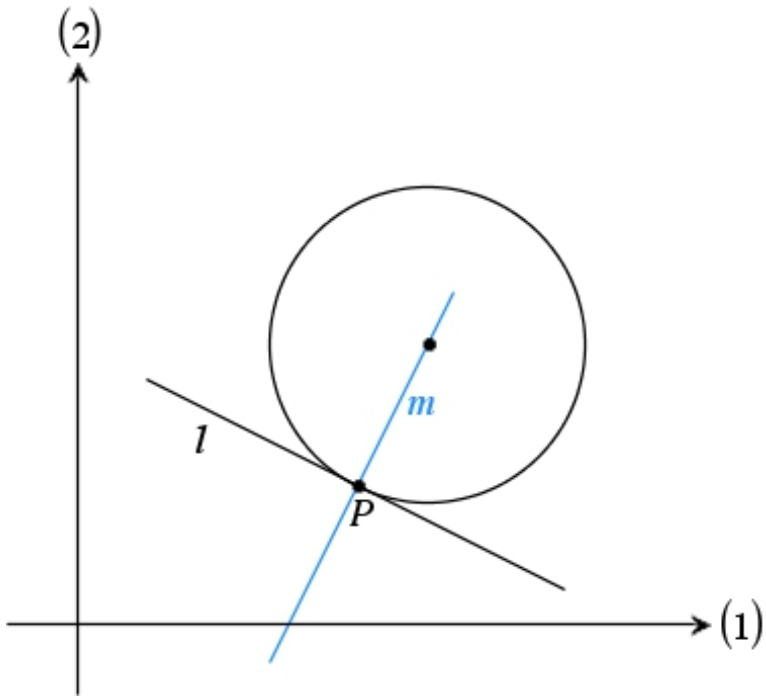
Geometri for stx

2. del



2020 Karsten Juul

19. Midtpunkt for linjestykke

19a Midtpunkt for linjestykke. Regel ... 42
19b Oplæg til 1c ... 42
19c Midtpunkt for linjestykke. Bevis ... 42
19d Midtpunkt for linjestykke. Eksempel ... 42

20. Afstand mellem to punkter

20a Afstand mellem to punkter. Regel ... 43
20b Afstand mellem to punkter. Bevis ... 43
20c Afstand mellem to punkter. Eksempel ... 43

21. Hældningskoefficient

21.1a Hældningskoefficient. Definition ... 44
21.1b Hældningskoefficient. Eksempel 1 ... 44
21.1c Hældningskoefficient. Eksempel 2 ... 44
21.1d Hældningskoefficient. Metode 1 til beregning ... 44
21.1e Hældningskoefficient. Metode 2 til beregning ... 45
21.2a Hvad er en hældningsvinkel? ... 45
21.2b Måle hældningsvinkel ... 46
21.3a Tangensformel for hældningskoefficient. Regel ... 46
21.3b Tangensformel for hældningskoefficient. Begrundelse ... 46
21.3c Tangensformel for hældningskoefficient. Eksempler ... 47

22. Retningsvektor og normalvektor

22.1a Retningsvektor. Definition ... 48
22.1b Retningsvektor. Eksempel ... 48
22.2a Normalvektor. Definition ... 48
22.2b Normalvektor. Eksempel ... 48
22.3a Oplyst: retningsvektor. Find: normalvektor ... 48
22.3b Oplyst: normalvektor. Find: retningsvektor ... 48
22.3c Oplyst: retningsvektor. Find: hældningskoefficient ... 49
22.3d Oplyst: normalvektor. Find: hældningskoefficient ... 49
22.3e Oplyst: retningsvektor. Find hældningsvinkel ... 49
33.3f Oplyst: normalvektor. Find hældningsvinkel ... 49

23. Forskel på forskrift og ligning

23.1 Funktions forskrift ... 50
23.2 Funktions forskrift ... 50
23.3 Linjes ligning ... 50
23.4 Parabels ligning ... 50
23.5 Cirkels ligning ... 50
23.6 Forskrift og ligning ... 50

24. Grundlæggende eksempler med ligninger

24a Punkt der ikke ligger på kurven ... 51
24b Punkt der ligger på kurven ... 51
24c Alle punkter der ligger på kurven ... 51
24d Skæringspunkt ... 51

25. Ligning for linje

25.1 $y = a \cdot x + b$ ... 52
25.2 $y = a \cdot (x - x_1) + y_1$ ... 52
25.3 Ligning for lodret linje ... 52
25.3a Eksempel med lodret linje ... 52
25.4 Begrundelse for 25.2 ... 53
25.5 $a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$ ... 53
25.6 Eksempel på brug af 25.5 ... 53
25.7 Begrundelse for 25.5 ... 54
25.8 $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ ... 54
25.9a Bestem andenkoordinat til punkt på linje ... 54
25.9b Bestem førstekoordinat til punkt på linje ... 54
25.9c Bestem punkt på linje der har ligning af typen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ ... 55

26. Parameterfremstilling for linje

26.1 Parameterfremstilling. Oplæg ... 56
26.2 Parameterfremstilling. Regel ... 56
26.3 Parameterfremstilling. Eksempel ... 57

27. Afstand fra punkt til linje

27.1 Afstand fra punkt til linje. Regel ... 58
27.2 Afstand fra punkt til linje. Eksempel ... 58
27.3 Vinkelret afstand fra A til linje gennem B og C ... 59

28. Eksempler med ligning og parameterfremstilling for linje linje

28.1a Oplyst: Parameterfremstilling for linje. Find en ligning for linjen 59

28.1b Oplyst: Ligning $a \cdot x+b \cdot y+c=0$ for linje. Find parameterfremstilling for linjen.... 59

28.1c Oplyst. Ligning $a \cdot (x-x_0)+b \cdot (y-y_0)=0$ for linje. Find parameterfremstilling 59

28.1d Oplyst: Ligning $y=a \cdot x+b$ for linje. Find parameterfremstilling for linjen..... 59

28.2 Bestem tal k så to linjer står vinkelret på hinanden..... 60

28.3a Linjes ligning ud fra punkt og hældningsvinkel 61

28.3b Hældningsvinkel ud fra linjens ligning 61

28.4 Vinkel mellem linjer 62

28.5a Skæring med andenaksen ud fra ligning 63

28.5b Skæring med andenaksen ud fra parameterfremstilling..... 63

28.5c Skæring med førsteaksen ud fra ligning..... 64

28.5d Skæring med førsteaksen ud fra parameterfremstilling 64

28.5e Skæring mellem linjer ud fra deres ligninger..... 65

28.5g Skæring mellem linjer ud ligning og parameterfremstilling 65

28.5i Skæring mellem linjer ud fra deres parameterfremstillinger 66

29. Ligning for cirkel

29.1 Definition af cirkel 67

29.2 Ligning for cirkel 67

29.3 Bevis for 29.2 67

29.4a Ligger P på cirkel? Radius, centrum og P er kendt 67

29.4b Ligger P på cirkel? P og ligning for cirkel er kendt 67

29.4c Ligger P på cirkel? P og ligning for cirkel er kendt 67

29.4d Ligger P inden for cirkel, uden for cirkel, eller på cirkel?..... 68

29.5a Bestem ligning for cirkel ud fra centrum og radius 68

29.5b Bestem ligning for cirkel ud fra centrum og radius 69

29.6a Bestem centrum og radius ud fra ligning ved simpel omskrivning 70

29.6b Bestem centrum og radius ud fra ligning ved omskrivning 70

29.6c Hvis x-led eller y-led mangler, ser omskrivningen anderledes ud 70

29.6d Gør rede for at ligning er ligning for cirklen med givet centrum og radius..... 70

30. Skæring mellem cirkel og linje

30.1 Beregning af afstand fra centrum til linje 71

30.2 Regel om antal fælles punkter for linje og cirkel 71

30.3 Eksempel med antal fælles punkter for cirkel og koordinatakser 71

30.4 Beregning af skæringspunkter mellem linje og cirkel 72

30.5 Korteste afstand fra punkt til cirkel 72

30.6 Find de punkter på en linje der har en given afstand til et givet punkt 72

31. Tangent til cirkel

31.1 Definition af tangent til cirkel 73

31.2 Regel om tangent til cirkel og afstand 73

31.2a Bestem radius når centrum og tangent er kendt 73

31.2b Undersøg om linje er tangent når centrum og radius er kendt 73

31,2c Bestem *k* så linje er tangent når centrum og radius er kendt 74

31.3 Regel om tangent til cirkel og vinkelret 74

31.3a Bestem ligning for tangent ud fra centrum og røringspunkt 75

31.3c Bestem røringspunkt for tangent der er parallel med tangent i oplyst punkt 75

31.3d Ud fra tangents ligning og røringspunkt: Ligning for linje gennem centrum 76

32. Løse opgave ved at tegne i Nspire, eksempler

32.1 77

32.2 77

32.3 78

32.4 78

19. Midtpunkt for linjestykke

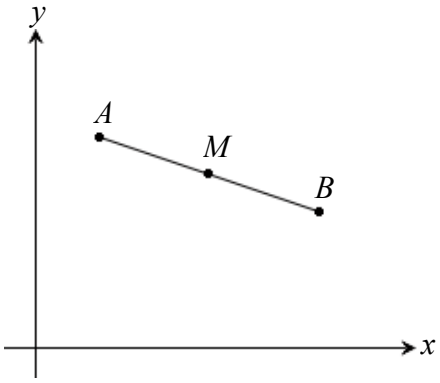
19a Midtpunkt for linjestykke. Regel

Når et linjestykke har endepunkter

$$A(x_1, y_1) \quad \text{og} \quad B(x_2, y_2)\,,$$

så har linjestykket midtpunktet

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$



19b Oplæg til 1c

Længde af AB

AB er parallel med x-aksen, så vi skal bruge x-koordinaterne. Da B ligger længere til højre end A, skal 14 stå før minustegnet:

$$|AB| = 14-(-6) = 20$$

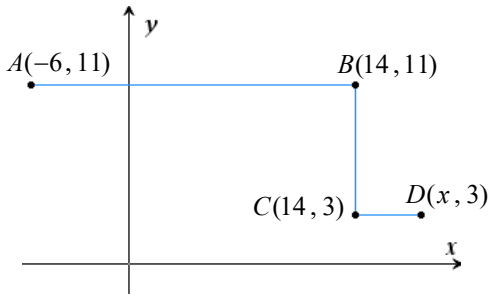
Længde af BC

BC er parallel med y-aksen, så vi skal bruge y-koordinaterne. Da B ligger længere oppe end C, skal 11 stå foran minustegnet:

$$|BC| = 11-3 = 8$$

Længde af CCD

$$|CD| = x-14$$



19c Midtpunkt for linjestykke. Bevis

På figuren ser vi at da AM og MB er lige lange, vil CD og DE også være lige lange.
Heraf fås at

$$x_3 - x_1 = x_2 - x_3$$

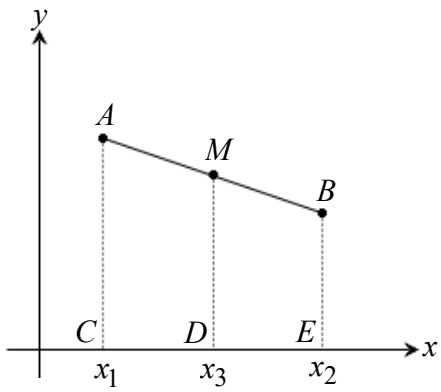
Vi lægger x_1 og x_3 til begge ligningens sider og får

$$2x_3 = x_1 + x_2$$

Så dividerer vi begge sider med 2 og får

$$x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}\,.$$

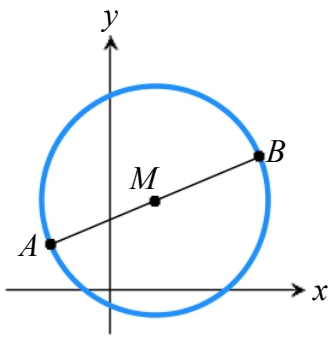
Hermed er vist at x-koordinaten for M er som påstået.
Beviset for y-koordinaten er tilsvarende.



19d Midtpunkt for linjestykke. Eksempel

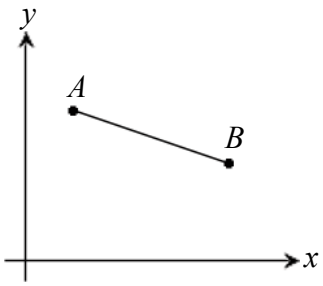
Der er givet to punkter $A(-4, 3)$ og $B(10, 9)$.
AB er diameter i den viste cirkel.
Vi vil bestemme koordinatsættet til centrum.
Centrum er midtpunkt for linjestykket AB, så koordinatsættet er

$$\left(\frac{-4+10}{2}, \frac{3+9}{2}\right) = \underline{\underline{(3, 6)}}$$



20. Afstand mellem to punkter

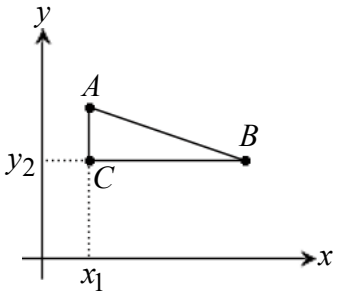
20a Afstand mellem to punkter. Regel



Afstand $|AB|$ melem to punkter $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$, er

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \ .$$

20b Afstand mellem to punkter. Bevis



Som vist på figuren tilføjer vi et punkt C så C er ret vinkel i trekant ABC.

C må have samme x-koordinat som A og samme y-koordinat som B.

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 \qquad \text{ifølge pythagoras}$$

$$|AB|^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

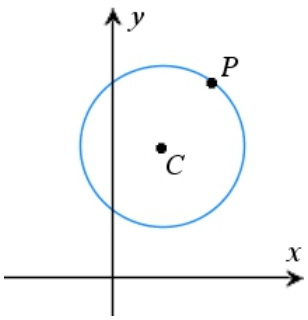
Hermed har vi bevist formlen.

Da x_2-x_1 opløftes til anden, gør det ikke noget at vi ikke ved om det er x_1 eller x_2 der er størst.

Punkterne behøver jo ikke ligge som på figuren.

Det tilsvarende gælder y_1 og y_2.

20c Afstand mellem to punkter. Eksempel



En cirkel har centrum i punktet $C(3, 8)$ og går gennem punktet $P(6, 12)$.

Cirklens radius er afstanden mellem C og P.

Radius er

$$|CP| = \sqrt{(6-3)^2 + (12-8)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

21. Hældningskoefficient

21.1a Hældningskoefficient. Definition

På en linje ligger to punkter P og Q.

Hvis

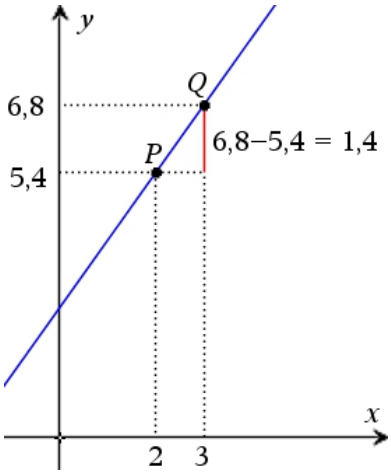
Q's x-koordinat er 1 større end P's x-koordinat

så gælder:

linjens hældningskoefficient =

Q's y-koordinat – P's y-koordinat

21.1b Hældningskoefficient. Eksempel 1



Da

Q's x-koordinat er 1 større end P's x-koordinat

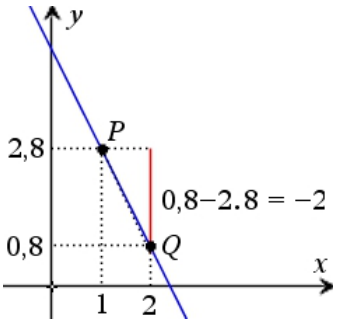
så gælder:

linjens hældningskoefficient =

Q's y-koordinat – P's y-koordinat =

$6{,}8 - 5{,}4 = 1{,}4$

21.1c Hældningskoefficient. Eksempel 2



Da

Q's x-koordinat er 1 større end P's x-koordinat

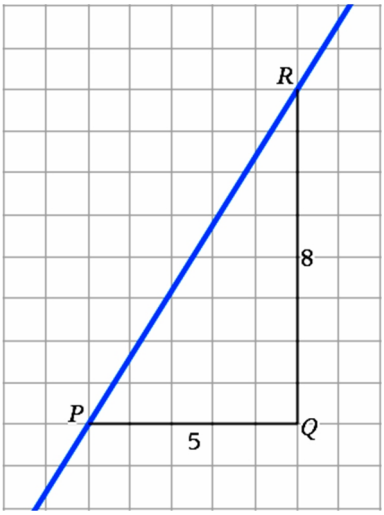
så gælder:

linjens hældningskoefficient =

Q's y-koordinat – P's y-koordinat =

$0{,}8 - 2{,}8 = -2$

21.1d Hældningskoefficient. Metode 1 til beregning



På figuren er vist en blå linje.

Hvis vi fra et punkt på linjen går 5 enheder til højre, skal vi 8 enheder op for at komme til linjen.

Så er hældningskoefficienten

$$a = \frac{8}{5} = 1{,}6 \ .$$

Begrundelsen står på næste side.

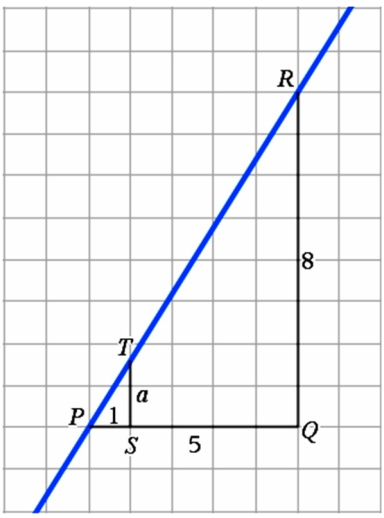
Da

T's x-koordinat er 1 større end P's x-koordinat

så gælder:

linjens hældningskoefficient a =

T's y-koordinat – P's y-koordinat



Vektoren $\overrightarrow{PT} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ er parallel med $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, så

der er et tal k så $\begin{pmatrix} 1 \cdot k \\ a \cdot k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Af førstekoordinaterne ses at $k = 5$,

så $a \cdot 5 = 8$, så $a = \frac{8}{5}$.

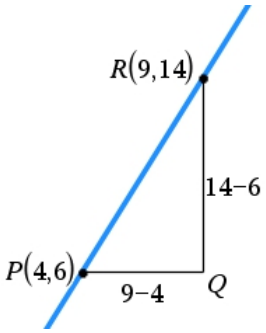
21.1e Hældningskoefficient. Metode 2 til beregning

En linje går gennem punkterne $P(4,6)$ og $Q(9,14)$.
Linjens hældningskoefficient er

$$a = \frac{14-6}{9-4} = \frac{8}{5} = 1,6$$

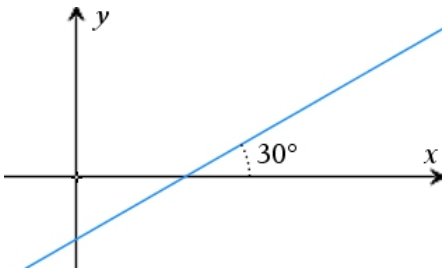
Begrundelse:
På figuren gælder:
Længderne af PQ og QR er $9-4$ og $14-6$,
så af metoden fra 21.1d får vi at

$$a = \frac{14-6}{9-4} \ .$$

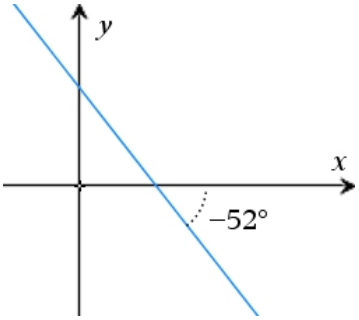


21.2a Hvad er en hældningsvinkel?

En linjes **hældningsvinkel** er vinklen fra førsteaksen til linjen regnet med fortegn.

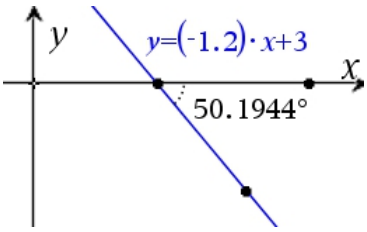


Linjens hældningsvinkel er $30°$.



Linjens hældningsvinkel er $-52°$.

21.2b Måle hældningsvinkel



For at måle hældningsvinklen kan man f.eks. gøre følgende:

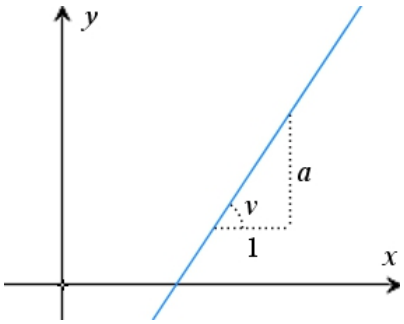
Tegn linje
Vælg i værktøjsmenu Grafindtastning/Rediger / Ligningsskabeloner / Linje / y=mx+b og tast de to tal.

Tegn skæringspunkt
Vælg i værktøjsmenuen Geometri/Punkter og linjer / skæringspunkt(er) og klik på x-aksen og derefter på linjen.

Mål vinkel
Vælg i værktøjsmenuen Geometri / Målinger / Vinkel og klik på linjen til højre for skæringspunktet og derefter på skæringspunktet, og så på x-aksen til højre for skæringspunktet.

På figuren ser vi at hældningsvinklen er negativ.
Vi må selv tilføje minus. Hældningsvinklen er $-50{,}2°$.

21.3a Tangensformel for hældningskoefficient. Regel



Når

a = linjens hældningskoefficient
v = linjens hældningsvinkel

så

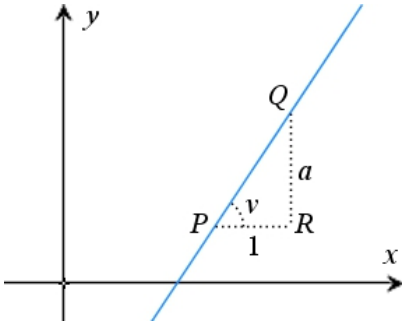
$$a = \tan(v)$$

Formlen er ensbetydende med

$$v = \tan^{-1}(a)$$

ADVARSEL: $\tan^{-1}$ er ikke en potens. $^{-1}$ er et specielt tegn på Nspires tegnpalet.

21.3b Tangensformel for hældningskoefficient. Begrundelse



På figuren er Q's x-koordinat 1 større end P's x-koordinat,
så

linjens hældningskoefficient er
Q's y-koordinat minus P's y-koordinat,

dvs.

linjens hældningskoefficient = $|QR|$

I den retvinklede trekant PQR gælder.

v's hosliggende katete $\cdot$ $\tan(v)$ = v's modstående katete
$1 \cdot \tan(v)$ = linjens hældningskoefficient

Når

a = linjens hældningskoefficient
v = linjens hældningsvinkel

så

$$a = \tan(v)$$

Negative v og a :

Når $\tan(24°) = 0{,}445$ er $\tan(-24°) = -0{,}445$
Når $\tan(53°) = 1{,}327$ er $\tan(-53°) = -1{,}327$
Osv.

Altså må formlen $a = \tan(v)$ også gælde når v er negativ.

21.3c Tangensformel for hældningskoefficient. Eksempler

Hvis en linje har hældningskoefficienten $-3{,}65$
så er hældningsvinklen $v = \tan^{-1}(-3{,}65) = -74{,}7°$.

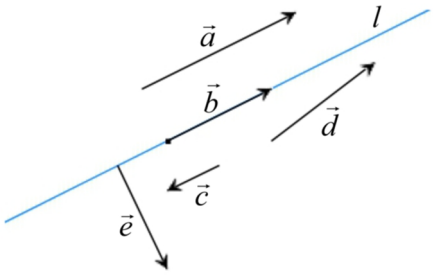
Hvis en linje har hældningsvinklen $5{,}47°$
så er hældningskoefficienten $\tan(5{,}47°) = 0{,}0950$.

22. Retningsvektor og normalvektor

22.1a Retningsvektor. Definition

En retningsvektor for en linje er en vektor der er parallel med linjen.

22.1b Retningsvektor. Eksempel

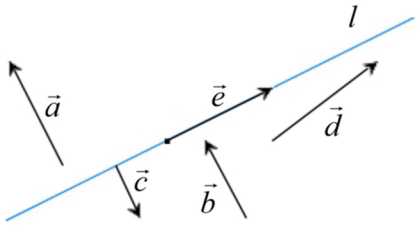


$\vec{a}$ er retningsvektor for l.
$\vec{b}$ er retningsvektor for l.
$\vec{c}$ er retningsvektor for l.
$\vec{d}$ er **ikke** retningsvektor for l.
$\vec{e}$ er **ikke** retningsvektor for l.
Der er uendelig mange retningsvektorer for l.

22.2a Normalvektor. Definition

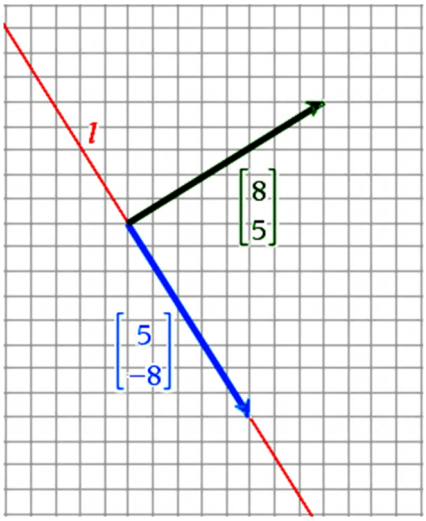
En normalvektor til en linje er en vektor der er vinkelret på linjen.

22.2b Normalvektor. Eksempel



$\vec{a}$ er normalvektor til l.
$\vec{b}$ er normalvektor til l.
$\vec{c}$ er normalvektor til l.
$\vec{d}$ er **ikke** normalvektor til l.
$\vec{e}$ er **ikke** normalvektor til l.
Der er uendelig mange normalvektorer for l.

22.3a Oplyst: retningsvektor. Find: normalvektor



Det er oplyst at $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ er en retningsvektor for linjen l.

En normalvektor for l er tværvektoren $\widehat{\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_1 \end{pmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$ er retningsvektor for l.

tværvektor$\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -(-8) \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$

er normalvektor til l.

22.3b Oplyst: normalvektor. Find: retningsvektor

Det er oplyst at $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er en normalvektor til linjen l.

En retningsvektor for l er tværvektoren $\widehat{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

22.3c Oplyst: retningsvektor. Find: hældningskoefficient

Det er oplyst at $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ er en retningsvektor for linjen l.

Hældningskoefficienten for l er $a = \frac{r_2}{r_1}$.

22.3d Oplyst: normalvektor. Find: hældningskoefficient

Find retningsvektor med 22.3b.
Find hældningskoefficient med 22.3c.

22.3e Oplyst: retningsvektor. Find: hældningsvinkel

Find hældningskoefficient med 22.3c.
Find hældningsvinkel med 21.3c.

22.3f Oplyst: normalvektor. Find: hældningsvinkel

Find retningsvektor med 22.3b.
Find hældningskoefficient med 22.3c.
Find hældningsvinkel med 21.3c.

23. Forskel på forskrift og ligning

23.1 En **funktions** **forskrift** $y = 2{,}5x+8{,}5$
fortæller at

y er det tal man får ved at indsætte værdien af x og regne ud.

23.2 En **funktions** **forskrift** $y = x^2-3x+5$
fortæller at

y er det tal man får ved at indsætte værdien af x og regne ud.

23.3 En **linjes** **ligning** $y = 2{,}5x+8{,}5$
fortæller at

et punkt ligger på linjen
netop hvis
ligningen bliver sand når man indsætter punktets koordinater for x og y i ligningen.

23.4 En **parabels** **ligning** $y = x^2-3x+5$
fortæller at

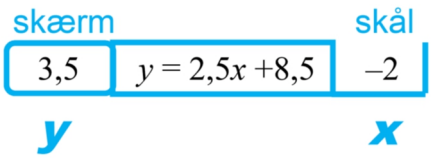
et punkt ligger på parablen
netop hvis
ligningen bliver sand når man indsætter punktets koordinater for x og y i ligningen.

23.5 En **cirkels** **ligning** $y = x^2-2x+y^2+4y+1$
fortæller at

et punkt ligger på cirklen
netop hvis
ligningen bliver sand når man indsætter punktets koordinater for x og y i ligningen.

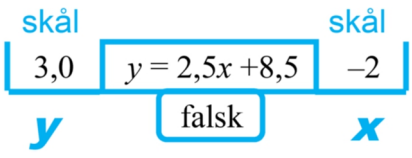
23.6 Vi kan tænke på en forskrift og en ligning sådan:

Forskrift



Når et tal anbringes i skålen x,
så vises et tal på skærmen y.

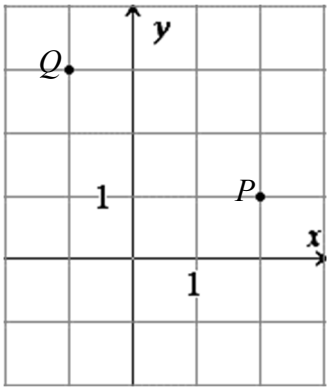
Ligning



Når der anbringes tal i skålene x og y,
så står der falsk eller sandt på skærmen.

24. Grundlæggende eksempler med ligninger

24a Punkt der ikke ligger på kurven



En parabel har ligningen

$$y = x^2 - 2x$$

På figuren ser vi at koordinatsættet for P er $(x, y) = (2, 1)$.
Dette indsætter vi i ligningen:

$$y = x^2 - 2\cdot x$$
$$1 = 2^2 - 2\cdot 2$$

Ligningens højre side har værdien 0.
Venstre side har en anden værdi, så

ligningen er **falsk**.

Altså:

P **ligger ikke** på parablen.

24b Punkt der ligger på kurven

Vi ser at koordinatsættet for Q er $(x, y) = (-1, 3)$.
Dette indsætter vi i ligningen:

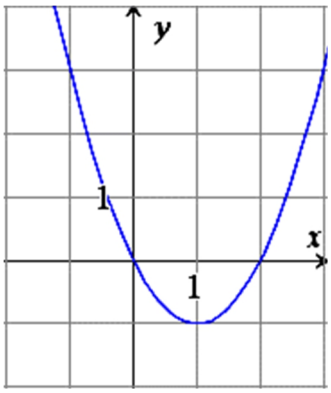
$$y = x^2 - 2\cdot x$$
$$3 = (-1)^2 - 2\cdot(-1)$$

Ligningens højre side har værdien 3.
Venstre side har samme værdi, så

ligningen er **sand**.

Altså:

Q **ligger** på parablen.



24c Alle punkter der ligger på kurven

På nederste figur er afsat alle de punkter der gør ligningen sand.

Tilsammen danner disse punkter en parabel.

24d Skæringspunkt

En linje l består af de punkter (x, y) som gør ligningen $y = 0{,}5\cdot x + 4$ sand.
En linje m består af de punkter (x, y) som gør ligningen $y = 2\cdot x - 5$ sand.

Når vi indsætter $(6, 7)$ i de to ligninger, ser vi at begge bliver sande.
Punktet $(6, 7)$ ligger altså på begge linjer. Det er linjernes skæringspunkt.

For at finde det eller de punkter der gør begge ligninger sande, skal vi løse ligningssystemet

$$y = 0{,}5\cdot x + 4 \text{ og } y = 2\cdot x - 5 .$$

På Nspire kan det gøres sådan:

solve(y=0.5· x+4 and y=2· x−5,x,y) ▸ x=6. and y=7.

25. Ligning for linje

25.1 $y = a \cdot x + b$

Linjen der
går gennem $R(0, b)$
og har hældningskoefficienten a ,
har ligningen

25.1a $y = a \cdot x + b$

Når linjen går gennem

$P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$

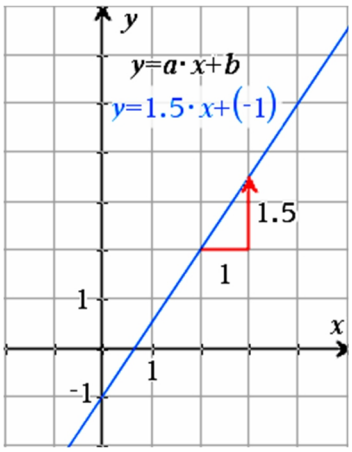
er

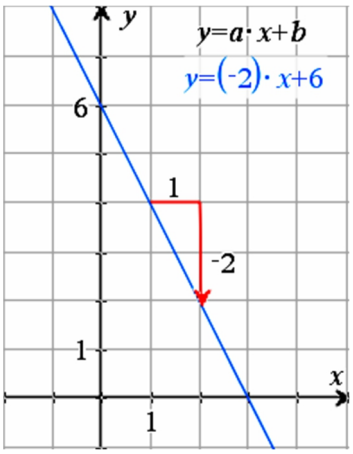
25.1b $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

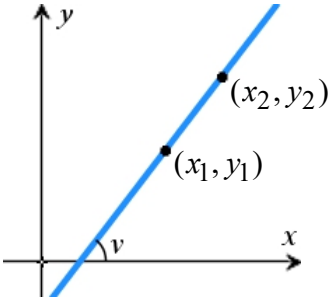
25.1c $b = y_1 - a \cdot x_1$

Når linjens hælningsvinkel er v er

25.1d $a = \tan(v)$







25.2 $y = a \cdot (x - x_1) + y_1$

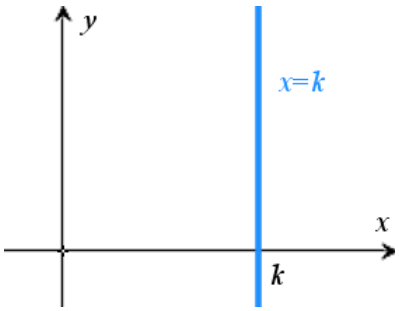
Linjen der
går gennem $P(x_1, y_1)$
og har hældningskoefficienten a
har ligningen

$y = a \cdot (x - x_1) + y_1$

25.3 Ligning for lodret linje

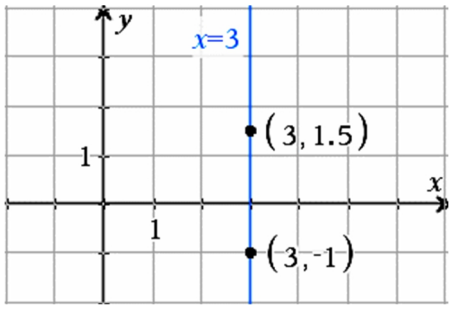
Den lodrette linje
der skærer x-aksen i $P(0, k)$,
har ligningen

$x = k$



25.3a Eksempel med lodret linje

Alle punkter der har x-koordinat 3 ,
danner en lodret linje der har ligningen $x = 3$.



25.4 Begrundelse for 25.2

En linje l har hældningskoefficienten a .
(x_1, y_1) er et fast punkt på l .
(x, y) er et vilkårlig punkt på l .
Ved at indsætte i formlen 25.1b får vi

$$a = \frac{y - y_1}{x - x_1} \ .$$

Ved at gange begge sider med $x - x_1$ får vi

$$a \cdot (x - x_1) = y - y_1 \ .$$

Ved at lægge y_1 til begge sider får vi

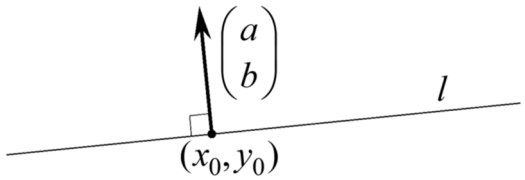
$$a \cdot (x - x_1) + y_1 = y \ .$$

Så er formel 25.2 bevist.

25.5 $a\cdot(x-x_0)+b\cdot(y-y_0) = 0$

Linjen der
går gennem $P(x_0, y_0)$
og har normalvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
har ligningen

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$$



25.6 Eksempel på brug af 25.5

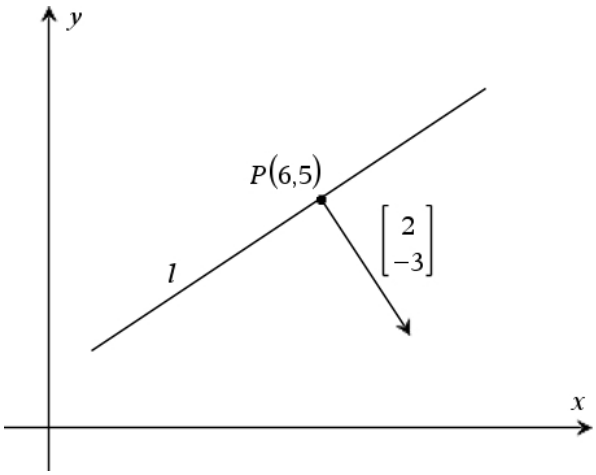
Linjen l på billedet er bestemt ved en normalvektor og et punkt.

Af 25.5 følger at l har ligningen

$$2 \cdot (x - 6) + (-3) \cdot (y - 5) = 0$$

som kan omskrives til

$$2x - 3y + 3 = 0 \ .$$



25.7 Begrundelse for 25.5

l er linjen som går gennem (x_0, y_0) og er vinkelret på $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Vektoren fra (x_0, y_0) til (x, y) er $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$. Se figur.

Et punkt (x, y) ligger på l

netop når

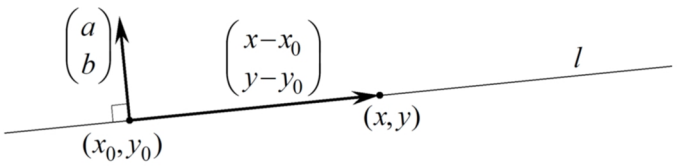
$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ er $\vec{o}$ eller vinkelret på $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

og dette gælder netop når

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = 0$$

dvs.

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$$



25.8 $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$

Når en linje har en ligning af typen $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$,
så er $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ en normalvektor til linjen.

Hvis en linje har ligningen $5x - y + 2 = 0$,
så vil $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ være en normalvektor til linjen.

25.9a Bestem andenkoordinat til punkt på linje

En linje l er givet ved ligningen

$$2x + y - 1 = 0 .$$

Et punkt P ligger på l og har førstekoordinat 3.
Vi vil bestemme andenkoordinten y_0 for P.

Da $P(3, y_0)$ ligger på l, gælder

$$2 \cdot 3 + y_0 - 1 = 0 .$$

Heraf fås $y_0 = -5$.

25.9b Bestem førstekoordinat til punkt på linje

En linje l er givet ved ligningen

$$3x - y = 0 .$$

Et punkt P ligger på l og har andenkoordinat 6.
Vi vil bestemme førstekoordinten x_0 for P.

Da $P(x_0, 6)$ ligger på l, gælder

$$3 \cdot x_0 - 6 = 0 .$$

Heraf fås $x_0 = 2$.

25.9c Bestem punkt på linje der har ligning af typen $ax + bx + c = 0$

En linje l er givet ved ligningen

$$2x - 5y + 6 = 0 .$$

Vi skal finde et punkt som ligger på l .
Vi må starte med at vælge et af punktets koordinater. Så kan vi finde den anden af koordinaterne som vist i 25.9a eller 25.9b.
Lad os sige at vi vælger at punktets andenkoordinat skal være 0.

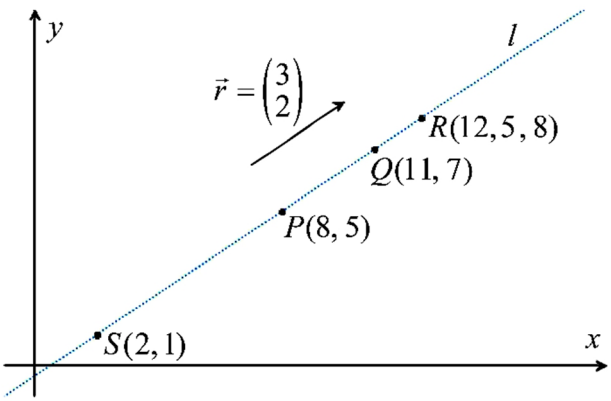
Det søgte punkt $P(x_0 , 0)$ ligger på l, så

$$2x_0 - 5 \cdot 0 + 6 = 0 .$$

Heraf fås $x_0 = 3$.
Altså ligger punktet $P(3 , 0)$ på l .
Hvis resultatet bliver en brøk og vi ønsker at det skal være et helt tal, så kan vi prøve os frem med et andet valg af koordinat.

26. Parameterfremstilling for linje

26.1 Parameterfremstilling. Oplæg



Når vi til P's koordinater lægger $\vec{r}$'s koordinater, så får vi Q's koordinater:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Når vi til P's koordinater lægger 1,5 gange $\vec{r}$'s koordinater, så får vi R's koordinater:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}5 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

Når vi til P's koordinater lægger -2 gange $\vec{r}$'s koordinater, så får vi S's koordinater:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Ethvert punkt på linjen l kan fås ved at udregne P's koordinater plus et passende tal t gange $\vec{r}$'s koordinater:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

26.2 Parameterfremstilling. Regel

l er en linje.

26.2a Når (x_0, y_0) er et punkt på l, og $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ er en retningsvektor for l, så gælder at et punkt (x, y) ligger på l netop hvis der er et tal t så

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Denne ligning kaldes en parameterfremstilling for l.
Tallet t kaldes parameteren.

26.2b Når en ligning af dette udseene er parameterfremstilling for en linje, så er (x_0, y_0) et punkt på linjen og $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ er en retningsvektor for linjen

26.3 Parameterfremstilling. Eksempel

Opgave: $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ligger punktet $(-13\,,\,33)$ på l?

Svar:

$$\begin{aligned} -13 &= 7 + t \cdot (-2) \\ 33 &= 4 + t \cdot 3 \end{aligned}$$

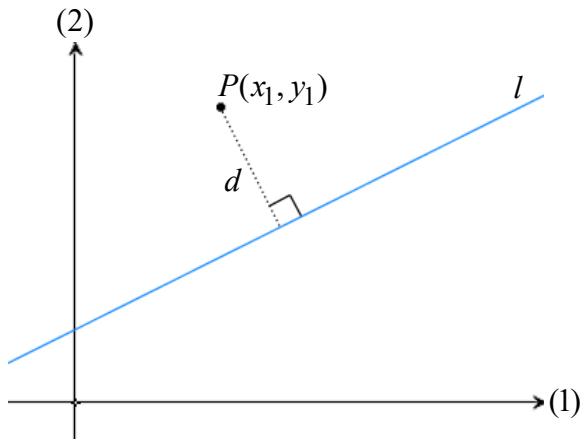
Kun hvis der er et tal så dette er opfyldt, ligger $(-13, 33)$ på l.

Af første ligning får vi $t = 10$.
Nåt $t = 10$ i nederste ligning, giver højre side 34.
Da den ikke giver 33, sluttes:

$(-13\,,\,33)$ ligger ikke på l.

27. Afstand fra punkt til linje

27.1 Afstand fra punkt til linje. Regel



27.1a Afstanden d fra punktet

$P(x_1, y_1)$

til linjen

$l\colon\ y = a{\cdot}x + b$

er

$$d = \frac{|a\cdot x_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2+1}} .$$

27.1b Afstanden d fra punktet

$P(x_1, y_1)$

til linjen

$l\colon\ ax + by + c = 0$

er

$$d = \frac{|a\cdot x_1 + b\cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

27.2 Afstand fra punkt til linje. Eksempel

27.2a Linjen l har ligningen $y = x + 2$.

Ligningen er af typen

$y = a{\cdot}x + b$

med

$a = 1$ og $b = 2$.

Afstanden fra punktet med koordinatsættet $(x_1, y_1) = (2, 3)$ til l er

$$d = \frac{|a\cdot x_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|1\cdot 2 + 2 - 3|}{\sqrt{1^2+1}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}} .$$

27.2b Linjen l har ligningen $4x - 3y + 3 = 0$.

Ligningen er af typen

$ax + by + c = 0$

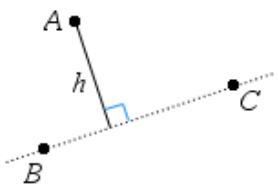
med

$a = 4$, $b = -3$ og $c = 3$.

Afstanden fra punktet med koordinatsættet $(x_1, y_1) = (2, 1)$ til l er

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4{\cdot}2 - 3{\cdot}1 + 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \underline{\underline{\frac{8}{5}}} = 1{,}6 .$$

27.3 Vinkelret afstand fra A til linje gennem B og C



Oplyst

Koordinater til punkter A, B og C.

Skal finde:

Vinkelret afstand h fra A til linjen gennem B og C.

Metode:

Find ligningen for linjen gennem B og C.
Bestem afstanden fra A til denne linje med en af de to formler for afstand fra punkt til linje.
Resultatet er den vinkelrette afstand.

28. Eksempler med ligning og parameterfremstilling for linje

28.1a Oplyst: Parameterfremstilling for linje. Find en ligning for linjen

Bestemt punkt og retningsvektor (se 26.2b). Bestem normalvektor som tværvektor til retnigsvektor (se 4.03). Ud fra punkt og normalvektor bestemmes ligning (se 25.5).

28.1b Oplyst: Ligning $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ for linje. Find parameterfremstilling for linjen

Bestem normalvektor (se 25.8). Bestem retningsvektor som tværvektor til normalvektor (se 4.03). Bestem punkt på linjen (se 25.9c). Ud fra punkt og retningsvektor bestemmes parameterfremstilling (se 26.2a).

28.1c Oplyst: Ligning $a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$ for linje. Find parameterfremstilling for linjen

Bestem normalvektor og punkt (se 25.5). Bestem retningsvektor som tværvektor til normalvektor (se 4.03). Ud fra punkt og retningsvektor bestemmes parameterfremstilling (se 26.2a).

28.1d Oplyst: Ligning af typen $y = a \cdot x + b$ for linje. Find parameterfremstilling for linjen

$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ er en retningsvektor for linjen. $(0, b)$ er et punkt på linjen. Ud fra punkt og retningsvektor bestemmes parameterfremstilling (se 26.2a).

28.2 Bestem tal k så to linjer står vinkelret på hinanden

28.2aHvis linjerne er givet ved ligninger af typen $ax + bx + c = 0$

Oplyst:

$l: \; 3x + 5y - 2 = 0$

$m: \; 2x - ky + 8 = 0$

Skal finde:

Tallet k så l og m står vinkelret på hinanden.

Metode:

Linjernes normalvektorer $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ -k \end{pmatrix}$ skal stå vinkelret på hinanden,

dvs. deres prik-produkt skal være 0 :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -k \end{pmatrix} = 0$$

$$3 \cdot 2 + 5 \cdot (-k) = 0$$

$$6 = 5k$$

$$k = \frac{6}{5} \quad = 1,2$$

28.2b Hvis linjerne er givet ved parameterfremsillinger

Linjerne er vinkelret på hinanden hvis deres retningsvektorer (vektorerne der er ganget med parameteren (ofte t eller s)) er vinkelret på hinanden, dvs. hvis retningsvektorernes prik-produkt er 0.

28.2c Hvis den ene linje er givet ved ligning og den anden ved parameterfremstilling

Linjerne er vinkelret på hinanden hvis den enes normalvektor er parallel med den andens retningsvektor, dvs. hvis determinanten af de to vektorer er 0.

28.2d Hvis en linje er givet ved ligning af typen $y=ax+b$

Linjen omskrives til typen $ax+by+c=0$ ved at trække y fra begge sider: $ax-y+b=0$
Så kan normalvektoren aflæses.

28.3a Linjes ligning ud fra punkt og hældningsvinkel

Oplyst:

Linjen l går gennem punktet $P(1,4)$.
l har hældningsvinklen $-41°$.

Skal finde:

Ligning for l.

Metode:

Hældningsvinklen for l er $-41°$,
så hældningskoefficienten a er

$a = \tan(-41°)$ ifølge afsnit 21.3a eller formelsamling nr. (66)

dvs. $a = -0{,}869287$

En linje gennem $P(x_1, y_1)$ med hældningskoefficient a har ligningen

$y = a \cdot (x - x_1) + y_1$ ifølge afsnit 25.2 eller formelsamling nr. (65)

så l har ligningen

$y = -0{,}869287 \cdot (x - 1) + 4$

som kan omskrives til

$y = -0{,}869287x + 4{,}869287$.

l har ligningen

$$\underline{\underline{y = -0{,}869x + 4{,}869}}$$

28.3b Hældningsvinkel ud fra linjens ligning

Oplyst:

l: $y = 1{,}3x + 6$.

Skal finde:

Hældningsvinkel for l.

Metode:

Hældningskoefficient er

$a = 1{,}3$ Ifølge ligning for l

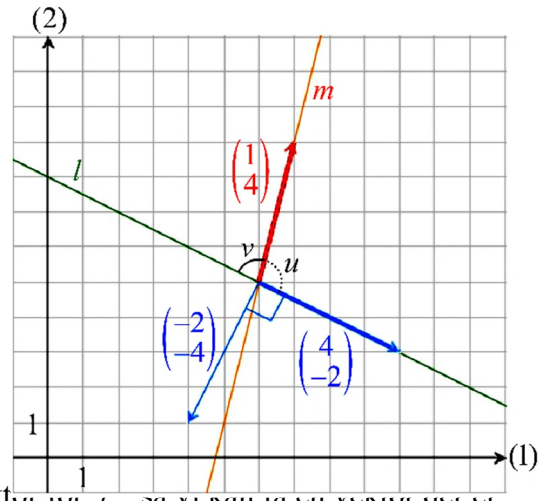
Når v er hældningsvinkel:

$1{,}3 = \tan(v)$ Ifølge 21.3a eller formelsamling nr. (66)

$v = \tan^{-1}(1{,}3) = 52{,}4314° \approx 52{,}4°$ Højreklik, Attributter, Vinkel, Grad

Hældningsvinkel for l er $52{,}4°$.

28.4 Vinkel mellem linjer



To linjer l og m er givet ved

$$l:\ -2x-4y+32=0$$

$$m:\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

Vi vil finde den spidse vinkel mellem linjerne l og m.

Af parameterfremstillingen for m ser vi at

$\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ er retningsvektor for m.

Af ligningen for l ser vi at vektoren $\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ er normalvektor for l, så vi kan få en vektor der er retningsvektor for l ved at tage tværvektoren:

$\widehat{\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}-(-4)\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$. Her er brugt 4.03: $\widehat{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$. Vi har nu:

$\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ er retningsvektor l.

Vinklen u mellem $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ er altså en af de to vinkler som l og m danner.

Af formlen 17.02: $\cos(v)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ får vi: $\cos(u)=\dfrac{1\cdot4+4\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+(-2)^2}}=-0{,}21693$ hvoraf

$$u=\cos^{-1}(-0{,}21693)=102{,}529°.$$

Den anden vinkel som l og m danner er $v=180°-102{,}529°=77{,}471°\approx77{,}5°$.

Den spidse vinkel mellem linjerne l og m er 77,5°.

28.4a Hvis begge linjer er givet ved parameterfremstilling: Vinklen mellem de to retningsvektorer er en af de vinkler som l og m danner.

28.4b Hvis begge linjer er givet ved ligning af typen $ax+by+c=0$: Vinklen mellem de to normalvektorer er en af de vinkler som l og m danner.

28.4c Hvis vi skal finde vinkel mellem linje og førsteaksen: Vi kan enten bruge at $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ er retningsvektor for førsteaksen, eller at $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ er normalvektor til førsteaksen.

28.4d Hvis vi skal finde vinkel mellem linje og andenaksen: Vi kan enten bruge at $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ er retningsvektor for andenaksen, eller at $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ er normalvektor til andenaksen.

28.4e Hvis linjens ligning er af typen $y=ax+b$: Vektoren $\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ er retningsvektor for linjen.

28.4f Hvis det er en lodret linje $x=c$: Vi kan enten bruge at $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ er retningsvektor for linjen, eller at $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ er normalvektor til linjen.

28.5a Skæring med andenaksen ud fra ligning

Linjen l har ligningen

$$2 \cdot x - y + 5 = 0$$

Vi skal finde skæringspunktet P mellem l og andenaksen.

Metode:

P ligger på andenaksen, så P's x-koordinat er 0.

Da P også ligger på l, kan vi nu bruge l's ligning til at bestemme P's y-koordinat.

Vi indsætter P's x-koordinat i ligningen og løser mht. y:

$$2 \cdot 0 - y + 5 = 0$$

$$5 = y$$

Skæringspunkt mellem l og andenaksen er $\underline{\underline{(0\,,5)}}$.

28.5b Skæring med andenaksen ud fra parameterfremstilling

Linjen l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vi skal finde skæringspunktet P mellem l og andenaksen.

Metode:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5t \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+5t \\ 4+3t \end{pmatrix}.$$

Ethvert punkt på l kan fås ved at sætte et passende tal ind for t i $P(-10+5t\,,4+3t)$.
Vi finder t så P ligger på andenaksen, dvs. så x-koordinaten er 0:

$$-10+5t = 0$$

$$5t = 10$$

$$t = 2$$

Når $t = 2$ er $(-10+5t\,,4+3t) = (0\,,4+3 \cdot 2) = (0\,,10)$.

Skæringspunkt mellem l og andenaksen er $\underline{\underline{(0\,,5)}}$.

28.5c Skæring med førsteaksen ud fra ligning

Linjen l har ligningen

$$2 \cdot x - y + 5 = 0$$

Vi skal finde skæringspunktet P mellem l og førsteaksen.

Metode:

P ligger på førsteaksen, så P's y-koordinat er 0.

Da P også ligger på l, kan vi nu bruge l's ligning til at bestemme P's x-koordinat.

Vi indsætter P's y-koordinat i ligningen og løser mht. x:

$$2 \cdot x - 0 + 5 = 0$$

$$2 \cdot x = -5$$

$$x = \frac{-5}{2}$$

$$x = -2{,}5$$

Skæringspunkt mellem l og førsteaksen er $\underline{\underline{(-2{,}5\,,\,0)}}$.

28.5d Skæring med førsteaksen ud fra parameterfremstilling

Linjen l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vi skal finde skæringspunktet P mellem l og førsteaksen.

Metode:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5t \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+5t \\ 4+3t \end{pmatrix}.$$

Ethvert punkt på l kan fås ved at sætte et passende tal ind for t i $P(-10+5t, 4+3t)$.
Vi finder t så P ligger på førsteaksen, dvs. så y-koordinaten er 0:

$$4+3t = 0$$

$$3t = -4$$

$$t = \frac{-4}{3}$$

Når $t = \frac{-4}{3}$ er $(-10+5t, 4+3t) = (-10 + 5 \cdot \frac{-4}{3}, 0) = (-\frac{50}{3}, 0)$.

Skæringspunkt mellem l og andenaksen er $\underline{\underline{(-\frac{50}{3}, 0)}}$.

28.5e Skæring mellem to linjer ud fra deres ligninger

Hvis ligning ikke er oplyst, så find den, se afsnit 25 .

Vi skal finde skæringspunktet mellem linjerne

$$l: \quad 2x + 3y = 16$$
$$m: \quad x - 2y = 1$$

Det punkt hvis koordinatsæt gør begge ligninger sande, finder vi ved at løse ligningssystemet:

$$\text{I}: \quad 2x + 3y = 16$$
$$\text{II}: \quad x - 2y = 1$$

Af II fås:

$$\text{III}: \quad x = 1 + 2y$$

Dette indsættes i I: $2x + 3y = 16$:

$$2(1 + 2y) + 3y = 16$$
$$2 + 4y + 3y = 16$$
$$7y = 14$$
$$y = 2$$

Dette indsættes i III: $x = 1 + 2y$

$$x = 1 + 2\cdot 2$$
$$x = 5$$

Skæringspunktet mellem l og m er $\underline{\underline{P(5,2)}}$.

58.5f I Nspire ser løsningen af ligningssystemet sådan ud:

Nspire løser ligninssystemet $2x + 3y = 16$ og $x - 2y = 1$ mht. x og y og får $x = 5$ og $y = 2$:

solve(2·x+3·y=16 and x−2·y=1,x,y) ▸ x=5 and y=2

28.5g Skæring mellem to linjer ud fra ligning og parameterfremstilling

Vi skal finde skæringspunktet mellem linjerne

$$l: \quad 2x + y - 6 = 0$$

$$m: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Metode:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Punkterne $(x, y) = (-1+3t, 2t)$ udgør m. Vi bestemmer t så punktet ligger på l, dvs. opfylder l's ligning:

$$2x + y - 6 = 0$$
$$2(-1+3t) + 2t - 6 = 0$$
$$-2 + 6t + 2t - 6 = 0$$
$$8t = 8$$
$$t = 1$$

Det punkt $(-1+3t, 2t)$ som ligger på l, er altså det hvor $t = 1$:

Når $t = 1$, er $(-1+3t, 2t) = (-1+3\cdot 1, 2\cdot 1) = (2, 2)$.

Skæringspunktet mellem l og m er $\underline{\underline{(2, 2)}}$.

28.5h I Nspire ser løsningen sådan ud:

solve(2· x+y−6=0 and x=⁻1+3· t and y=0+2· t,x,y,t) ▸ x=2 and t=1 and y=2

28.5i Skæring mellem to linjer ud fra deres parameterfremstillinger

Vi skal finde skæringspunktet mellem linjerne

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$m: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+t \\ -1+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -1+t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2s \\ 1+s \end{pmatrix}$$

Vi bestemmer s eller t så $(t, -1+t)$ og $(1+2s, 1+s)$ er samme punkt:

$$\text{I}: \quad t = 1+2s$$

$$\text{II}: \quad -1+t = 1+s$$

Af I ses at $1+2s$ er t. Vi indsætter $1+2s$ for t i II:

$$-1+(1+2s) = 1+s$$

$$-1+1+2s = 1+s$$

$$2s = 1+s$$

$$s = 1$$

Når $s = 1$, er $(1+2s, 1+s) = (1+2\cdot 1, 1+1) = (3, 2)$.

Skæringspunktet mellem l og m er $\underline{\underline{(3, 2)}}$.

28.5j I Nspire kan løsningen se sådan ud:

solve(x=0+t· 1 and y=⁻1+t· 1 and x=1+s· 2 and y=1+s· 1,x,y,s,t)
▸ x=3 and s=1 and t=3 and y=2

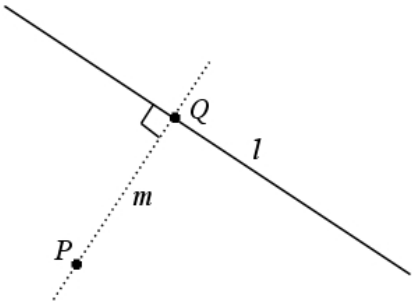
28.5k Projektion af punkt på linje

Vi vil finde projektionen Q af punktet $P(2,1)$ på linjen l: $2x+3y-20=0$.
Q er skæringspunktet mellem l og linjen m der går gennem P og er vinkelret på l.

Af ligningen for l ser vi at vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ er vinkelret på l, så m har parameterfremstillingen

$$m: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

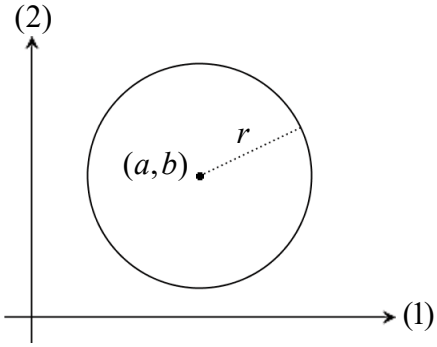
Herefter kan vi bruge metoden fra 28.5g til finde Q.



29. Ligning for cirkel

29.1 Definition af cirkel

Der er givet et punkt C og et positivt tal r.
Cirklen med centrum C og radius r betstår
af de punkter hvis afstand til C er r.



29.2 Ligning for cirkel

Cirklen med

centrum $C(a,b)$ og radius r

har ligningen

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \ .$$

29.3 Bevis for 29.2

Et punkt (x,y) ligger på cirklen netop hvis

afstanden fra (x,y) til punktet (a,b) er lig r,

Ved at bruge formlen 2a for afstand kan vi skrive dette sådan:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r \ .$$

Vi opløfter begge sider til anden og får:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2 .$$

Vi har nu bevist at et punkt (x,y) ligger på cirklen netop hvis denne ligning er opfyldt,
dvs. vi har vist at denne ligning er en ligning for cirklen.

29.4a Ligger *P* på cirkel? Radius, centrum og *P* er kendt

M er cirklen med centrum $C(3,4)$ og radius 5.
Ligger punktet $P(6,8)$ på M?

Metode

Udregn afstanden fra C til P. Se 20a og 20c eller formelsamling nr. (69).
Hvis denne afstand er lig radius, så ligger P på M, og ellers ikke.

29.4b Ligger *P* på cirkel? *P* og ligning for cirkel er kendt

M er cirklen med ligningen $(x-3)^2+(y-4)^2=25$.
Ligger punktet $P(6,8)$ på M?

Metode

Indsæt i ligningen 6 for x og 8 for y, og regn ud,
Hvis ligningen bliver sand, så ligger P på M, og ellers ikke.

29.4c Ligger *P* på cirkel? *P* og ligning for cirkel er kendt

M er cirklen med ligningen $x^2-6x+y^2-8y=0$.
Ligger punktet $P(6,8)$ på M?

Metode

Indsæt i ligningen 6 for x og 8 for y, og regn ud,
Hvis ligningen bliver sand, så ligger P på M, og ellers ikke.

29.4d Ligger P inden for cirkel, uden for cirkel, eller på cirkel?

Der er givet punktet $P(4, 2)$ og cirklen med ligningen

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 10 .$$

Undersøg ved beregning om P ligger

inden for cirklen , **på cirklen** eller **uden for cirklen** .

Svar

Cirklens ligning er af typen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

med $a = 2$, $b = -1$, $r = \sqrt{10}$,
dvs. centrum er $C(2, -1)$, og radius er $\sqrt{10}$.

P 's afstand fra centrum er

$$|CP| = \sqrt{(4-2)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{13}$$

Afstanden fra centrum til P er større end radius, så

P ligger uden for cirklen .

29.5a Bestem ligning for cirkel ud fra centrum og radius

Skriv en ligning for cirklen M med centrum $C(-5, 8)$ og radius 4.

Svar

Cirklen med centrum $C(a, b)$ og radius r har ligningen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 ,$$

så M har ligningen

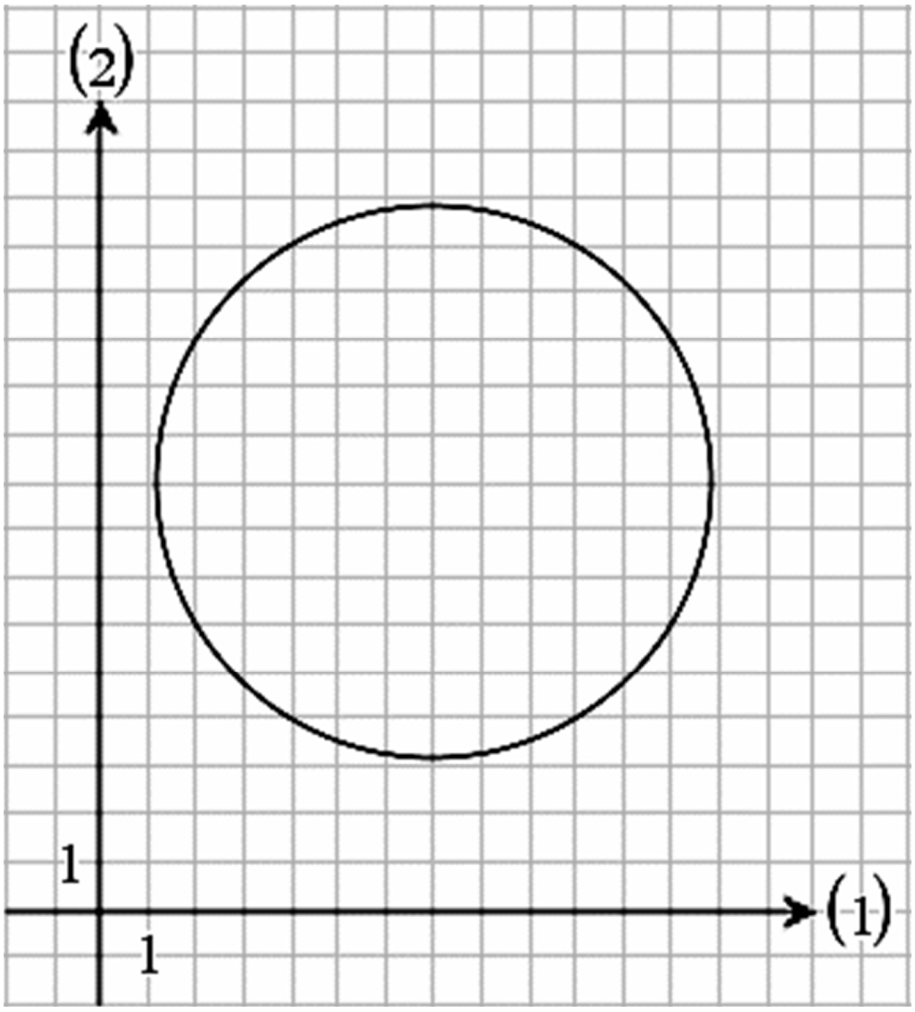
$$(x-(-5))^2 + (y-8)^2 = 4^2 ,$$

dvs.

$$(x+5)^2 + (y-8)^2 = 16 .$$

29.5b Bestem ligning for cirkel ud fra centrum og punkt på cirklen.

Bestem en ligning for den viste cirkel.



Svar

Vi aflæser at centrum er $C(7, 9)$
og at cirklen går gennem punktet $P(10, 14)$,
så cirklens radius er

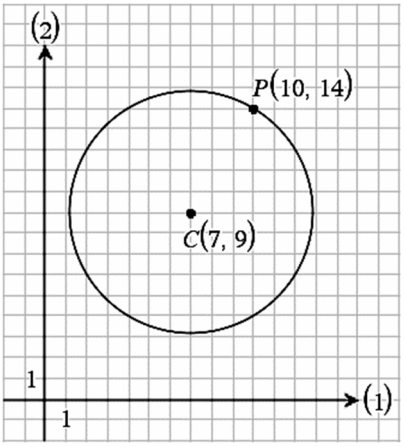
$$|CP| = \sqrt{(10-7)^2 + (14-9)^2} = \sqrt{34} \ .$$

Vi kan nu skrive cirklens ligning:

$$(x-7)^2 + (y-9)^2 = \sqrt{34}^2$$

dvs.

$$\underline{\underline{(x-7)^2 + (y-9)^2 = 34}} \ .$$



29.6a Bestemme centrum og radius ud fra ligning ved simpel omskrivning.

Ligningen

(1) $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 9$

kan omskrives til

$$(x-1)^2 + (y-(-5))^2 = 3^2$$

dvs.

$$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 = r^2$$

med $x_o = 1$, $y_o = -5$ og $r = 3$, så

(1) er en ligning for cirklen med centrum $(1, -5)$ og radius 3 .

29.6b Bestemme centrum og radius ud fra ligning ved omskrivning.

Vi bestemmer centrum og radius
for cirklen der har ligningen

$x^2 - 2x + y^2 + 10y + 17 = 0$

Vi lægger tre tal til begge ligningens sider.

Det første tal: Det halve af tallet foran x opløftet til anden: $(-1)^2 = 1$

Det andet tal: Det halve af tallet foran y opløftet til anden: $5^2 = 25$

Det tredje tal: Konstantleddet (det uden x eller y) med modsat fortegn: -17

$x^2 + 1 - 2x + y^2 + 25 + 10y = 1 + 25 - 17$

Tre første led omskrives til $(x-1)^2$ hvor -1 er halvdelen af tallet foran x

Tre næste led omskrives til $(y+5)^2$ hvor $+5$ er halvdelen af tallet foran y

De tre tal efter = lægges sammem

$(x-1)^2 + (y+5)^2 = 9$

Heraf ser vi at centrum er $\underline{\underline{(1, -5)}}$ og radius er $\sqrt{9} = \underline{\underline{3}}$. Se **9.5a**

29.6c Hvis *x*-led eller *y*-led mangler, ser omskrivningen anderledes ud:

$x^2 + y^2 + 10y + 17 = 0$

$x^2 + y^2 + 25 + 10y = 25 - 17$

$(x-0)^2 + (y+5)^2 = 8$ Da x^2 er lig $(x-0)^2$

Centrum er $(0, -5)$ og radius er $\sqrt{8}$.

29.6d Gør rede for at givet ligning er ligning for cirklen med givet centrum og radius

En cirkel har centrum i $C(2, -1)$ og går gennem $P(3, 1)$.

Gør rede for at cirklen er bestemt ved ligningen

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0$$

Svar

Cirklens radius er

$$|CP| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Ligningen er

$$(x-2)^2 + (y-(-1))^2 = \sqrt{5}^2 .$$

Vi omskriver denne:

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

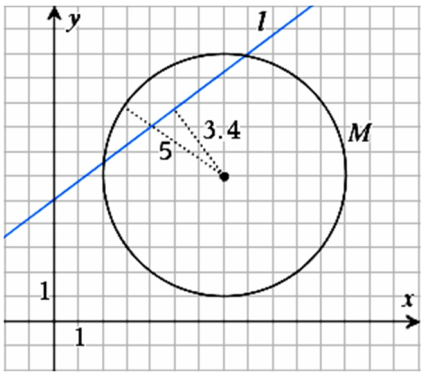
$x^2 + 4 - 4x + y^2 + 1 + 2y = 5$

$x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0$

Hermed er vist at cirklen er bestemt ved denne ligning.

30. Skæring mellem cirkel og linje

30.1 Beregning af afstand fra centrum til linje



En linje l og en cirkel M er givet ved

$$l: \quad y = 0,75x + 5$$

$$M: \quad (x-7)^2 + (y-6)^2 = 25$$

Af cirklens ligning ser vi at centrum er $(7, 6)$
og at radius er $\sqrt{25} = 5$.

Linjens ligning er af typen $y = a \cdot x + b$
med $a = 0{,}75$ og $b = 5$.

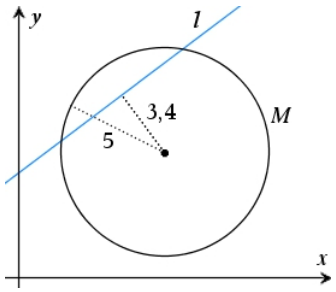
Afstand fra centrum $(7, 6)$ til linjen l er

$$d = \frac{|a \cdot 7 + b - 6|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|0,75 \cdot 7 + 5 - 6|}{\sqrt{0,75^2 + 1}} = 3{,}4 .$$

Afstanden er mindre end radius, så linjen har to punkter fælles med cirklen. Se figur.

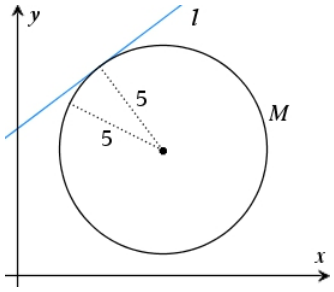
30.2 Regel om antal fælles punkter for linje og cirkel

d = afstand fra centrum til linje $\qquad$ r = radius



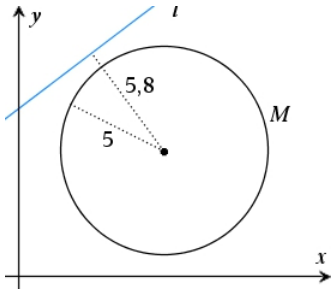
$d < r$:

M og l har 2 punkter fælles



$d = r$:

M og l har 1 punkt fælles



$d > r$:

M og l har 0 punkter fælles

30.3 Eksempel med antal fælles punkter for cirkel og koordinatakser

En cirkel har ligningen

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 16 .$$

Heraf ses at centrum er $(-2, 5)$ og radius er $\sqrt{16} = 4$.

Centrums afstand til y-aksen er altså 2 da centrums x-koordinat er -2.
Afstanden er altså mindre end radius, så cirklen har 2 punkter fælles med y-aksen.

Centrums afstand til x-aksen er 5 da centrums y-koordinat er 5.
Afstanden er altså større end radius, så cirklen har 0 punkter fælles med x-aksen.

30.4 Beregning af skæringspunkter mellem linje og cirkel

En linje l og en cirkel M er givet ved

$$l: \quad y = 2x + 5$$

$$M: \quad x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$$

Et skæringspunkt er et punkt der ligger både på l og på M, dvs. som gør begge ligninger sande.

Nspire løser ligningssystemet

$$y = 2x + 5 \text{ og } x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$$

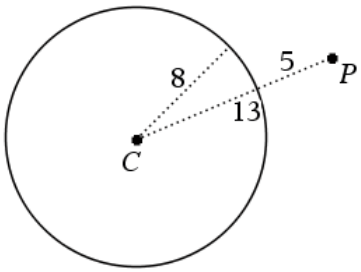
mht. x og y og får $x=-3$ og $y=-1$ eller $x=1$ og $y=7$:

solve$(y=2\cdot x+5 \text{ and } x^2-2\cdot x+y^2-4\cdot y-20=0, x, y)$

▸ $x=-3$ and $y=-1$ or $x=1$ and $y=7$

Skæringspunkterne mellem l og M er $(-3,-1)$ og $(1,7)$.

30.5 Korteste afstand fra punkt til cirkel



Vi vil bestemme den korteste afstand fra punktet $P(23, 19)$ Til cirklen med ligningen

$$(x-11)^2 + (y-14)^2 = 64 .$$

Af ligningen ser vi at centrum C har koordinaterne $(11, 14)$ og at radius er $\sqrt{64} = 8$.

Afstand fra P til C er

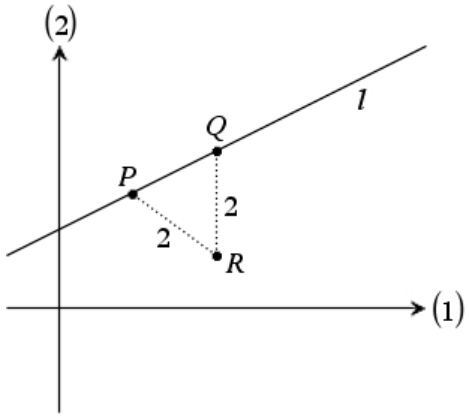
$$\sqrt{(23-11)^2+(19-14)^2} = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13 .$$

12^2 og $\sqrt{169}$ kan udregnes med gangetabellen i formelsamlingen.

Korteste afstand fra P til cirklen er

$$13 - 8 = \underline{\underline{5}} .$$

30.6 Find de punkter på en linje der har en given afstand til et givet punkt



Der er givet punktet $R(3, 1)$ og linjen l: $y = 0{,}5x + 1{,}5$. Vi vil bestemme de punkter P og Q som ligger på l og hvis afstand til R er 2 . Se figur.

P og Q ligger på cirklen med centrum R og radius 2 . Denne cirkel har ligningen

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2^2 .$$

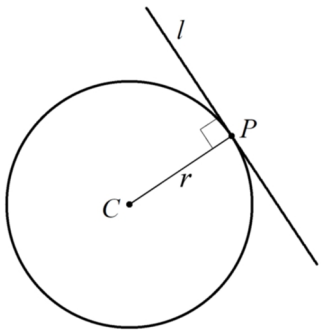
P og Q opfylder både ligningen for l og ligningen for cirklen.

Med metoden fra 30.4 finder vi

$$P(1{,}4 , 2{,}2) \quad \text{og} \quad Q(3 , 3) .$$

31. Tangent til cirkel

31.1 Definition af tangent til cirkel



En tangent til en cirkel er en linje der har præcis

ét punkt fælles med cirklen.

Dette punkt kaldes røringspunktet.

Når man siger "tangenten i P", betyder det at P er røringspunktet.

31.2 Regel om tangent til cirkel og afstand

En linje er tangent til en cirkel

netop hvis

afstanden fra centrum til linjen er lig radius.

31.2a1 Bestem radius når centrum og tangent er kendt $l\colon\ y = a\cdot x + b$

Linjen $l\colon y = 0{,}75x + 2$ er tangent til en cirkel med centrum $(3, -2)$.
Afstand fra centrum til l er (se afsnit 27) :

$$d = \frac{|a\cdot x_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|0{,}75\cdot 3 + 2 - (-2)|}{\sqrt{0{,}75^2+1}} = 5 \ .$$

Så gælder (se 31.2) :

Cirklens radius er 5 .

31.2a2 Bestem radius når centrum og tangent er kendt $l\colon\ ax + by + c = 0$

Linjen $l\colon 12x - 5y - 91 = 0$ er tangent til en cirkel med centrum $(-4, 6)$.
Afstand fra centrum til l er (se afsnit 27) :

$$d = \frac{|a\cdot x_1 + b\cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|12\cdot(-4) + (-5)\cdot 6 + (-91)|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}} = 13 \ .$$

Så gælder (se 31.2) :

Cirklens radius er 13 .

31.2b1 Undersøg om linje er tangent når centrum og radius er kendt $l\colon\ y = a\cdot x + b$

En linje l og en cirkel M er givet ved:

$l\colon\ y = 3x + 1$ og $M\colon\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 10$.

Af cirklens ligning ser vi at centrum er $(4, 3)$ og at radius er $\sqrt{10}$.
Afstanden fra centrum til l er (se afsnit 27) :

$$d = \frac{|a\cdot x_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{|3\cdot 4 + 1 - 3|}{\sqrt{3^2+1}} = \sqrt{10} \ .$$

Da afstanden er lig radius, er l tangent til cirklen (se 31.2) .

31.2b2 Undersøg om linje er tangent når centrum og radius er kendt $l\colon\ ax + by + c = 0$

En linje l og en cirkel M er givet ved:

$$l\colon\ x + 2y - 15 = 0 \quad \text{og} \quad M\colon\ (x+1)^2 + (y-3)^2 = 20\ .$$

Af cirklens ligning ser vi at centrum er $(-1, 3)$ og at radius er $\sqrt{20}$.
Afstanden fra centrum til l er (se afsnit 27) :

$$d = \frac{|a\cdot x_1 + b\cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|1\cdot(-1) + 2\cdot 3 + (-15)|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{20}\ .$$

Da afstanden er lig radius, er l tangent til cirklen (se 31.2) .

31.2c Bestem k så linje er tangent når centrum og radius er kendt

En cirkel har centrum $C(1, 2)$ og radius 5.

En linje l har ligningen

$$l\colon\ k\cdot x + 4\cdot y = 36 \quad \text{hvor } k > 0\ .$$

Bestem værdien af k så l er tangent til cirklen.

Svar

Ligningen for l kan skrives sådan:

$$l\colon\ k\cdot x + 4\cdot y - 36 = 0\ ,\ k > 0\ .$$

Afstanden fra et punkt (x_1, y_1) til l er

$$\frac{|k\cdot x_1 + 4\cdot y_1 - 36|}{\sqrt{k^2+4^2}}\ .$$ Se 27.1b eller formelsamling nr. (74) .

Linjen l er tangent netop hvis

Afstand fra centrum til l er lig radius, Se 31.2 .

dvs.

$$\frac{|k\cdot 1 + 4\cdot 2 - 36|}{\sqrt{k^2+4^2}} = 5\ .$$

Nspire løser ligningen $\dfrac{|k\cdot 1 + 4\cdot 2 - 36|}{\sqrt{k^2+4^2}} = 5$ mht. k for $k > 0$ og får $k = 3$:

$$\text{solve}\left(\frac{|k\cdot 1+4\cdot 2-36|}{\sqrt{k^2+4^2}}=5,k\right)|k>0 \blacktriangleright k=3$$

Linjen l er tangent til cirklen netop når $k = 3$.

31.3 Regel om tangent til cirkel og vinkelret

Lad l være en linje gennem et punkt P på en cirkel.

l er tangent til cirklen

netop hvis

l er vinkelret på linjen gennem P og cirklens centrum.

31.3a Bestem ligning for tangent ud fra røringspunkt og centrum

En cirkel har centrum $C(7,3)$ og går gennem $P(3,4)$.

Tangenten i P er vinkelret på linjen gennem P og centrum, så følgende er en normalvektor til tangenten:

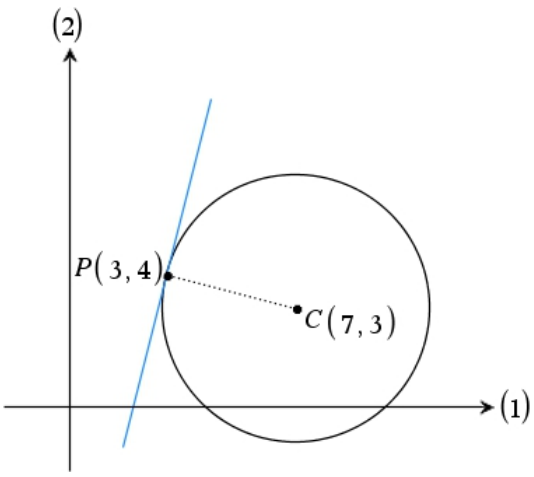
$$\overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} 7-3 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Altså har tangenten ligningen

$$4\cdot(x-3) + (-1)\cdot(y-4) = 0$$

som kan omskrives til

$$\underline{\underline{4x - y - 8 = 0}}$$



31.3b Bestem ligning for tangent ud fra røringspunkt og cirkels ligning

Hvis ligningen er $x^2 - 2x + y^2 + 10y + 17 = 0$, omskriver vi som i 29.6b.

Så kan vi aflæse centrum og derefter gøre som i 31.3a.

Hvis ligningen er $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 9$, kan vi direkte se at centrum er $(1, -5)$

31.3c Bestem røringspunkt for tangent der er parallel med tangent med oplyst røringspunkt

En cirkel har centrum $C(8, 4)$. En tangent l til cirklen har røringspunktet $P(13, 6)$.
En anden tangent m til cirklen er parallel med l.

Bestem koordinatsættet til røringspunktet Q for m.

Svar

Vi tegner den viste skitse og ser at C er midtpunkt af PQ.

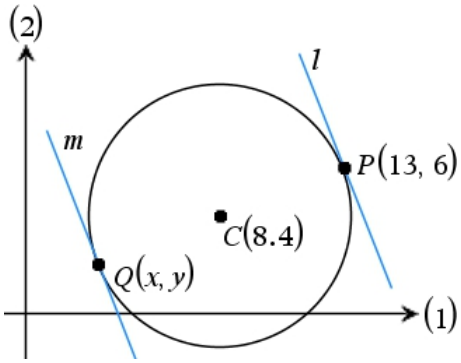
Af formlen for midtpunkt får vi

$$\frac{x+13}{2} = 8 \quad \text{og} \quad \frac{y+6}{2} = 4$$

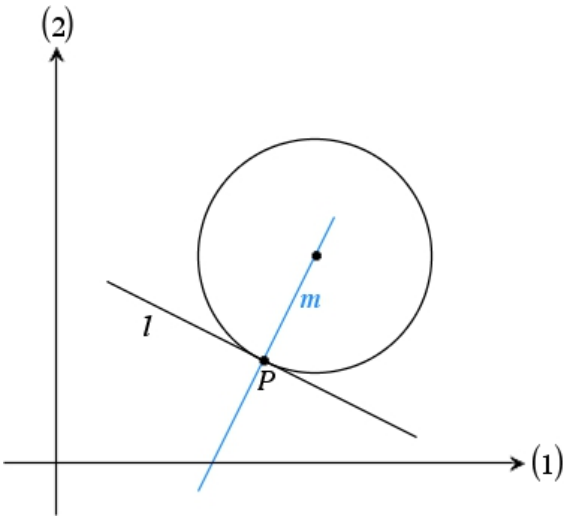
$$x + 13 = 16 \qquad y + 6 = 8$$

$$x = 3 \qquad y = 2$$

Røringspunktet for m er $\underline{\underline{Q(3, 2)}}$.



31.3d Ud fra tangents ligning og røringspunkt: Ligning for linje gennem centrum



Linjen

$$l:\ x + 2y - 8 = 0$$

er tangent til cirklen i punktet $P(4,2)$.

Vi vil bestemme en ligning for linjen m der går gennem P og centrum.

Af ligningen for l ser vi at $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ er normalvektor til l. En tangenten er vinkelret på linjen gennem røringspunkt og centrum (se 31.3), så $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ er parallel med m. En normalvektor til m er derfor vektoren

$$\widehat{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},$$

så m har følgende ligning

$$(-2)\cdot(x-4) + 1\cdot(y-2) = 0$$

der kan omskrives til

$$\underline{\underline{-2x + y + 6 = 0}}\ .$$

32. Løse opgave ved at tegne i Nspire, eksempler

32.1

To cirkler M og N er givet ved

$M: \quad x^2 + y^2 = 7{,}29$

$N: \quad (x-4)^2 + (y-1)^2 = 10{,}24$

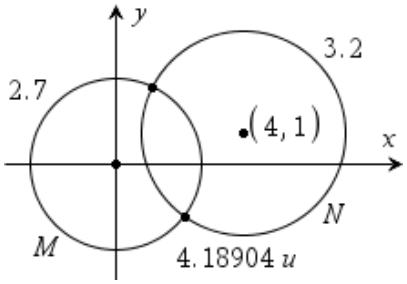
M og N skærer hinanden i to punkter.
Tegn cirklerne og bestem afstanden mellem de to punkter.

Metode:

Af ligningerne ses:

M har centrum $(0, 0)$ og radius $\sqrt{7{,}29} = 2{,}7$.

N har centrum $(4, 1)$ og radius $\sqrt{10{,}24} = 3{,}2$.



Vi kan tegne en cirkel sådan:

Vælg Geometri / Figurer / Cirkel
Klik for centrum og tast radius.

For M kan vi taste centrum præcist.
For N må vi ændre centrums koordinater til $(4, 1)$.

Vi kan finde cirklernes skæringspunkter sådan:

Vælg Geometri / Punkter og linje / Skæringspunkter
Klik på hver af cirklerne.

Vi kan måle afstanden mellem to punkter sådan:

Vælg Geometri / Målinger
Klik på hvert af punkterne.

Afstanden mellem de to punkter er $4{,}18904 \approx 4{,}18$.

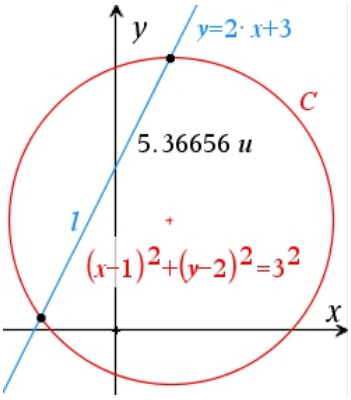
32.2

En cirkel C har centrum i punktet $P(1, 2)$ og har radius 3 .
En linje l har ligningen $y = 2x + 3$.

Vi vil bestemme længden af den del af l der ligger inden i C .

Vi får Nspire til at tegne C og l ved at indsætte i ligningsskabeloner:

$y = 2x + 3$ og $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$.



Vi får Nspire til at afsætte de to skæringspunkter ved at vælge Skæringspunkter og klikke på C og l .
Vi får Nspire til at bestemme afstanden mellem de to skæringspunkter ved at vælge Målinger / Længde og klikke på de to punkter.

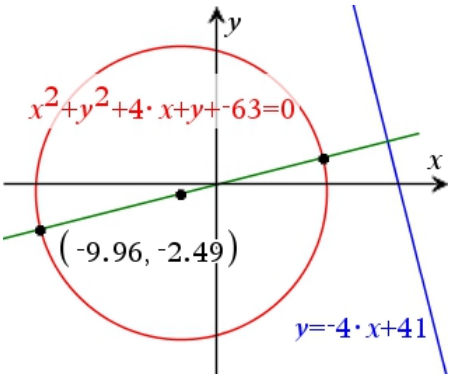
Den del af l der ligger inden i C har længden $5{,}36656 \approx 5{,}37$.

32.3

En linje l og en cirkel M er givet ved

$$l:\ y = -4x + 41$$

$$M:\ x^2 + 4x + y^2 + y - 63 = 0$$



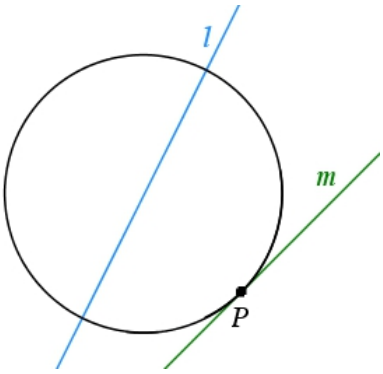
Vi vil finde koordinatsættet til det punkt på M som har størst afstand til l.

Vi får Nspire til at tegne l og M ved at indsætte i ligningsskabeloner. Så tegnes centrum automatisk.
Af Nspire-tekniske grunde afsætter vi et linjestykke på l.

Vi får Nspire til at konstruere den linje gennem centrum som er vinkelret på l,
og til at finde skæringspunkterne mellem denne linje og cirklen.
Et af disse er det søgte punkt.
Ved elektronisk aflæsning får vi at koordinatsættet er $(-9{,}96\,,-2{,}49)$.

32.4

Figuren viser en cirkel og to linjer.



De to linjer l og m er givet ved

$$l:\ y = 2x - 3$$

$$m:\ y = x - 4\ .$$

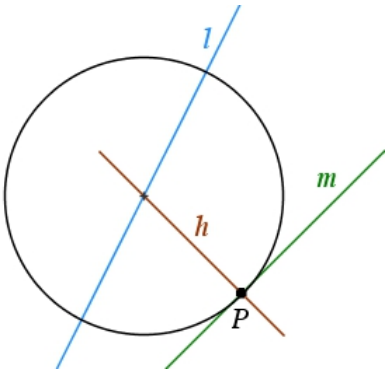
Desuden oplyses:

m er tangent til cirklen i punktet $P(5\,,1)$.
Cirklens centrum ligger på l.

Vi vil bestemme radius.

Hertil vil vi udnytte at en tangent er vinkelret på linjen gennem centrum og røringspunkt.

Vi tegner l og m ved hjælp af ligningsskabeloner.
Af Nspire-tekniske grunde tegner vi et linjestykke på m.



Vi får Nspire til at gøre følgende:

Tegne linjen h der går gennem P og er vinkelret på m.
Afsætte skæringspunktet mellem h og l.
Måle afstanden mellem skæringspunktet og P.

Skæringspunktet er centrum, så den målte afstand er radius.

Radius er $2{,}82843 \approx 2{,}83$.

A
afstand fra punkt til linje....58
afstand mellem to punkter....43
C
cirkel, bestem centrum og radius....70
cirkel, definition....67
cirkel, ligning....67
F
forskrift eller ligning....50
H
hældningskoefficient....44
hældningskoefficient fra to punkter, beregn....45
hældningskoefficient, tangens....46
hældningsvinkel....45
hældningsvinkel, linjes ligning....61
hældningsvinkel, måle....46
L
ligning eller forskrift....50
ligning for kurve....51
ligning for linje....52
linjes ligning og normalvektor....53
linjes ligning, hældningsvinkel....61
M
midtpunkt for linjestykke....42
N
normalvektor....48
normalvektor og linjes ligning....53
P
parameterfremstilling for linje....56, 59
R
retningsvektor....48
røringspunkt....73
S
skæring med andenakse....63
skæring med førsteakse....64
skæring mellem cirkel og linje....71
skæring mellem linjer....66
skæring mellem to linjer....65
T
tangent til cirkel....73
tangent, afstand til centrum....73
tangent, vinkelret....74
tegne i Nspire....77
V
vinkel mellem linjer....62
vinkelret afstand....59
vinkelret linje....60