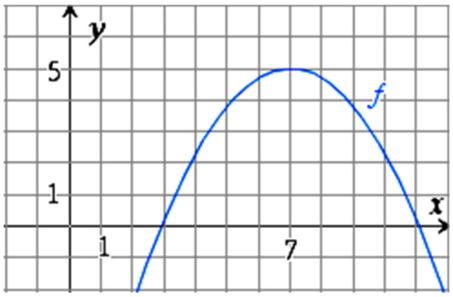
I $f(x) = x^2 - x + 7$ er $a = 1$, $b = -1$ og $c = 7$.

I $f(x) = 3x^2 - 4$ er $a = 3$, $b = 0$ og $c = -4$.

39.03 Toppunkt

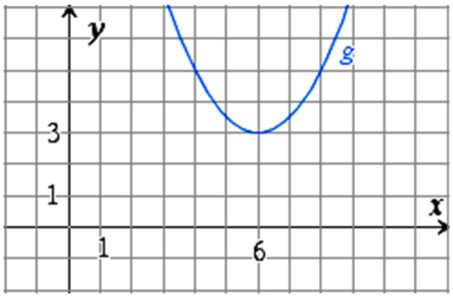
Til højre er vist graferne for to andengradspolynomier f og g.

Det øverste punkt på f-grafen kaldes parablens toppunkt.
Vi ser at toppunktet har koordinatsættet $(7, 5)$.



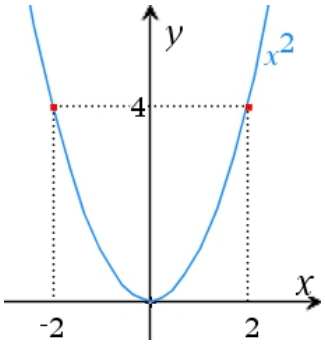
Det nederste punkt på g-grafen kaldes parablens toppunkt (selv om det ikke er det øverste punkt).

Vi ser at toppunktet har koordinatsættet $(6, 3)$.



39.04 $y = a\cdot(x-h)^2 + k$, oplæg

39.04a Symmetri



Billedet viser grafen for x^2 .

Grafpunkterne med x lig -2 og 2 har samme y da

$$(-2)^2 = 4 \text{ og } 2^2 = 4$$

så de to punkter (røde) ligger symmetrisk om y-aksen.

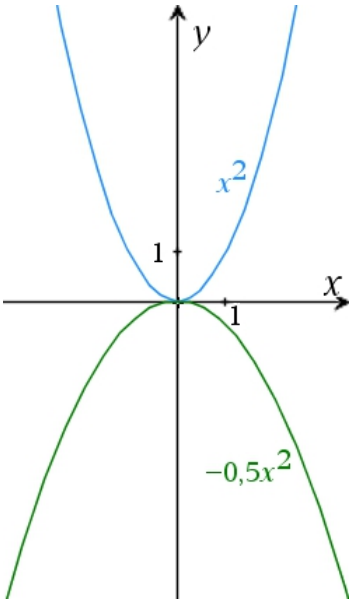
For ethvert tal k gælder $(-k)^2 = k^2$,
så grafen er symmetrisk om y-aksen.

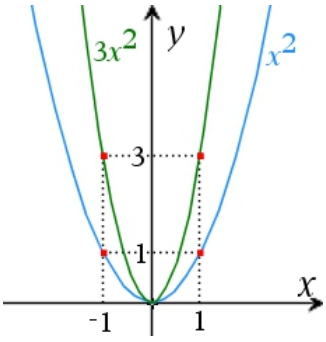
39.04b Gange y-koordinater med tal

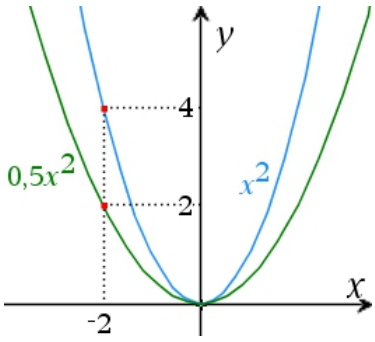
For hvert punkt på grafen for x^2 ganger vi y-koordinaten med 3 og får dermed et nyt punkt.
Disse punkter er graf for funktionen $y = 3x^2$ (venstre figur nedenfor).
Grafen er smallere end grafen for $y = x^2$.
Det må altid gælde når tallet vi ganger med er over 1.

Hvis tallet er mellem 0 og 1 , så må grafen blive bredere.
På figuren nedenfor i midten har vi ganget med 0,5 .

Hvis tallet er negativt, vil grenene pege nedad (højre figur).



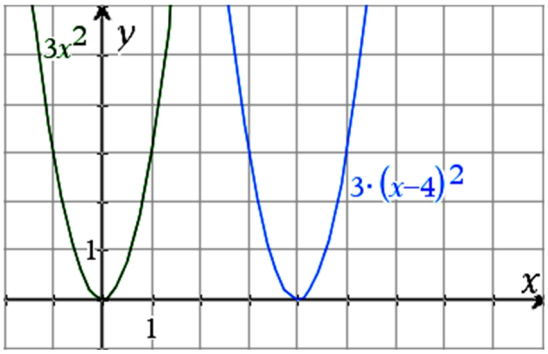


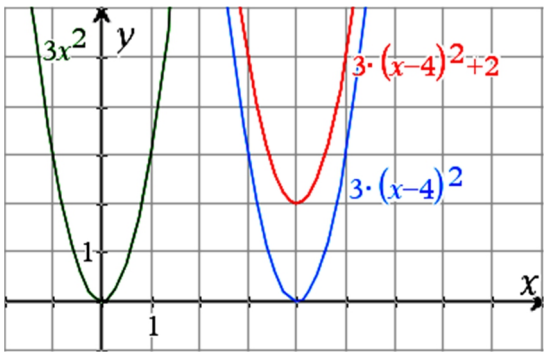


39.04c Forskyde graf for $a\cdot x^2$

I forskriften $3\cdot x^2$ erstatter vi x med $x-4$ og får $3\cdot(x-4)^2$.
Ifølge 35.4 vil dette rykke grafen 4 enheder mod højre.
Se venstre figur nedenfor.

I forskriften $3\cdot(x-4)^2$ lægger vi 2 til og får $3\cdot(x-4)^2 + 2$.
Ifølge 35.2 vil dette rykke grafen 2 enheder op.
Se højre figur nedenfor.





39.05 $y = a\cdot(x-h)^2 + k$, regel

39.05a Forskydning

Når grafen for funktionen

$$f(x) = a\cdot x^2$$

forskydes h enheder mod højre og k enheder op,
så fås grafen for

$$g(x) = a\cdot(x-h)^2 + k\,.$$

(Hvis $h = -7$, så forskydes 7 enheder mod venstre.
Hvis $k = -5$, så forskydes 5 enheder ned).

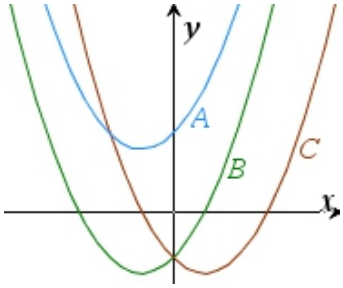
39.05b Toppunkt

Grafen for

$$g(x) = a\cdot(x-h)^2 + k\,.$$

er en parabel med toppunkt $T(h,k)$.

39.06 $y = a\cdot(x-h)^2 + k$, opgave med besvarelse



En af graferne på figuren er graf for andengradspolynomiet

$$f(x) = 0{,}5\cdot(x+1)^2 - 2\,.$$

Gør rede for hvilken af parablerne A, B og C der er graf for f.

Besvarelse

Forskriften

$$f(x) = 0{,}5\cdot(x+1)^2 - 2$$

er af typen

$$g(x) = a\cdot(x-h)^2 + k \quad \text{med } h = -1 \text{ og } k = -2\,.$$

Toppunktet er derfor

$$T = (h,k) = (-1\,,-2)\,.$$

Vi kan ikke se at B er graf for f, men vi kan se at A ikke er graf for f, og at C ikke er graf for f.

C's toppunkt ligger til højre for y-aksen og har derfor positiv x-koordinat,
så C er ikke graf for f.

A's toppunkt ligger over x-aksen og har derfor positiv y-koordinat,
så A er ikke graf for f.

Da en af graferne er graf for f, gælder: $\underline{\underline{B \text{ er graf for } f}}$.

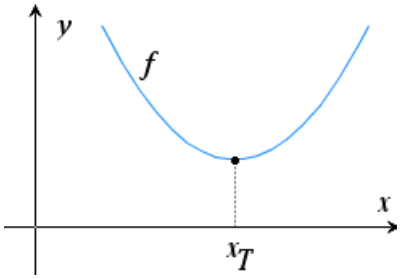
39.07 Beregne toppunkt

39.07a Formel for toppunkts *x*-koordinat

Grafen for et andengradspolynomium

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ , \quad a \neq 0$$

er en parabel.



Grafens toppunkt har *x*-koordinaten

$$x_T = \frac{-b}{2a}$$

39.07b Bevis for formlen for toppunkts *x*-koordinat

Når

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \ ,$$

er

$$f'(x) = a \cdot 2x + b + 0 = 2ax + b$$

Lad x være toppunktets *x*-koordinat.

Så er tangenthældningen $f'(x)$ lig 0 :

$$f'(x) = 0$$

$$2ax + b = 0$$

$$2ax = -b$$

$$\frac{2ax}{2a} = \frac{-b}{2a}$$ da $a \neq 0$.

$$x = \frac{-b}{2a}$$ Dette er formlen vi ville bevise.

39.07c Udregn toppunkt

Vi udregner toppunktet for grafen for funktionen

$$f(x) = x^2 + 6x + 14$$

Vi ser at forskriften er af typen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

med

$$a = 1 \qquad b = 6 \qquad c = 14$$

Toppunktets x-koordinat er

$$x_T = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot 1} = -3$$

Toppunktet ligger på grafen og har x-koordinaten -3, så y-koordinaten er

$$\begin{aligned} y_T &= f(-3) \\ &= (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 14 \\ &= 9 \quad -18 \quad +14 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Toppunktet er

$$T = \underline{\underline{(-3\,,\,5)}}\,.$$

39.07d Tegn uden hjælpemidler graf for $f(x) = x^2 - 2x - 1$

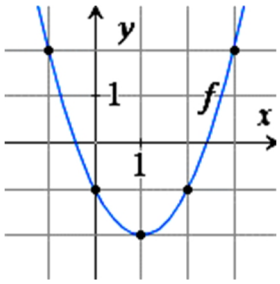
Metode:

1) Udregn x-koordinat til toppunkt med metoden fra første del af 39.07c $x_T = \mathbf{1}$

2) I tabel til støttepunkter:

   Vælg tal på begge sider af toppunkts x-koordinat.

x:	-1	0	**1**	2	3
y:					



3) Udregn y-koordinaterne ved at sætte x koordinaten ind i forskriften $x^2 - 2x - 1$ og regne ud.

4) Tegn afrundet graf gennem støttepunkter.
   Sørg for at grafen IKKE er spids i toppunktet.

39.08 Diskriminant

39.08a Diskriminant, definition

Diskriminanten for et andengradspolynomium

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \qquad a \neq 0$$

er tallet

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

39.08b Diskriminant, eksempel på udregning

Forskriften

$$f(x) = 3x^2 - x + 5$$

er på formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{med} \qquad a = 3 \qquad b = -1 \qquad c = 5$$

så

$$\begin{aligned} d &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ &= (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 \\ &= 1 - 60 = \underline{\underline{-59}} \end{aligned}$$

39.08c Diskriminant, eksempel på udregning

Forskriften

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

er på formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{med} \qquad a = 1 \qquad b = 2 \qquad c = -3$$

så

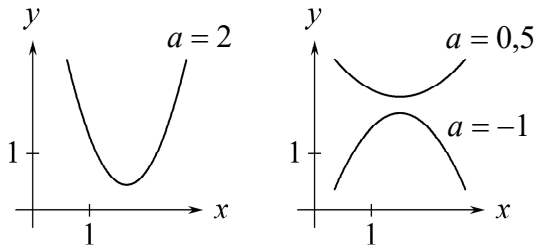
$$\begin{aligned} d &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ &= 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) \\ &= 4 - 4 \cdot (-3) \\ &= 4 - (-12) \\ &= 4 \quad + 12 = \underline{\underline{16}} \end{aligned}$$

39.09 Betydning af a, b, c og d for grafen.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \qquad a \neq 0$$

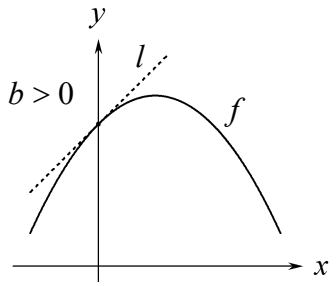
d er diskriminanten

a : a positiv: grene vender op
a negativ: grene vender ned
parablen er bredere når a er tættere på nul



b : b er hældningskoefficient for tangent til graf i skæringspunkt med y-akse

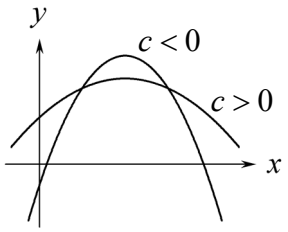
b positiv: graf går op mod højre i skæring med y-akse
b nul: grafs toppunkt er på y-akse
b negativ: graf går ned mod højre i skæring med y-akse



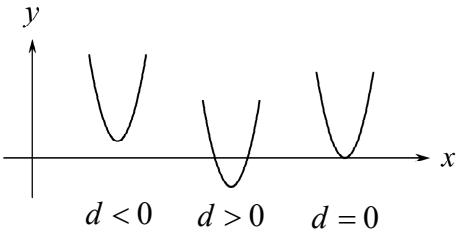
l er tangent til f-grafen i dennes skæringspunkt med y-aksen. b er lig l's hældningskoefficient.

c : Graf skærer y-akse i punktet $(0, c)$

c positiv: graf skærer y-akse over x-akse
c nul: graf går gennem punktet $(0, 0)$
c negativ: graf skærer y-akse under x-akse



d : d positiv: graf har to punkter på x-akse
d nul: graf har ét punkt på x-akse
d negativ: graf har ingen punkter på x-akse



39.10 Bevis for reglen for betydningen af b

Når $\quad f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$,

er $\quad f'(x) = a \cdot 2x + b + 0 = 2ax + b$

Grafens skæringspunkt med y-aksen har x-koordinat 0 , så i dette punkt er tangenthældningen lig

$$f'(0) = 2a \cdot 0 + b = 0 + b = b$$

hvilket skulle bevises.

40. Nulpunkter

40.1 Nulpunkt, definition

At

et tal er nulpunkt for en funktion

betyder at

når vi indsætter tallet for x i forskriften og regner ud, så får vi nul.

Et nulpunkt kan både være et tal og et punkt. For funktionen i 40.2 gælder:

0 og 1,5 er nulpunkter.

(0 , 0) og (1,5 , 0) er nulpunkter.

40.2 Nulpunkt, løsning, grafpunkt

At

1,5 er nulpunkt for $f(x) = 2x^2 - 3x$

betyder at

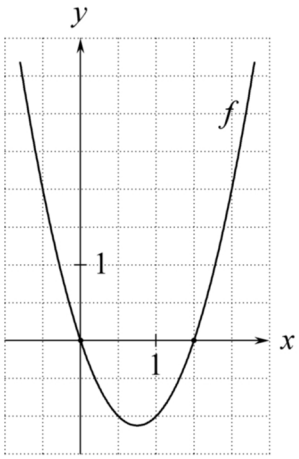
$2 \cdot 1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 = 0$

Dette er det samme som at

1,5 er løsning til ligningen $2x^2 - 3x = 0$

og det samme som at

grafpunktet med x-koordinat 1,5 ligger på x-aksen.



0 og 1,5 er nulpunkter for f

40.3 Antal nulpunkter eller løsninger, regel

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad a \neq 0$

d er diskriminanten

Der gælder at	antallet af nulpunkter	for andengrads polynomiet	$ax^2 + bx + c$
dvs.	antallet af løsninger	til andengrads ligningen	$ax^2 + bx + c = 0$
er	2 hvis $d > 0$		
	1 hvis $d = 0$		
	0 hvis $d < 0$		

40.4 Antal nulpunkter eller løsninger, eksempel

Vi vil bestemme tallet k så andengradsligningen

$kx^2 - 2x + 3 = 0$

har netop én løsning.

Ligningen er på formen $ax^2 + bx + c = 0$ med $a = k$, $b = -2$, $c = 3$,

så diskriminanten er $d = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot k \cdot 3 = \underline{4 - 12k}$

Vi vil finde ud af hvornår der er én løsning, dvs. vi vil finde ud af hvornår d er 0:

$4 - 12k = 0$ er ensbetydende med at $k = \frac{1}{3}$

Ligningen $kx^2 - 2x + 3 = 0$ har netop én løsning når $k = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$.

Funktionen $kx^2 - 2x + 3$ har netop ét nulpunkt når $k = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$.

40.5 Løse andengradsligning, regel

En andengradsligning

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \quad a \neq 0$$

kan vi løse sådan:

Først udregner vi diskriminanten:

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Så bruger vi følgende regel:

Hvis $d < 0$ har ligningen ingen løsninger.

Hvis $d = 0$ har ligningen løsningen $\frac{-b}{2a}$

Hvis $d > 0$ har ligningen løsningerne $\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$ og $\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$

Bemærkning

Både når $d = 0$ og $d > 0$ er løsningerne $\frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

40.6 Løse andengradsligning, eksempel

Ligningen

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

er af typen

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{med} \quad a = 3 \ , \quad b = -2 \quad \text{og} \quad c = -1$$

Diskriminanten er

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$$

Da $d > 0$ har ligningen løsningerne

$$\frac{-b-\sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{-b+\sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2+4}{6} = 1$$

Konklusion:

Ligningen $3x^2 - 2x - 1 = 0$ har løsningerne $\underline{\underline{-\frac{1}{3} \text{ og } 1}}$

41. Faktorisere

41.1 Faktorisere andengradspolynomium, regel

Hvis andengradspolynomiet

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ , \quad a \neq 0$$

har nulpunkterne (rødderne) x_1 og x_2 , er

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

formlen for at faktorisere et andengradspolynomium

Når vi skriver andengradspolynomiet sådan, så har vi **faktoriseret** andengradspolynomiet.

Tal der ganges, kaldes faktorer .
Her er der tre faktorer, nemlig a , $x - x_1$ og $x - x_2$.

41.2 Faktorisere andengradspolynomium, eksempler

41.2a Eksempel 1

Vi vil faktorisere andengradspolynomiet $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

Vi bruger formlen for at løse andengradsligninger og får at

$2x^2 + 5x - 3 = 0$ har løsningerne (rødderne) $\frac{1}{2}$ og -3

Vi bruger formlen for at faktorisere et andengradspolynomium og får at

$$f(x) = 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(x - (-3)\right)$$

$$f(x) = \underline{\underline{(2x - 1)(x + 3)}}$$

Vi ganger 2 ind i parentesen for at undgå brøk. Ellers havde vi ikke ganget ind.

41.2b Eksempel 2

I $g(x) = x^2 + 4x + 4$ er $a = 1$ og rødderne er begge -2 , så faktoriseringen er

$$g(x) = 1 \cdot (x - (-2)) \cdot (x - (-2)) = (x + 2) \cdot (x + 2) = \underline{\underline{(x + 2)^2}} \ .$$

41.3 Nulpunkter (rødder) for $f(x) = a \cdot (x - p) \cdot (x - q)$, regel

En funktion af typen $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ har nulpunkterne (rødderne) x_1 og x_2 .

41.4 Nulpunkter (rødder) for $f(x) = a \cdot (x - p) \cdot (x - q)$, eksempler

41.4a Eksempel 1

Forskriften $f(x) = 8 \cdot (x - 4) \cdot (x + 7)$

kan omskrives til $f(x) = 8 \cdot (x - 4) \cdot (x - (-7))$

så ifølge 41.3 er nulpunkterne (rødderne) 4 og -7 .

Flere eksempler på næste side!

41.4b Eksempel 2

Forskriften $f(x) = -2\cdot(x+4)^2$

kan omskrives til $f(x) = -2\cdot(x+4)\cdot(x+4)$

og til $f(x) = -2\cdot(x-(-4))\cdot(x-(-4))$

så ifølge 41.3 er der ét nulpunkt (én rod), nemlig -4 .

41.4c Eksempel 3

Forskriften $f(x) = x^2 - 6x$

kan omskrives til $f(x) = x\cdot(x-6)$

og til $f(x) = (x-0)\cdot(x-6)$

så ifølge 41.3 er nulpunkterne (rødderne) 0 og 6 .

41.5 Find a, b og c for $a\cdot(x-p)\cdot(x-q)$

Vi vil finde konstanterne a, b og c når

$$4\cdot(x-2)\cdot(x+5)$$

skrives på formen

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c\ .$$

Vi omskriver:

$$4\cdot(x-2)\cdot(x+5) =$$

$$(4x-8)\cdot(x+5) =$$

$$4x^2 + 20x - 8x - 40 =$$

$$4x^2 + 12x - 40$$

Dvs.

$$\underline{\underline{a = 4\ ,\ b = 12 \text{ og } c = -40}}\ .$$

42. Ligninger af typen $x^2 = r$

42.1 Ligninger af typen $x^2 = r$, oplæg

Når $x=3$ er $x^2 = x \cdot x = 3 \cdot 3 = 9$

Når $x=-3$ er $x^2 = x \cdot x = (-3) \cdot (-3) = 9$

$x^2 = 9$ netop når $x=-3$ eller $x=3$

42.2 Ligninger af typen $x^2 = r$, regel

Når n er negativ: $x^2 = n$ har ingen løsninger da et tal ganget med sig selv ikke kan give noget negativt ($+ \cdot + = +$, $0 \cdot 0 = 0$, $- \cdot - = +$).

$x^2 = 0$ har løsningen $x = 0$.

Når p er positiv: $x^2 = p$ har to løsninger: $x = -\sqrt{p}$ eller $x = \sqrt{p}$ da kvadratroden af p er det tal som ganget med sig selv giver p .

42.3 Ligninger af typen $x^2 = r$, eksempler

42.3a Eksempel 1

Vi vil løse ligningen $(x+2)^2 = 9$

Af regel 42.2 får vi $x+2 = -\sqrt{9}$ eller $x+2 = \sqrt{9}$

$x+2 = -3$ eller $x+2 = 3$

dvs. $x = -5$ eller $x = 1$

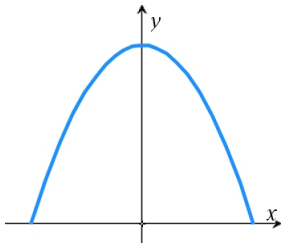
42.3b Eksempel 1

$3 \cdot (x-1)^2 - 12 = 0$	Ligningen der skal løses
$3 \cdot (x-1)^2 = 12$	Der er lagt 12 til begge sider
$(x-1)^2 = 4$	Begge sider er divideret med 3
$x-1 = -\sqrt{4}$ eller $x-1 = \sqrt{4}$	Ifølge regel 42.2
$x-1 = -2$ eller $x-1 = 2$	Kvadratroden af 4 er 2
$x = -1$ eller $x = 3$	Der er lagt 1 til begge sider

43. Bestem forskrift for andengradspolynomium

Opgave

Billedet viser et vindue indtegnet i et koordinatsystem.



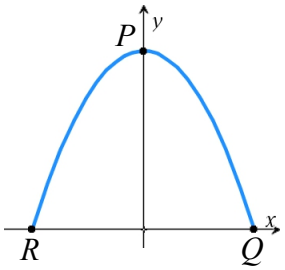
Den krumme del af vinduets kant har form som en del af grafen for et andengradspolynomium $f(x)$.

Vinduets højde er 128 cm.
For neden er vinduets bredde 160 cm.

Bestem forskriften for f .

Løsning:

Først finder vi koordinatsæt til tre punkter på parablen:



For P gælder:

$x = 0$ da P ligger på y-aksen

$y = 128$ da vinduets højde er 128

For Q og R gælder:

$y = 0$ da Q og R ligger på x-aksen

$x = \pm 80$ da $\frac{160}{2} = 80$

Afstand mellem Q og R er 160 og de ligger lige langt fra y-aksen

Vi ved nu at på grafen ligger punkterne $(0, 128)$, $(-80, 0)$ og $(80, 0)$.
Det er oplyst at forskriften er et andengradspolynomium $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.
Når vi indsætter et grafpunkts x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi punktets y-koordinat.

Nspire løser ligningssystemet

$$128 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$
$$0 = a \cdot (-80)^2 + b \cdot (-80) + c$$
$$0 = a \cdot 80^2 + b \cdot 80 + c$$

og får $a = -0.02$, $b = 0$ og $c = 128$:

solve(128=a· 0²+b· 0+c and 0=a· (-80)²+b· -80+c and 0=a· 80²+b· 80+c,a,b,c)
▸ a=-0.02 and b=0. and c=128.

Forskriften for f er $\underline{\underline{f(x) = -0{,}02x^2 + 128}}$.

44. Andengrads-regression

Vi har målt længde og bredde af nogle blade fra en busk:

Bredde (cm):	2,1	2,8	4,2	5,4	5,9
Længde (cm):	2,7	3,5	5,6	9,0	11,2

I en model beskrives sammenhængen mellem længde og bredde ved

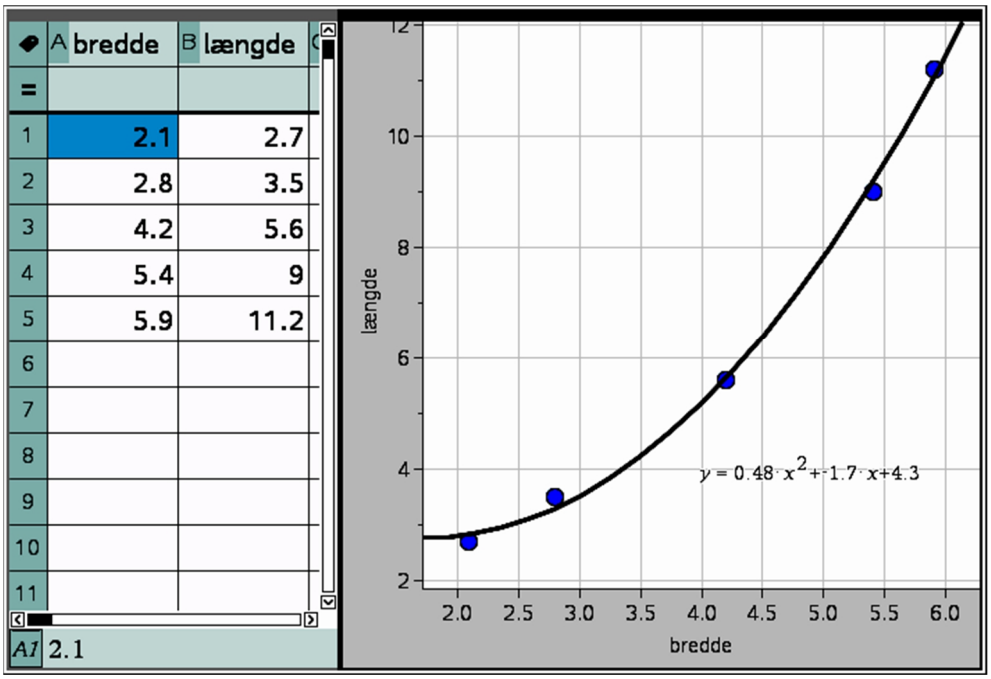
$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \ .$$

hvor $f(x)$ er længden og x er bredden.

Vi taster bredderne i x-søjlen og længderne i y-søjlen,
og vælger regression/andengrads.

Vi får

$$f(x) = 0{,}48x^2 - 1{,}7x + 4{,}3 \ .$$



45. Bevis for reglen for løsning af andengradsligninger.

En hjælpeformel

Først finder vi frem til en ligning (1) som vi skal bruge i beviset (for reglen for løsning af andengradsligning).

$(2ax+b)^2 = (2ax)^2 + b^2 + 2\cdot 2ax\cdot b$ ifølge formlen $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv$

(1) $(2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + b^2 + 4abx$ Her har vi omskrevet højre side.

Vi omskriver andengradsligningen:

I ligningen

Det er denne ligning vi skal løse.

(2) $ax^2 + bx + c = 0 \quad , \qquad a \neq 0$

ganger vi begge sider med $4a$:

$$4a\cdot\left(ax^2 + bx + c\right) = 4a\cdot 0$$

Vi ganger ind i parentesen:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Vi lægger diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ til begge sider:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac = 0 + b^2 - 4ac$$

Vi reducerer:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = d$$

Af hjælpeformlen **(1)** får vi

(3) $(2ax+b)^2 = d$

Denne ligning **(3)** har samme løsninger som den oprindelige **(2)** .

Vi bruger nu de tre dele af 42.2:

Hvis $d < 0$:

$$(2ax+b)^2 = d$$

Har **ingen løsninger** da et tal i anden ikke kan give noget negativt.

Hvis $d = 0$:

$(2ax+b)^2 = 0$

$2ax + b = 0$ da 0 er eneste tal som ganget med sig selv giver 0 .

$2ax = -b$ der er trukket b fra begge sider.

$x = \dfrac{-b}{2a}$ Begge sider er divideret med $2a$ hvilket er tilladt da $a \neq 0$.

Hvis $\boldsymbol{d > 0}$:

$(2ax+b)^2 = d$

$2ax+b = \pm\sqrt{d}$ Da $w^2 = p$ har løsningerne $\pm\sqrt{p}$ når $p > 0$.

$2ax = -b \pm \sqrt{d}$ Der er trukket b fra begge sider.

$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}}$ Begge sider er divideret med $2a$ hvilket er tilladt da $a \neq 0$.

Hermed har vi bevist reglen 40.5 om løsning af andengradsligning.

46. Bevis for formelen for faktorisering af andengradspolynomium

$f(x) = ax^2+bx+c$, $a>0$ er et andengradspolynomium.
Antag at h og k er nulpunkter (evt. ens) for f.
Vi skal vise at
(1) $f(x) = a\cdot(x-h)\cdot(x-k)$

Nulpunkterne er $\dfrac{-b-\sqrt{d}}{2a}$ og $\dfrac{-b+\sqrt{d}}{2a}$

Vi kan antage at h er den første, og k er den anden.

Vi starter med at udregne de to tal $h+k$ og $h\cdot k$ da det viser sig at vi får brug for dem i beviset for (1).

$$h+k = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a}$$

To brøker med samme nævner lægger man sammen ved at beholde nævneren og lægge tællerne sammen. De to kvadratrødder går ud mod hinanden.

$$= \frac{-b}{a}$$

Vi har forkortet brøken med 2.

$$h\cdot k = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$$

$$= \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{d}\right)^2}{(2a)^2}$$

Man ganger to brøker ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner. For at gange de to tællere har vi brugt kvadratsætningen $(u-v)\cdot(u+v) = u^2-v^2$ med $u=-b$ og $v=\sqrt{d}$.

$$= \frac{b^2-d}{4a^2}$$

Vi har reduceret.

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

Da $d = b^2-4ac$.

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

Vi har reduceret.

$$= \frac{c}{a}$$

Vi har forkortet med $4a$.

Vi beviser nu formlen (1) der står ovenfor:

$$\begin{aligned}
a\cdot(x-h)\cdot(x-k) &= a\cdot(x\cdot x - x\cdot k - h\cdot x + h\cdot k)\\
&= a\cdot(x^2-(h+k)\cdot x + h\cdot k)\\
&= a\cdot x^2 - a\cdot(h+k)\cdot x + a\cdot h\cdot k\\
&= a\cdot x^2 - a\cdot\frac{-b}{a}\cdot x + a\cdot\frac{c}{a}\\
&= a\cdot x^2+b\cdot x+c\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Hermed har vi vist (1) .

47. Funktionerne sinus og cosinus

47.1 Funktioner med sin og/eller cos i forskrift

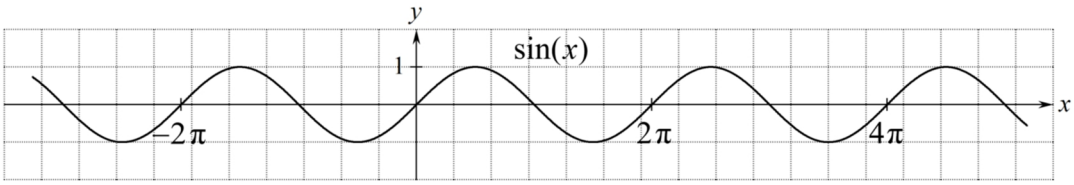
Her er et eksempel på en funktion hvor forskriften indeholder sinus: $f(x) = 5\sin(2x) + 3$.

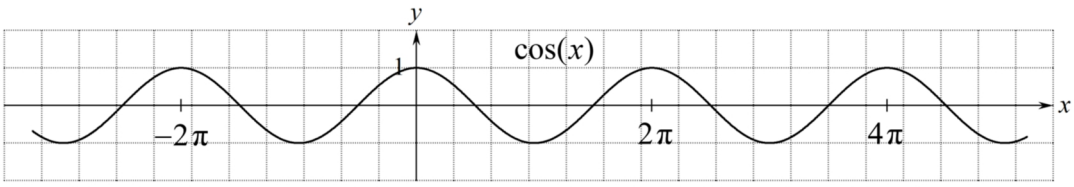
Når sin og cos er i en forskrift for en funktion:

Hvert matematikfelt hvor funktionen bruges, skal indstilles til radianer.

Hvert grafvindue hvor funktionen bruges, skal indstilles til at bruge radianer i grafer (ikke i geometri).

47.2 Grafer for sin og cos





Find på begge grafer grafstykket hvor $0 \le x \le 2\pi$.

Forskyd dette grafstykke 2π mod højre. Så får du den næste del af grafen.
Enhver del af grafen kan du få frem ved et antal gange at forskyde dette grafstykke 2π mod højre eller venstre.

For begge grafer gælder: y-koordinaterne til grafpunkterne er tallene i intervallet $-1 \le y \le 1$.

47.3 Egenskaber ved sin og cos

For alle tal x gælder:

$$-1 \le \sin(x) \le 1 \qquad \text{og} \qquad -1 \le \cos(x) \le 1$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \qquad \text{og} \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

47.4 Funktioner af typerne $f(x) = a\cdot\sin(b\cdot x + c) + d$ og $f(x) = a\cdot\cos(b\cdot x + c) + d$

har en bølgeformet graf som gentager sig selv. Afstanden mellem to bølgetoppe kaldes **perioden**.

$$\text{periode} = \frac{2\pi}{b} \qquad \text{størsteværdi} = d + a \qquad \text{mindsteværdi} = d - a$$

Opgave: Bestem periode, størsteværdi og mindsteværdi for funktionen $f(x) = 3\cdot\sin(0{,}5x - 4{,}2) + 6$.

Svar: Forskrift for f er på formen $a\cdot\sin(b\cdot x + c) + d$ med $a = 3$, $b = 0{,}5$, $c = 4{,}2$, $d = 6$, så

periode $= \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{0{,}5} = 12{,}5664 \approx \underline{\underline{12{,}5}}$, størsteværdi $= d + a = 6 + 3 = \underline{\underline{9}}$, mindsteværdi $= d - a = 6 - 3 = \underline{\underline{3}}$.

47.5 Hvis der både er cos og sin i forskrift

så brug Nspires **fMax** og **fMin** til at finde størsteværdi og mindsteværdi.

Opgave: Bestem størsteværdi for funktionen $f(x) = \sin(3x) + 2\cos(x)$, $1 \le x \le 9$.

Svar: $f(x) = \sin(3\cdot x) + 2\cdot\cos(x)$, $1 \le x \le 9$

Nspire bestemmer x i intervallet $1 \le x \le 9$ så $\sin(3\cdot x) + 2\cdot\cos(x)$ er størst mulig og får $x = 6.71296$:

$\text{fMax}(\sin(3\cdot x) + 2\cdot\cos(x), x) \mid 1 \le x \le 9 \blacktriangleright x = 6.71296$

$f(6.71296) = \sin(3\cdot 6.71296) + 2\cdot\cos(6.71296) = 2.77877 \approx 2{,}78$

Størsteværdi for $f(x)$ er 2,78

48. Lineær regression

48.1 Residualer

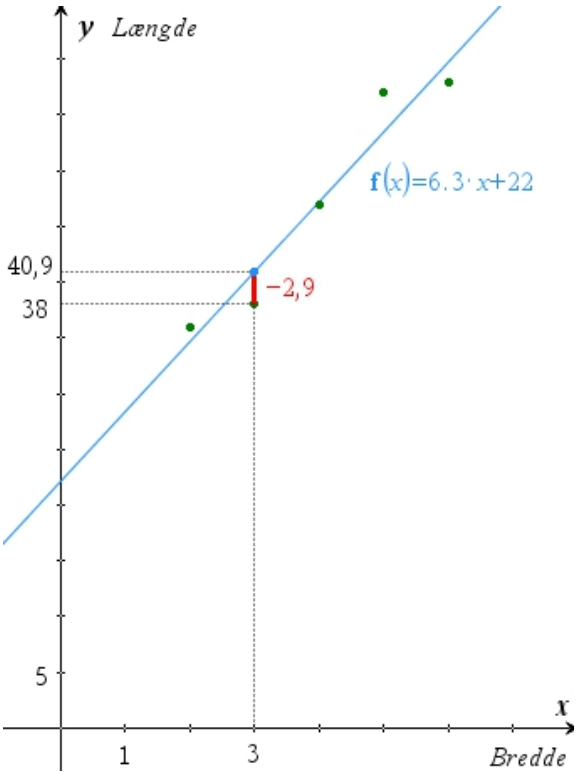
For fem figurer er målt bredde og længde:

Bredde (cm):	2	3	4	5	6
Længde (cm):	36	38	47	57	58

Sammenhængen mellem læmgde og bredde beskrives med modellen

$f(x) = 6{,}3 \cdot x + 22$

hvor $f(x)$ er lænden når bredden er x .



På figuren er vist de målte tal (grønne punkter) og modellen (blå graf).

På figuren ses at når bredde = 3 er

målt længde = 38
models længde = 40,9

Fra målt længde trækker vi models længde:

38 – 40,9 = –2,9

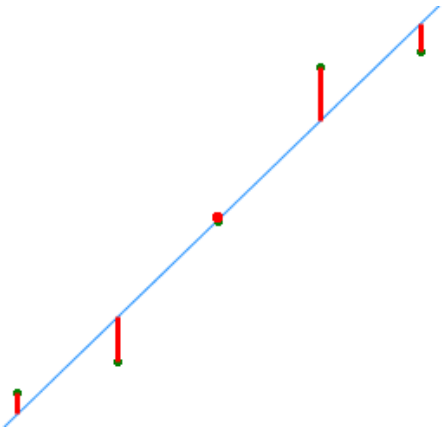
Tallet –2,9 kaldes en residual og viser det målte tals afvigelse fra modellen.

48.2 Valg af model

Vi skal vælge modellen sådan at residualerne bliver små.
På den nederste figur er de fem residualer vist med rødt
For at få et mål for hvor godt modellen passer, gør vi sådan:

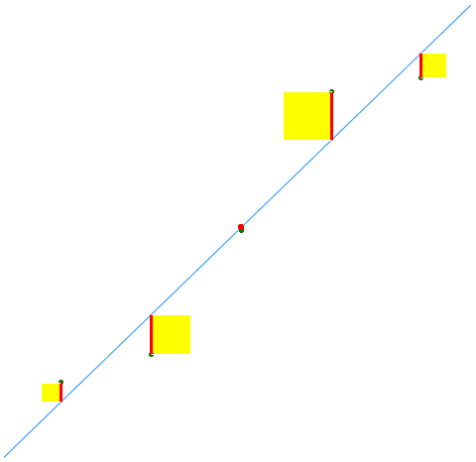
Hver residual opløftes til anden,
og resultaterne lægges sammen:

$1{,}4^2 + (-2{,}9)^2 + (-0{,}2)^2 + 3{,}5^2 + (-1.8)^2 = 25{,}9$



Kvadratsummen 25,9 er det samlede areal af de gule kvadrater.

Når vi laver lineær regression, vælger computeren den lineære funktion som giver den laveste kvadratsum.
Metoden kaldes mindste kvadraters metode .



48.3 Residualspredning

48.3a Residualspredning, definition

Lad n betegne antal x-værdier i tabellen.
Der er n residualer: $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Residualspredningen er tallet

$$s = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2}{n-2}} \ .$$

48.3b Residualspredning, eksempel

For eksemplet i 48.2 er residualspredningen

$$s = \sqrt{\frac{25{,}9}{5-2}} = 2{,}93825 \approx 2{,}9 \ .$$

Dette tal er lille i forhold til tabellens y-værdier.
Hvis dette ikke var tilfældet, ville det tyde på at modellen ikke var så anvendelig.

48.3c Residualspredning, Nspire

Normalt lader vi Nspire udregne s .

Metode 1

Når x-søjle og y-søjle er tastet, vælger vi i værktøjsmenuen:

Statistik / Statistiske tests / Lineær regressions t-test .

Vi ser at $s = 2{,}93825$.

Det er samme resultat som det vi fik ovenfor.

A bredde	B længde	C	D
			=LinRegtT
2	36	Titel	Lineær r...
3	38	Alternati...	β & ρ ≠ ...
4	47	RegEqn	a+b*x
5	57	t	6.78034
6	58	PVal	0.006557
		df	3.
		a	22.
		b	6.3
		s	2.93825
		SESlope...	0.929157
		r^2	0.938742

Metode 2

```
bredde:={2,3,4,5,6} ▸ {2,3,4,5,6}
længde:={36,38,47,57,58} ▸ {36,38,47,57,58}
LinRegtIntervals bredde,længde ▸ Udført
stat.s ▸ 2.93825
```

48.4 Opgave med besvarelse

Tabellen viser udviklingen i antallet af ansatte de første fem år.

År efter start:	0	1	2	3	4	5
Antal:	16	29	39	51	64	75

I en model kan udviklingen i antallet af ansatte beskrives ved

$$f(t) = a \cdot t + b$$

hvor $f(t)$ betegner antallet af ansatte t år efter firmaets start.

Bestem a og b ved regression, og brug residualplottet og residualspredningen til at vurdere modellens anvendelighed til at beskrive udviklingen.

Besvarelsen står på næste side!

Besvarelse

$f(t) = a \cdot t + b$ er antal ansatte t år efter firmaets start.

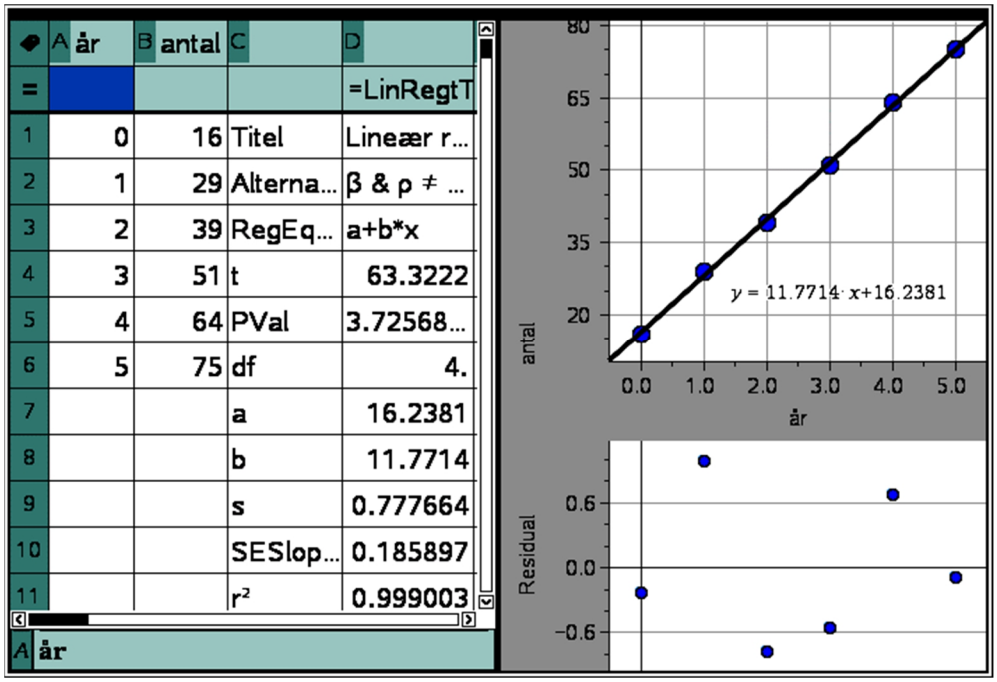
I x-søjlen **år** taster vi år efter start, og i y-søjlen **antal** taster vi antal ansatte.

Nspire laver lineær regression og får $a = 11{,}7714$ og $b = 16{,}2381$.

Nspire udregner residualspredning og får $s = 0{,}777664$.

Det ser ud til at modellen er anvendelig da:

- Residualplottet viser ikke en systematisk afvigelse mellem faktiske tal og modellens tal.
- Residualspredningen er lille i forhold til y-tallene (antal ansatte) da de er 16 og større.



A
andengradsligning, bevis 123
andengradsligning, løsninger 117
andengradspolynomium 109
andengradspolynomium, graf 115
andengradsregression 122
B
betydning af a, b, c, d for graf 115
bevis 123
bevis, betydning af b 115
C
cos 105
cos i forskrift 126
cosinus som funktion 105, 126
D
diskriminant 114, 115, 116, 117
F
faktor 118
faktorisere 118
faktorisering, bevis 125
forskrift, bestem 121
forskyde graf for $a \cdot x^2$ 110, 111
forskydning af graf 100, 101
G
gaffelforskrift 98
graf, betydning af a, b, c, d 115
graf, nulpunkt 116
L
lineær regression 127
lodret forskydning 100
løsninger, antal 108, 116
M
mindste kvadraters metode 127
N
nulpunkt 107, 108
nulpunkter, antal 108, 116, 117
P
parabel 109
parabel og x^2-graf 110
periode 126
polynomium 107
polynomium, regression 122
R
regression 122, 127
residual 127
residualplot 129
residualspredning 128, 129
rod 108
rødder 108
rødder, antal 108
S
sammensat funktion 103
sin 105
sin i forskrift 126
sinus som funktion 105, 126
symmetri i parabel 110
T
tegn graf uden hjælpemidler 113
toppunkt 109, 112
V
vandret forskydning 101