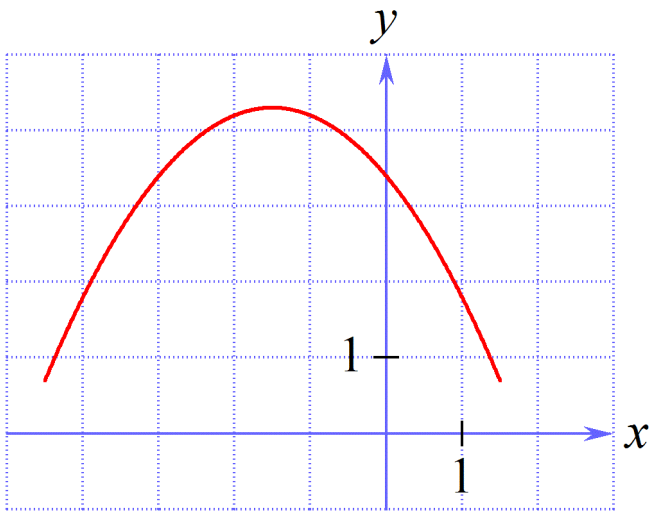
Grundlæggende funktioner

for A-niveau i stx

Udgave 5



2018 Karsten Juul

Grundlæggende funktioner for A-niveau i stx

Procent

1. Procenter på en ny måde....1
2. Vækstrate....2
3. Gennemsnitlig procent....2

Lineær vækst

4. Lineær funktion. 3
5. Lineær vækst. 3
6. Skriv ligning ud fra beskrivelse af lineær vækst. 4
7. Skriv hvad a og b i lineær forskrift fortæller....4

Eksponentiel vækst

8. Eksponentiel funktion....5
9. Eksponentiel vækst....5
10. Skriv ligning ud fra beskrivelse af eksponentiel vækst. 6
11. Skriv hvad a og b i eksponentiel forskrift fortæller. 6

Potensvækst

12. Potensfunktion....7
13. Potensvækst. 7
14. Udregn procentændring for potensfunktion. 7

Grafer

15. Graf for lineær funktion....8
16. Graf for eksponentiel funktion. 8
17. Graf for potensfunktion. 8

Regression

18. Om lineær regression....9
19. Opgave med lineær regression 9
20. Opgave med årstal og lineær regression....11
21. Fejl at bruge målt tal når vi skal bruge model 11
22. Opgave med eksponentiel regression. 12
23. Opgave med potensregression....13

Bestem forskrift ud fra ét eller to punkter

24. Bestem a og b i $y = ax+b$ ud fra to punkter. 15
25. Bestem a og b i $y = ax+b$ ud fra to punkter givet ved tekst....16
26. Bestem b i $f(x) = ax+b$ ud fra a og punkt....16
27. Bestem a i $f(x) = ax+b$ ud fra b og punkt....16
28. Bestem a og b i $y=b\cdot a^x$ ud fra to punkter....17
29. Bestem a og b i $y=b\cdot a^x$ ud fra to punkter givet ved tekst....18
30. Bestem b i $y=b\cdot a^x$ ud fra a og punkt 18
31. Bestem a i $y=b\cdot a^x$ ud fra b og punkt 18
32. $b\cdot a^x$ og $b\cdot e^{x\cdot k}$. 19
33. Bestem a og b i $y=b\cdot x^a$ ud fra to punkter 19

Fordoblings- og halveringskonstant

34. Fordoblingskonstant og halveringskonstant. 20
35. Aflæs fordoblingskonstant og halveringskonstant på graf. 21
36. Udregn fordoblings- og halveringskonstant ud fra forskrift....21
37. Skriv hvad fordoblings- og halveringskonstant fortæller. 22
38. Udregn y-værdier med T_2 og $T_{½}$. 22

Proportionale og omvendt proportionale variable

39. Proportionale variable. 23
40. Omvendt proportionale variable....24
41. Opgave hvor variable fra virkeligheden er omvendt proportionale. 25
42. Proportional/omvendt proportional med udtryk 25

Logaritmefunktioner

43. Naturlig logaritme og titalslogaritme. 26

Beviser

44. Bevis for hvad a og b i $y = ax+b$ fortæller....27
45. Bevis for hvad a og b i $y = ba^x$ fortæller. 27
46. Bevis for reglen om potensvækst. 27
47. Bevis for formler for fordoblings- og halveringskonstant....28

Polynomier

48. Polynomier og rødder. 29

Andengradspolynomier

49. Andengradspolynomium. 30
50. Toppunkt. 30
51. Diskriminant. 31
52. Betydning af a, b, c og d for grafen. 32
53. Nulpunkt. 32
54. Antal nulpunkter eller løsninger. 32
55. Løs andengradsligning. 33
56. Regel for at faktorisere andengradspolynomium 33
57. Eksempler på faktorisering af andengradspolynomium 33
58. Find forskrift for andengradspolynomium 34
59. Nulregel 35
60. Ligninger af typen $x^2 = r$ 35
61. Særlige andengradsligninger 36
62. Bevis for reglen for løsning af andengradsligninger. 36
63. Bevis for formelen for faktorisering af andengradspolynomium 37

Funktionerne sinus og cosinus

64. Funktionerne sinus og cosinus 38

Tidligere udgaver kan downloades fra http://mat1.dk/noter.htm.

Grundlæggende funktioner for A-niveau i stx, udgave 5, © 2018 Karsten Juul . Nyeste version af dette hæfte kan downloades fra http://mat1.dk/noter.htm. Det må bruges i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til kj@mat1.dk som oplyser at det bruges og oplyser hold, niveau, lærer og skole. 20/10 2018

Procent

1. Procenter på en ny måde.

1a. T er 34 % **af** 600

$$T = 34\,\%\ \text{af}\ 600$$
$$= 600 \cdot 0{,}34 \quad \leftarrow \quad \text{da } 34\,\% = \frac{34}{100} = 0{,}34$$
$$= 204$$

Du plejer nok at udregne 34 % ved at dividere med 100 og gange med 34.

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

Du er nødt til at vænne dig til at gange med 0,34 for at udregne 34 %.

1b. S er 34 % **større end** 600

$$S = 134\,\%\ \text{af}\ 600 \quad \leftarrow \quad \text{da } 100\,\% + 34\,\% = 134\,\%$$
$$= 600 \cdot 1{,}34 \quad \leftarrow \quad \text{da } 134\,\% = \frac{134}{100} = 1{,}34$$
$$= 804$$

Når du udregner det der er 34 % større end et tal, så plejer du nok at udregne 34 % af tallet og lægge til tallet.

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

Du er nødt til at vænne dig til at gange med 1,34 for at udregne det der er 34 % større.

1c. R er 34 % **mindre end** 600

$$R = 66\,\%\ \text{af}\ 600 \quad \leftarrow \quad \text{da } 100\,\% - 34\,\% = 66\,\%$$
$$= 600 \cdot 0{,}66 \quad \leftarrow \quad \text{da } 66\,\% = \frac{66}{100} = 0{,}66$$
$$= 396$$

Når du udregner det der er 34 % mindre end et tal, så plejer du nok at udregne 34 % af tallet og trække fra tallet.

I nogle opgavetyper dur denne metode ikke.

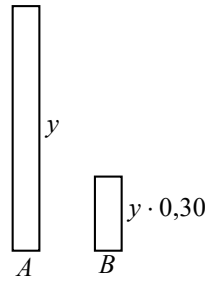
Du er nødt til at vænne dig til at gange med 0,66 for at udregne det der er 34 % mindre.

1d. Hvor mange procent er 52 af 126 ?

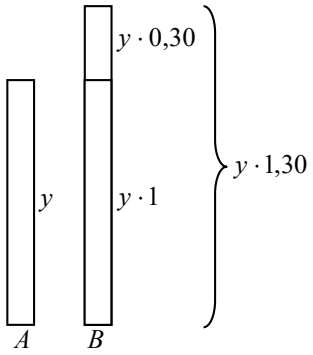
$$\frac{52}{126} = 0{,}412698 = 41{,}2698 \approx 41{,}3\,\%$$

52 er $\underline{\underline{41{,}3\,\%}}$ af 126 .

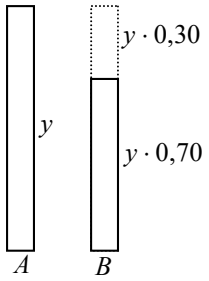
1e. Oversigt over grundlæggende procentregning



B er **30 %** af A

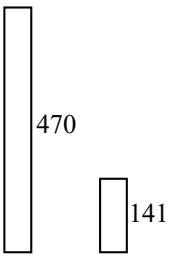


B er **30 % større** end A
B er **130 %** af A



$0{,}30 + 0{,}70 = 1$

B er **30 % mindre** end A
B er **70 %** af A



$$\frac{141}{470} = 0{,}30$$

141 er 30 % af 470

2. Vækstrate

2a. Hvad er vækstrate?

At den årlige vækstrate er 18 % betyder at størrelsen bliver 18 % større hvert år .
Når vækstraten er $r = 18\ \% = 0{,}18$, så er fremskrivningsfaktoren $a = 1+r = 1{,}18$, dvs.
hvert år bliver størrelsen ganget med 1,18 .

At den månedlige vækstrate er –3 % betyder at størrelsen bliver 3 % mindre hver måned .
Når vækstraten er $r = -3\ \% = -0{,}03$, så er fremskrivningsfaktoren $a = 1+r = 0{,}97$, dvs.
hvert år bliver størrelsen ganget med 0,97 .

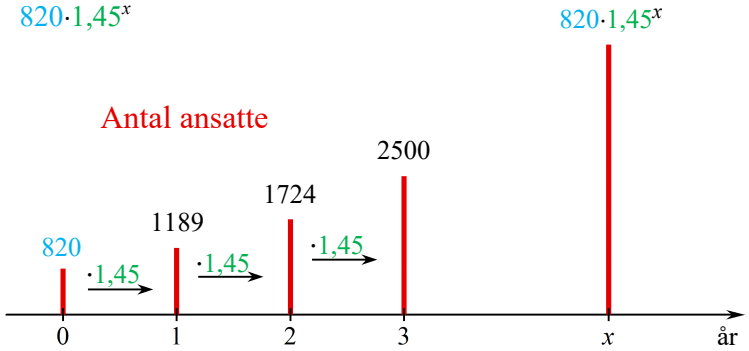
2b. Eksempel

Der gælder Antal ansatte skal stige med en årlig vækstrate på 10 %.
Dvs. Antal ansatte skal stige 10 % hvert år.

$100\,\% + 45\,\% = 145\,\% = \frac{145}{100} = 1{,}45$

I år er antal ansatte	820
Om 1 år er antal ansatte	$820 \cdot 1{,}45 = 1189$
Om 2 år er antal ansatte	$820 \cdot 1{,}45 \cdot 1{,}45 = 1724$
Om 6 år er antal ansatte	$820 \cdot 1{,}45^6 = 7621$
Om x år er antal ansatte	$820 \cdot 1{,}45^x$

$1{,}45 \cdot 1{,}45 = 1{,}45^2$



3. Gennemsnitlig procent

3a. Metode til at udregne gennemsnitlig procent

Hvis en størrelse stiger fra A til B på n år, så kan
den gennemsnitlige årlige procentvise stigning r
udregnes ved hjælp af formlen $A \cdot (1+r)^n = B$.

Hvis der står "brug modellen til at bestemme den gennemsnitlige årlige procentvise stigning",
så skal du i stedet regne som vist i ramme 22 c .

3b. Eksempel på udregning af gennemsnitlig procent

Hvis $A = 158$, $B = 221$ og $n = 10$, er $158 \cdot (1+r)^{10} = 221$.
Nspire løser denne ligning mht. r for $r > 0$ og får $r = 0{,}034126$,

dvs. Den gennemsnitlige årlige procentvise stigning er 3,41 % .

3c. Flere oplysninger om gennemsnitlig procent

Perioden behøver ikke være et år.
Fra uge 10 til 15 er indtægten steget fra 1,7 mio. kr. til 2,4 mio. kr.
Vi regner som vist ovenfor og får: Gennemsnitlig ugentlig procentvis stigning er 7,14 %.
Dette betyder: Ved at stige med 7,14 % hver uge kan et beløb stige fra 1,7 til 2,4 mio. kr.
Procentstigningen har måske ikke været den samme hver uge. Derfor ordet "gennemsnit".

3d. Advarsel om gennemsnitlig procent

Vi kan IKKE udregne gennemsnitlig procent ved at lægge procenter sammen og dividere med antallet.
Dette skyldes at procenterne ikke tages af lige store tal.

Lineær vækst

4. Lineær funktion.

En funktion f er lineær hvis den har en forskrift af typen

$$f(x) = ax + b$$

Både a og b kan være ethvert tal.
Definitionsmængden (dvs. de tal vi kan indsætte for x) er alle tal.

Tallet a i en lineær forskrift $f(x) = ax + b$ kaldes <u>hældningskoefficienten</u>.

5. Lineær vækst.

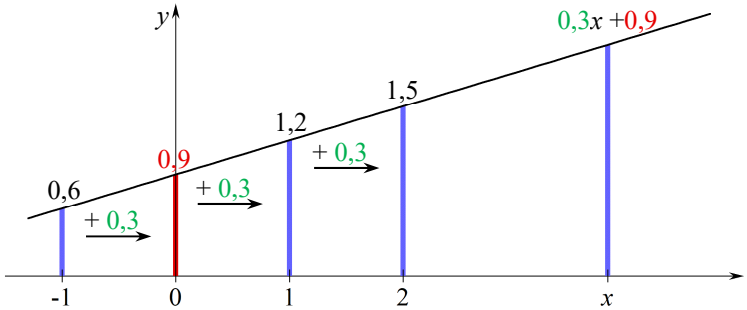
5a. Reglen for lineær vækst (reglen for hvad a i en lineær sammenhæng $y = ax + b$ fortæller):
Hver gang vi gør x én enhed større, bliver der lagt a til værdien af y.

5b. Reglen for hvad b i lineær sammenhæng $y = ax + b$ fortæller:
Når x er 0, er y lig b.

5c. Af 5b og 5a får vi: På grafen for $y = 0{,}3x+0{,}9$
ligger punkterne (-1 , 0,6), (0 , 0,9), (1 , 1,2), (2 , 1,5) osv.

Den skrå sorte linje er graf for funktionen $y = 0{,}3x + 0{,}9$.

Figuren viser at der lægges 0,3 til y-koordinaten (søjlehøjden) når x bliver 1 større.



		+1	+1	+1	
x :	–1	0	1	2	x
y :	0,6	0,9	1,2	1,5	$0{,}3x+0{,}9$
		+0,3	+0,3	+0,3	

5d. Hvis vi aflæser punkterne (0,7), (1,11), (2,15), (3,19) på en lineær graf,
kan vi af 5a og 5b slutte at $y = 4x+7$.

5e. For $y = 3x+5$ gælder: Hvis vi 10 gange gør x en større, vil der 10 gange blive lagt 3 til y, så:
Hver gang vi gør x 10 enheder større, bliver der lagt 30 til værdien af y.
Dvs. på grafen ligger punkterne (–10,–25), (0,5), (10,35), (20,65) osv.

		+10	+10	+10	
x :	–10	0	10	20	x
y :	–25	5	35	65	$3x+5$
		+30	+30	+30	

$3 \cdot 10 = 30$

6. Skriv ligning ud fra beskrivelse af lineær vækst.

Opgave

Man skal betale 10 kr. for at starte på et computerspil, og herefter skal man betale 0,50 kr. pr. minut man spiller.

Skriv en ligning vi kan bruge til at udregne prisen for at spille når vi kender antal minutter vi spiller.

Besvarelse Skal også indeholde de givne oplysninger.

Vi bruger x og y til at betegne følgende talstørrelser:

x = antal minutter
y = prisen i kr.

Husk at skrive disse oplysninger.

Så kan vi oversætte oplysningerne til følgende:

Når $x = 0$ er $y = 10$

Hver gang vi gør x én enhed større, bliver der lagt 0,50 til y.

Af reglerne for hvad a og b i $f(x) = ax + b$ fortæller, får vi:

$\underline{\underline{y = 0{,}50 \cdot x + 10}}$ når x = antal minutter og y = prisen i kr.

7. Skriv hvad *a* og *b* i lineær forskrift fortæller.

Opgave

For en cirkel på et elektronisk billede kan radius udregnes ved hjælp af formlen $y = -2 \cdot x + 80$ hvor x er temperaturen i °C og y er radius i mm.

Hvad fortæller tallene -2 og 80 om radius?

Besvarelse Skal også indeholde de givne oplysninger.

Af reglerne for hvad a og b i $y = ax + b$ fortæller, får vi:

-2 er det tal der bliver lagt til <u>radius y</u> hver gang vi gør <u>temperaturen x</u> en grad større .

Når <u>temperaturen x</u> er 0, er <u>radius y</u> lig 80 .

Dvs.:

<u>Radius er 80 mm ved 0 °C og bliver 2 mm mindre for hver grad temperaturen stiger .</u>

Eksponentiel vækst

8. Eksponentiel funktion.

En funktion f er eksponentiel hvis den har en forskrift af typen

$$f(x) = ba^x$$

a og b skal være positive tal.
Definitionsmængden (dvs. de tal vi kan indsætte for x) er alle tal.

Tallet a i en eksponentiel forskrift $f(x) = ba^x$ kaldes <u>fremskrivningsfaktoren</u>.

9. Eksponentiel vækst.

9a. Reglen for eksponentiel vækst (reglen for hvad a i eksponentiel sammenhæng $y = ba^x$ fortæller):

Hver gang vi gør x én enhed større, bliver værdien af y ganget med a.

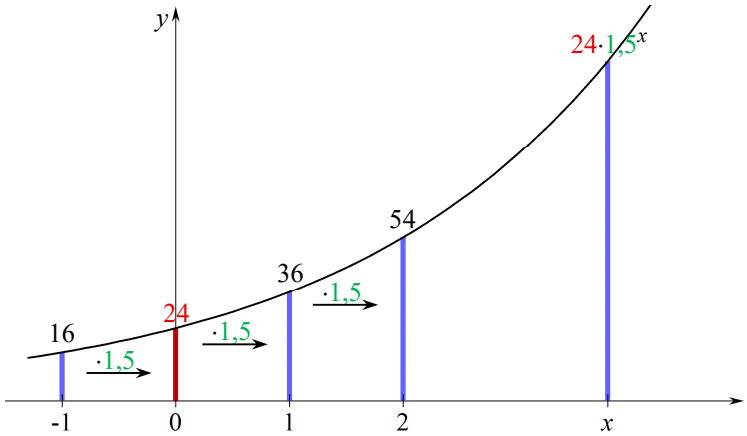
9b. Reglen for hvad b i en eksponentiel sammenhæng $y = ba^x$ fortæller:

Når x er 0, er y lig b.

9c. Af 9b og 9a får vi: På grafen for $y = 24 \cdot 1{,}5^x$ ligger punkterne (–1,16), (0,24), (1,36), (2,54) osv.

Den sorte kurve er graf for funktionen $y = 24 \cdot 1{,}5^x$.

Figuren viser at y-koordinaten (søjlehøjden) ganges med 1,5 når x bliver 1 større.



		+1		+1		+1		
x :	–1		0		1		2	x
y :	16		24		36		54	$24 \cdot 1{,}5^x$
		·1,5		·1,5		·1,5		

9d. Hvis vi aflæser punkterne (0,2), (1,6), (2,18) på en eksponentiel graf, kan vi af 9a og 9b slutte at $y = 2 \cdot 3^x$.

9e. For $y = 5{,}8 \cdot 1{,}043^x$ gælder: Hvis vi 8 gange gør x én enhed større, vil y 8 gange blive ganget med 1,043, så: Hver gang vi gør x 8 enheder større, bliver y ganget med $1{,}043^8 = 1{,}40047$.

$1{,}043^8 = 1{,}400$

		+8		+8		+8		
x :	–8		0		8		16	x
y :	4,14		5,8		8,12		11,37	$5{,}8 \cdot 1{,}043^x$
		·1,4		·1,4		·1,4		

10. Skriv ligning ud fra beskrivelse af eksponentiel vækst.

10a. Opgave Kl. 9 er der 275 celler, og hver time bliver antal celler 20 % større.
(voksende) Opstil en model der beskriver udviklingen i antallet af celler.

Svar Skal også indeholde de givne oplysninger.

x = antal timer efter kl. 9 og y = antal celler ← Husk at skrive disse oplysninger.

Når antal timer x bliver 1 større, vil antal celler y blive 20 % større, dvs. antal celler y bliver ganget med 1,20 . (Start: 100 %. Efter stigning: 120 % = 120:100 = 1,20).

Når antal timer x er 0 , er antal celler y lig 275 .

Af reglerne for hvad a og b i $y = ba^x$ fortæller, får vi $y = 275 \cdot 1{,}20^x$

10b. Opgave Den 1. maj er afgiften 860 kr. Afgiften nedsættes med 2,5 % pr. uge
(aftagende) Opstil en model der beskriver udviklingen i størrelsen af afgiften.

Svar Skal også indeholde de givne oplysninger.

x = antal uger efter 1. maj og y = afgiften i kr. ← Husk at skrive disse oplysninger.

Når antal uger x bliver 1 større, vil afgiften y blive 2,5 % mindre, dvs. afgiften y bliver ganget med 0,975 . (Start: 100 %. Efter fald: 97,5 % = 97,5:100 = 0,975).

Når antal uger x er 0 , er afgiften y lig 860 .

Af reglerne for hvad a og b i $y = ba^x$ fortæller, får vi $y = 860 \cdot 0{,}975^x$

11. Skriv hvad a og b i eksponentiel forskrift fortæller.

11a. Opgave Om en figur på skærmen gælder at $y = 300 \cdot 1{,}072^x$ hvor
(voksende) x = temperaturen og y = arealet
Hvad fortæller tallene 300 og 1,072 om figuren.

Svar Skal også indeholde de givne oplysninger.

Af reglerne for hvad a og b i $y = ba^x$ fortæller, får vi

Når temperaturen x bliver 1 grad større, bliver arealet y ganget med 1,072 , dvs. arealet y bliver 7,2 % større. (Start: 100 %. 100 %·1,072 = 107,2 %. 107,2 %–100 % = 7,2 %)

Når temperaturen x er 0 , er arealet y lig 300 .

Dvs. Når temperaturen er 0 grader, er arealet 300, og
arealet bliver 7,2 % større for hver grad temperaturen stiger.

11b. Opgave Antallet af dyr ændres sådan at $y = 270 \cdot 0{,}90^x$ hvor
(aftagende) x = antal dage efter 1. juni og y = antal dyr
Hvad fortæller tallene 270 og 0,90 om antallet af dyr.

Svar Skal også indeholde de givne oplysninger.

Af reglerne for hvad a og b i $y = ba^x$ fortæller, får vi

Når antal dage x bliver 1 større, bliver antal dyr y ganget med 0,90 , dvs. antal dyr y bliver 10 % mindre. (Start: 100 %. 100 %·0,90 = 90 %. 90 %–100 % = –10 %)

Når antal dage x er 0 , er antal dyr y lig 270 .

Dvs. Den 1. juni er antallet af dyr 270, og hver dag bliver antallet af dyr 10 % mindre.

Potensvækst

12. Potensfunktion.

En funktion f er en potensfunktion hvis den har en forskrift af typen $f(x) = bx^a$.
b skal være et positivt tal. a kan være ethvert tal.
Definitionsmængden (dvs. de tal vi kan indsætte for x) er de positive tal.
Tallet a i potensforskriften $f(x) = bx^a$ kaldes <u>eksponenten</u>.

13. Potensvækst.

13a. <u>Reglen for potensvækst:</u> Om en potenssammenhæng $y = b \cdot x^a$ gælder for et positivt tal k:

Når $\boldsymbol{x}$ bliver ganget med $\boldsymbol{k}$, så bliver $\boldsymbol{y}$ ganget med $\boldsymbol{k^a}$.

13b. <u>Eksempel</u> $y = 1{,}2 \cdot x^{0{,}7}$ Når x ganges med 1,25, så ganges y med $1{,}25^{0{,}7} = 1{,}17$.
Når x ganges med 2, så ganges y med $2^{0{,}7} = 1{,}62$.

		·1,25		·1,25				·2	
x :	1,14		1,43		1,79		3,80		7,60
y :	1,32		1,54		1,80		3,06		4,96
		$\cdot 1{,}25^{0{,}7}$		$\cdot 1{,}25^{0{,}7}$				$\cdot 2^{0{,}7}$	

14. Udregn procentændring for potensfunktion.

<u>14a. Opgave</u> (udregn ændring af y) Et dyr vokser sådan at $y = 2{,}7 \cdot x^{1{,}6}$ hvor y er vægt i gram, og x er længde i cm. Når dyret er **40 %** længere, hvor mange procent tungere er det så?

<u>Besvarelse</u> Skal også indeholde de givne oplysninger.

At x bliver 40 % større, er det samme som at x bliver ganget med 1,40 .
(Start: 100%. Efter stigning: 140%=140:100=1,40)
Når x bliver ganget med 1,40 , så bliver y ganget med

$\mathbf{1{,}40^{1{,}6}} = 1{,}71319 \approx \mathbf{1{,}71}$

Bemærk at vi IKKE sætter 1,40 ind i ligningen. Vi bruger eksponenten fra ligningen.

At y bliver ganget med 1,71 , er det samme som
at y bliver 71% større. (Start: 100%. 100%·1,71=171%. 171%–100%=71%)

Dyret bliver **71 %** tungere når det bliver 40 % længere.

<u>14b. Opgave</u> (udregn ændring af x) $f(x) = 240 \cdot x^{-0{,}51}$ hvor x er rutes længde i km, og $f(x)$ er antal deltagere. Hvor mange procent kortere skal rute være for at fordoble antal deltagere?

<u>Besvarelse</u> Skal også indeholde de givne oplysninger.

Når vi ganger x med k, bliver antallet $f(x)$ ganget med $k^{-0{,}51}$. Da vi vil gange $f(x)$ med 2, skal vi vælge k så $k^{-0{,}51} = 2$. Nspire løser denne ligning mht. k og får $k = 0{,}256889$.
At længden x skal ganges med 0,257, er det samme som at længden bliver 74,3 % mindre.
(Start: 100% . 100%·0,257 = 25,7%. 25,7%–100% = –74,3%)

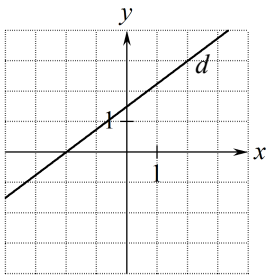
Ruten skal være 74,3 % kortere for at antal deltagere fordobles.

<u>14c. Forskellige formuleringer</u>

Det er ikke altid at der står at x eller y ændres med en procent. I stedet kan der stå at x eller y ganges med et tal. Så slipper vi for at omsætte mellem procent og tal når vi bruger 13a ovenfor.
I 14b ovenfor blev y ganget med 2. Det er det samme som at y bliver 100 % større.

Grafer

15. Graf for lineær funktion $f(x) = ax + b$

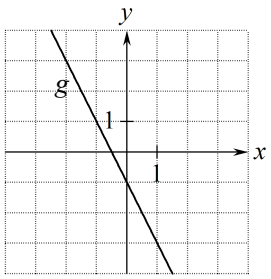


Grafen er en ret linje.

På grafen ser vi:

Definitionsmængde: alle tal dvs. alle tal kan indsættes for x.

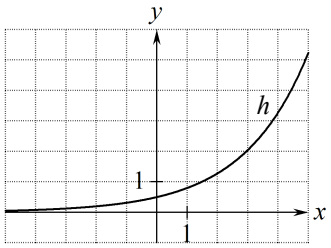
Voksende: a positiv eksempel: d
Aftagende: a negativ eksempel: g



Hvis $a=0$ i $f(x)=ax+b$ eller i $f(x)=bx^a$, eller $a=1$ i $f(x)=ba^x$, så er $f(x)=b$, så grafen er en vandret linje.

Hvis $a=1$ i $f(x)=bx^a$, er $f(x)=bx$, så grafen er en skrå linje.

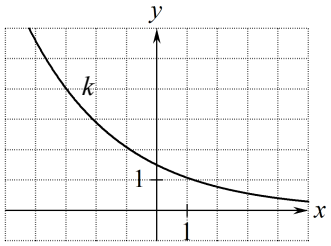
16. Graf for eksponentiel funktion $f(x) = ba^x$ hvor a og b er positive



På grafen ser vi:

Definitionsmængde: alle tal dvs. alle tal kan indsættes for x.

Voksende: a større end 1 eksempel: h
Aftagende: a mellem 0 og 1 eksempel: k



Grafen kommer vilkårlig tæt på x-aksen, men når den aldrig.

Bemærk at grafen krummer sådan: ⎛ eller sådan: ⎝
IKKE sådan: ⎛ , og IKKE sådan: ⎝

17. Graf for potensfunktion $f(x) = bx^a$ hvor b er positiv

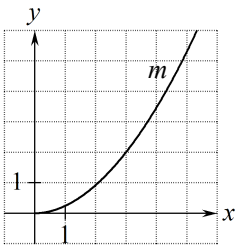
På grafen ser vi:

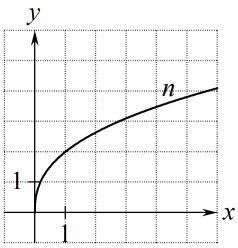
Definitionsmængde: de positive tal dvs. alle positive tal kan indsættes for x.

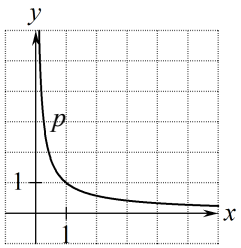
Voksende og graf krummer op: a over 1 eksempel: m
Voksende og graf krummer ned: a mellem 0 og 1 eksempel: n
Aftagende: a negativ eksempel: p

Aftagende potensfunktion: grafen kommer vilkårlig tæt på x-aksen, men når den ikke.

Bemærk at graferne IKKE krummer sådan: ⎝



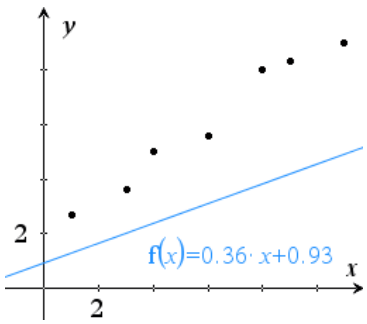




Regression

18 Om lineær regression

18.1 Oplæg til regression



Billedet viser Nspire-skærmen.
Den blå linje er graf for funktionen med den viste forskrift.

Med musen kan man flytte og dreje linjen.
Så ændres forskriften automatisk.

De sorte punkter viser målte værdier.

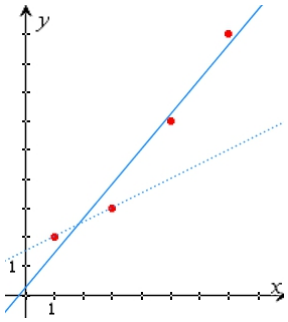
Hvis vi trækker i linjen så den passer godt med punkterne, så vil den viste forskrift være en model af den pågædende sammenhæng.

Vi kan få Nspire til at udføre lineær regression på punkterne.
Så får vi forskriften for den linje der passer bedst med punkterne.

18.2 Alle tal skal bruges

Tabel:

***x*:**	1	3	5	7
***y*:**	2	3	6	9



De fire punkter i tabellen er vist som røde prikker.

Hvis vi bruger alle punkter til at bestemme lineær graf, så får vi den fuldt optrukne linje.

Hvis vi kun bruger de to første punkter, så får vi den punkterede linje som passer dårligere med tabellen.

Man skal altså bruge alle tal i tabellen.

19 Opgave med lineær regression

19.1 Opgavens formulering

Vi har målt længde og bredde for nogle plader:

længde i cm	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5
bredde i cm	5,1	5,3	5,9	6,1	6,6

For plader af denne type gælder med god tilnærmelse $y = ax+b$
hvor y er bredde i cm, og x er længde målt i cm.

a) Benyt tabellens data til at bestemme a og b.

b) Tegn et punktplot af tabellens data.

19.2 Brugsanvisning til regression i Nspire

Vælg Indsæt / Opgave . Ved regression er det særlig vigtigt at begynde på en ny opgave så opgaverne ikke ødelægger hinanden.

Del siden op i to.
Vælg Lister og Regneark i venstre vindue.
Tast tal og søjlenavne som vist til højre.
Når du har tastet tabellen, så flyt markør til tomt felt.

	A længde	B bredde	C
=			
1	11.5	5.1	
2	12.5	5.3	
3	13.5	5.9	
4	14.5	6.1	
5	15.5	6.6	
6			

Vælg i højre vindue Diagrammer og statistik .
Klik under x-aksen og vælg søjlen med x-værdier.
Klik til venstre for y-aksen og vælg søjlen med y-værdier.

Vælg i værktøjsmenuen Undersøg data / Regression / lineær .

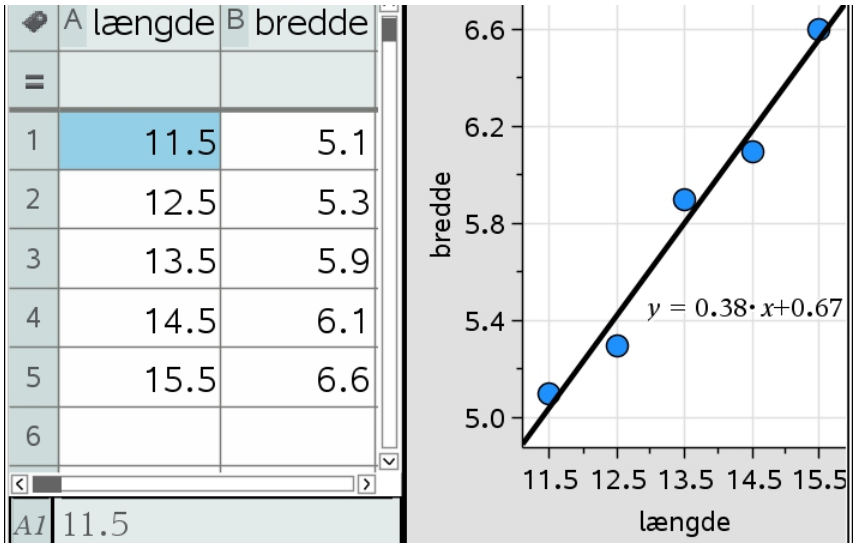
Der er automatisk fremkommet et punktplot.
Behold dette som illustration selv om der ikke i opgaven er krav om punktplot.

19.3 Besvarelsen

I Nspire kan besvarelsen se sådan ud:

Med tilnærmelse er $f(x) = a \cdot x + b$
hvor $f(x)$ er bredde (cm), og x er længde (cm).

a) Vi taster længde i x–søjle og bredde i y–søjle som vist i næste vindue.
Nspire laver **lineær regression** og får $f(x) = 0{,}38 \cdot x + 0{,}67$.
Dvs. $a = 0{,}38$ og $b = 0{,}67$.



19.4 Krav til besvarelsen

<u>Besvarelsen skal indeholde følgende oplysninger:</u>

Hvilke tal du har tastet.

Hvilke af tallene du har tastet i x-søjlen.

Hvilke af tallene du har tastet i y-søjlen.

At du får Nspire til at udføre regression.

Hvilken type regression.

20 Opgave med årstal og lineær regression

Tabellen viser antallet af boliger i et bestemt område.

Årstal	1998	2000	2002	2004	2006	2008
Antal boliger	133	170	186	218	232	247

Antallet af boliger kan med god tilnærmelse beskrives ved en ligning af typen $y = ax + b$ hvor y er antallet af boliger, og x er antal år efter 1998.

Bestem tallene a og b.
I Nspire kan besvarelsen se sådan ud: Se brugsanvisning i 19.2 .

Med tilnærmelse: $y = a \cdot x + b$, y = antal boliger, x = antal år efter 1998 .

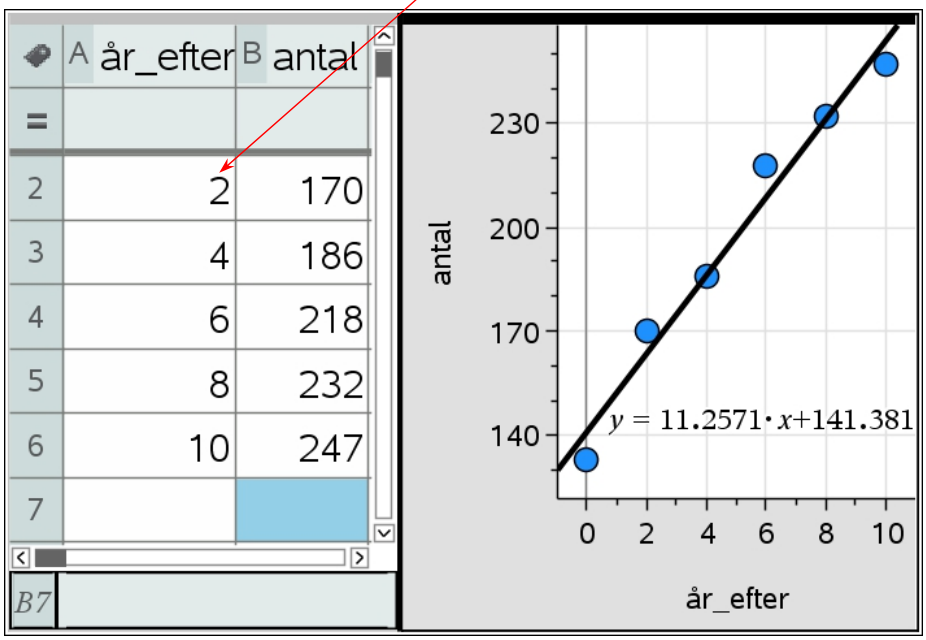
År:	1998	2000	2002	2004	2006	2008
Antal boliger:	133	170	186	218	232	247

a) Antal år efter 1998 er tastet i x–søjle og antal boliger i y–søjle som vist i næste vindue.

Nspire laver **lineær regression** og får $f(x) = 11{,}2571 \cdot x + 141{,}381$.

Dvs. a = 11,26 og b = 141,4 .

Vi taster IKKE årstal da x ikke er årstallet!



21. Fejl at bruge målt tal når vi skal bruge model.

For en type vare er y omsætning x dage efter annoncering.

Målte tal:

x:	6	12	18	24
y:	65	103	151	209

Model: $y = 8x + 12$

Opgave: Brug model til at bestemme stigning i omsætning fra 6 til 10 dage efter annoncering.

Forkert svar:
Af tabel: når $x = 6$ er $y = 65$
Af $y = 8x + 12$: når $x = 10$ er $y = 8 \cdot 10 + 12 = 92$
Stigning $92 - 65 = 27$

Det er en fejl at bruge tallet fra tabellen da vi skal besvare spørgsmålet ved hjælp af modellen.

Rigtigt svar:
Af $y = 8x + 12$: når $x = 6$ er $y = 8 \cdot 6 + 12 = 60$
Af $y = 8x + 12$: når $x = 10$ er $y = 8 \cdot 10 + 12 = 92$
Stigning $92 - 60 = 32$

22 Opgave med eksponentiel regression

22.1 Opgavens formulering

Tabellen viser antallet af indbyggere i et område i perioden 2000-2005.

Årstal	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Antal	80	110	140	170	200	240

I en model beskrives antallet ved en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$
hvor $f(x)$ er antallet af indbyggere, og x er antal år efter 2000.

a) Bestem tallene a og b ved eksponentiel regression.

22.2 Brugsanvisning til opgave 22.1

Start på ny opgave i Nspire.

Vælg et vindue af typen Lister og regneark .
Navngiv en søjle i søjlens øverste grå felt (som vist i 22.3) og tast x-værdier i den.
Navngiv en søjle og tast y-værdier i den (se 22.3).

Tilføj et vindue af typen Diagrammer og statistik .
Klik under x-aksen og vælg søjlen med x-værdier.
Klik til venstre for y-aksen og vælg søjlen med y-værdier.

Vælg i værktøjsmenuen Undersøg data / Regression / eksponentiel .
Nu ses forskrift og punktplot og graf (se 22.3).

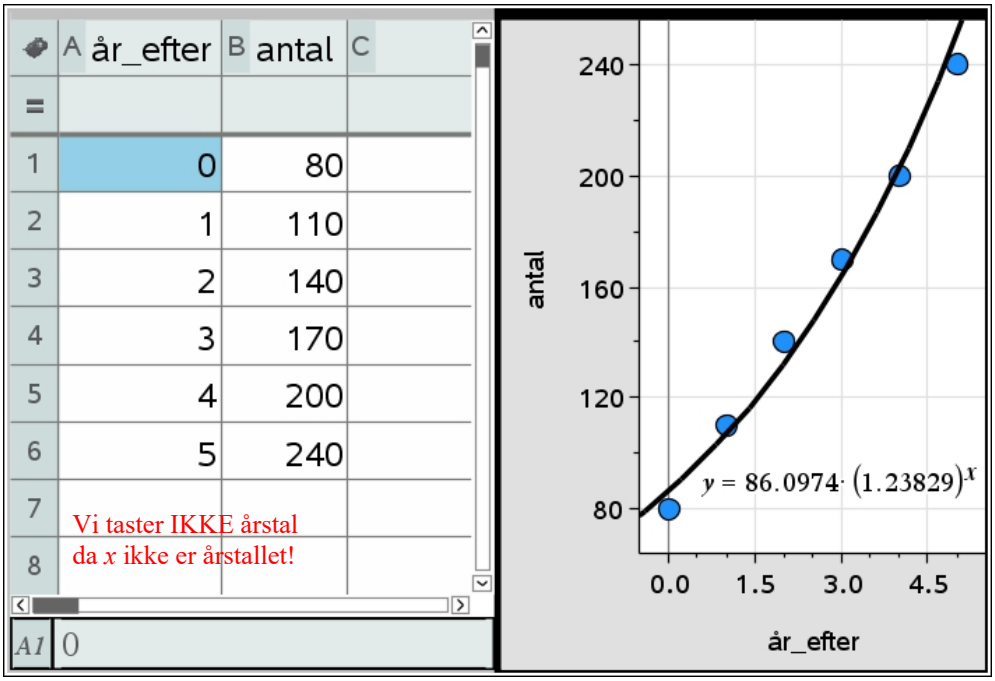
22.3 Besvarelse af opgave 22.1

Udregnet:	År efter 2000:	0	1	2	3	4	5
Oplyst:	Årstal:	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Oplyst:	Antal indbyggere:	80	110	140	170	200	240

I en model beskrives antallet ved en eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$
hvor $f(x)$ er antallet af indbyggere, og x er antal år efter 2000.
Vi åbner et regneark og taster år efter 2000 i x-søjlen, og antal indbyggere i y-søjlen (se næste vindue). Ud fra dette tegner Nspire et punktplot (se næste vindue).

a) Nspire laver eksponentiel regression ud fra de to søjler og får forskriften

$$f(x) = 86{,}0974 \cdot 1{,}23829^x \quad \text{dvs.} \quad a = 1{,}23829 \quad \text{og} \quad b = 86{,}0974 .$$



22.4. Brug modellen til at bestemme den årlige gennemsnitlige vækstrate

Da der står at vi skal bruge modellen, kan vi skrive sådan:

Hvert år ganges antal med $a \approx 1{,}037$ ifølge modellen.
$1{,}037 = 103{,}7\ \%$ og $103{,}7\ \% - 100\ \% = 3{,}7\ \%$.
Den årlige gennemsnitlige vækstrate er 3,7 % .

Hvis vi skal bruge startværdi og slutværdi til at udregne gennemsnitlig vækstrate, så kan vi gøre som vist i ramme 3.

23 Opgave med potens-regression

23.1 Opgavens formulering

De målte tal i tabellen viser for et bestemt dyr sammenhængen mellem alder og længde .

Alder i døgn	10	15	20	30	40	50
Længde i mm	43	60	74	105	132	155

Sammenhængen kan med god tilnærmelse beskrives med en funktion af typen $y = b \cdot x^a$
hvor y er længde (målt i mm), og x er alder (målt i døgn).

a) Bestem a og b .

23.2 Brugsanvisning

Da der er mere end to målte punkter, skal vi bruge regression.

Del siden op i to. Vælg Lister og Regneark i venstre vindue.
Se på næste side hvordan du skal taste tal og søjlenavne.

Når du har tastet tabellen, så flyt markør til tomt felt.

Vælg i højre vindue Diagrammer og statistik .
Klik under x-aksen og vælg søjlen med x-værdier.
Klik til venstre for y-aksen og vælg søjlen med y-værdier.

Vælg i værktøjsmenuen Undersøg data / Regression / potens .
Der er automatisk fremkommet et punktplot. Behold dette som illustration selv om der ikke i opgaven er krav om punktplot.

23.3 Besvarelse af opgave 23.1

I Nspire kan besvarelsen se sådan ud:

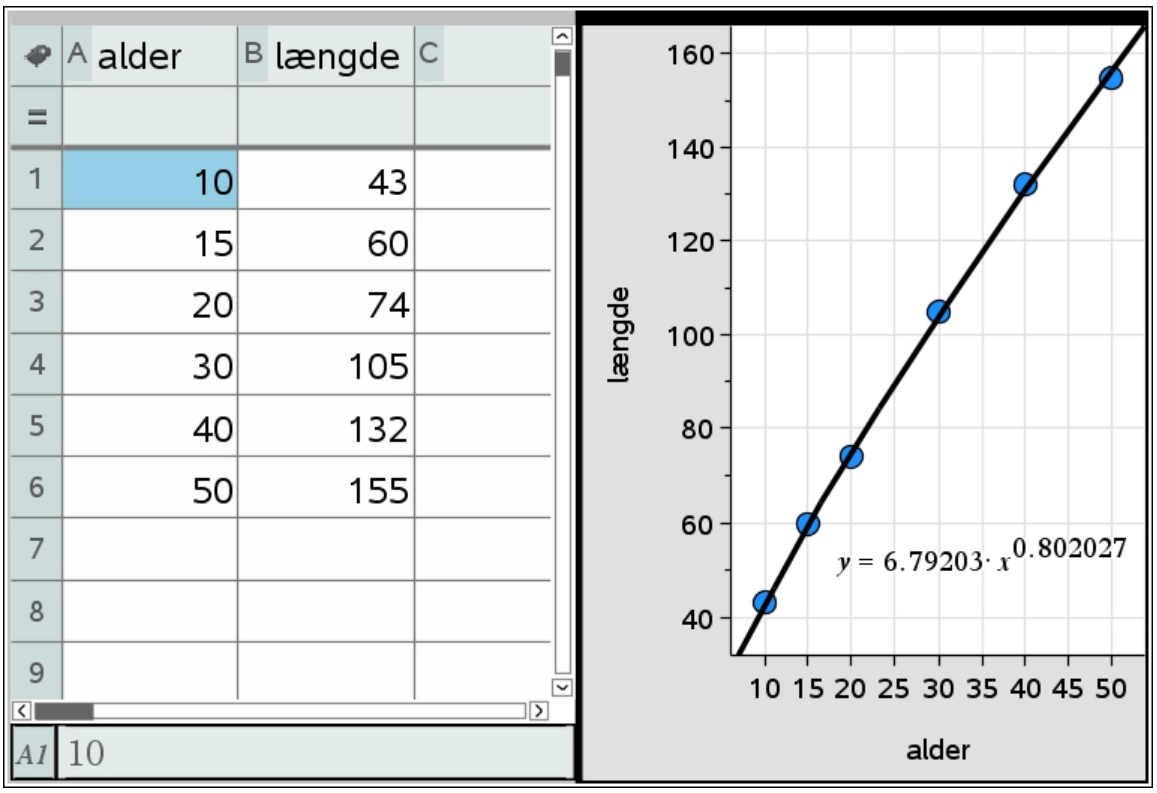
Med tilnærmelse er $f(x) = b \cdot x^a$
hvor $f(x)$ er længde (mm), og x er alder (døgn) .

Vi taster alder i x–søjle og længde i y–søjle som vist i næste vindue.

Nspire laver **potens–regression** og får $f(x) = 6{,}79203 \cdot x^{0{,}802027}$.

Dvs. $a = 0{,}802$ og $b = 6{,}79$.

Besvarelsen fortsætter på næste side!



	A alder	B længde	C
=			
1	10	43	
2	15	60	
3	20	74	
4	30	105	
5	40	132	
6	50	155	
7			
8			
9			

A1 10

Bestem forskrift ud fra to punkter

24. Bestem a og b i $y = ax+b$ ud fra to punkter.

24a. Opgave Punkterne $(x,y)=(-7,\ 1)$ og $(x,y)=(8,\ 4)$ ligger på grafen for sammenhængen $y = ax+b$. Find tallene a og b.

Oplysningen om de to punkter er nogle gange skrevet sådan: $f(-7)=1$ og $f(8)=4$.

Metode 1: Vi indsætter i formler for a og b:

Af $(x_1,y_1)=(-7,\ 1)$ og $(x_2,y_2)=(8,\ 4)$ får vi

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{y_2-y_1}}{\boldsymbol{x_2-x_1}} = \frac{4-1}{8-(-7)} = \frac{3}{15} = 0{,}2$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y_1-a\cdot x_1} = 1-0{,}2\cdot(-7) = 2{,}4$$

Metode 2: Nspire løser ligningssystem:

Da $(x,y)=(-7,\ 1)$ og $(x,y)=(8,\ 4)$ ligger på grafen, er

$1 = a\cdot(-7)+b$

$4 = a\cdot 8+b$

Nspire løser dette ligningssystem mht. a og b og får

$a = 0{,}2$ og $b = 2{,}4$

Nspire: solve(1=a· -7+b and 4=a· 8+b,a,b)

Metode 3: Vi løser ligningssystem uden hjælpemidler:

Da $(x,y)=(-7,\ 1)$ og $(x,y)=(8,\ 4)$ ligger på grafen, er

(1) $1 = a\cdot(-7)+b$

(2) $4 = a\cdot 8+b$

Af (1) får vi

(3) $1+7a = b$

Vi indsætter dette i (2) og får

$4 = 8a+(1+7a)$

hvoraf

$3 = 15a$

$\frac{3}{15} = \frac{15a}{15}$

$0{,}2 = a$

Dette indsætter vi i (3) og får

$1+7\cdot 0{,}2 = b$

hvoraf

$2{,}4 = b$

Metode 4: Nspire laver lineær regression:

Nspire laver lineær regression på punkterne $(x,y)=(-7,\ 1)$ og $(x,y)=(8,\ 4)$ og får $y = 0{,}2x+2{,}4$

24b. Konklusion

Hvis der står at vi skal **finde a og b**, så skal vi skrive konklusionen sådan:

$\underline{\underline{a = 0{,}2}}$ og $\underline{\underline{b = 2{,}4}}$

Hvis der står at vi skal **finde forskriften** for f, så skal vi skrive konklusionen sådan:

$\underline{\underline{f(x) = 0{,}2x+2{,}4}}$

25. Bestem a og b i $y = ax+b$ ud fra to punkter givet ved tekst.

Opgave

Der er en lineær sammenhæng mellem temperatur og overskud.

Når temperaturen er $-3\,°\text{C}$, er overskuddet 12 mio. kr.
Når temperaturen er $5\,°\text{C}$, er overskuddet 28 mio. kr.

Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem temperatur og overskud.

Besvarelse

Vi sætter

x = temperatur (målt i °C)
y = overskud (målt i mio. kr.)

Det er nødvendigt også at skrive dette!

Der er oplyst to x-værdier og tilhørende y-værdier:

Til $x_1 = -3$ svarer $y_1 = 12$.
Til $x_2 = 5$ svarer $y_2 = 28$.

Da sammenhængen er lineær, er den søgte ligning på formen $y = ax + b$, og

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{28-12}{5-(-3)} = \frac{16}{8} = 2$$

$$b = y_1 - a \cdot x_1 = 12 - 2 \cdot (-3) = 18$$

Alle fire metoder fra ramme 24 kan bruges her.

Dvs.:

Ligningen $\underline{\underline{y = 2x + 18}}$ viser sammenhængen mellem

temperaturen x i °C og overskuddet y i mio. kr.

26. Bestem b i $f(x) = ax+b$ ud fra a og punkt.

Når punktet $(4, 35)$ ligger på grafen for funktionen $f(x) = 8x + b$,
så kan vi finde b sådan:

Vi indsætter 4 for x og 35 for $f(x)$ i $f(x) = 8x + b$ og får $35 = 8 \cdot 4 + b$.
Vi løser denne ligning mht. b og får $b = 3$.

Dvs. $\underline{\underline{b = 3}}$

27. Bestem a i $f(x) = ax+b$ ud fra b og punkt.

Når punktet $(5, 8)$ ligger på grafen for sammenhængen $f(x) = ax + 18$,
så kan vi finde a sådan:

Vi indsætter 5 for x og 8 for $f(x)$ i $f(x) = ax + 18$ og får $8 = a \cdot 5 + 18$.
Vi løser denne ligning mht. a og får $a = -2$.

Dvs. $\underline{\underline{a = -2}}$

28. Bestem a og b i $y = b \cdot a^x$ ud fra to punkter.

28a. Opgave Punkterne $(x, y) = (4, 3)$ og $(x, y) = (7, 24)$ ligger på grafen for sammenhængen $y = b \cdot a^x$. Udregn tallene a og b.

Oplysningen om de to punkter er nogle gange skrevet sådan: $f(4) = 3$ og $f(7) = 24$.

Metode 1: Vi sætter ind i formler for a og b

Af $(x_1, y_1) = (4, 3)$ og $(x_2, y_2) = (7, 24)$ får vi

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[7-4]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{3}{2^4} = \frac{3}{16}$$

Metode 2: Vi løser ligningssystem med elektronisk hjælpemiddel

Punkterne $(x, y) = (4, 3)$ og $(x, y) = (7, 24)$ ligger på grafen for $y = b \cdot a^x$, så

$3 = b \cdot a^4$ og $24 = b \cdot a^7$

Nspire løser dette ligningssystem mht. a og b og får

$a = 2$ og $b = \frac{3}{16}$

Nspire: solve$\left(3 = b \cdot a^4 \text{ and } 24 = b \cdot a^7, a, b\right)$

Metode 3: Vi løser ligningssystem uden hjælpemidler

Punkterne $(x, y) = (4, 3)$ og $(x, y) = (7, 24)$ ligger på grafen for $y = b \cdot a^x$, så

$3 = b \cdot a^4$ og $24 = b \cdot a^7$

Vi dividerer højre ligning med venstre:

$$\frac{24}{3} = \frac{b \cdot a^7}{b \cdot a^4} \qquad \frac{a^7}{a^4} = a^{7-4} \quad \text{da} \quad \frac{a^7}{a^4} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}$$

Når vi forkorter de to brøker, får vi

$8 = a^3$

så $a = \sqrt[3]{8}$

dvs. $a = 2$

Vi indsætter denne værdi af a i ligningen $3 = b \cdot a^4$ og får $3 = b \cdot 2^4$

Ved at dividere begge sider med 2^4 får vi $\frac{3}{2^4} = b$

så $b = \frac{3}{16}$

Metode 4: Vi bruger eksponentiel regression

Nspire laver eksponentiel regression på punkterne $(x, y) = (4, 3)$ og $(x, y) = (7, 24)$ og får $a = 2$ og $b = 0{,}1875$

28b. Konklusion

Hvis der står at vi skal **finde a og b**, så skal vi skrive konklusionen sådan:

$a = 2$ og $b = 0{,}1875$ eller sådan: $a = 2$ og $b = \frac{3}{16}$

Hvis der står at vi skal **finde forskriften** f or f, så skal vi skrive konklusionen sådan:

$f(x) = 0{,}1875 \cdot 2^x$ eller sådan: $f(x) = \frac{3}{16} \cdot 2^x$

29. Bestem a og b i $y = b \cdot a^x$ ud fra to punkter givet ved tekst.

Opgave En plantes vægt kan med god tilnærmelse beskrives med en funktion af typen $y = b \cdot a^x$ hvor y er vægt i kg, og x er år efter udplantning
Efter 2 år er vægten 1,60 kg. Efter 5 år er vægten 4,10 kg.

Udregn a og b.

Svar $y = b \cdot a^x$ hvor y er vægt i kg, og x er år efter udplantning.

Der står: Efter 2 **år** er **vægten** 1,60 kg. Efter 5 **år** er **vægten** 4,10 kg.

Dvs. Når $x = 2$ er $y = 1{,}60$. Når $x = 5$ er $y = 4{,}10$.

Vi indsætter punkterne $(x_1, y_1) = (2, 1{,}60)$ og $(x_2, y_2) = (5, 4{,}10)$ i formlerne for a og b og lader Nspire udregne udtrykkene:

$$a = \sqrt[x2-x1]{\frac{y2}{y1}} = \sqrt[5-2]{\frac{4.1}{1.6}} = 1.36843$$

$$b = \frac{y1}{a^{x1}} = \frac{1.6}{(1.36843)^2} = 0.854427$$

Dvs. $a = 1{,}368$ og $b = 0{,}854$.

30. Bestem b i $f(x) = b \cdot a^x$ ud fra a og punkt.

Når punktet $(2, 36)$ ligger på grafen for funktionen $f(x) = b \cdot 3^x$,
så kan vi finde b sådan:

Når vi indsætter 2 for x i forskriften, så er resultatet 36, dvs. $b \cdot 3^2 = 36$.
Nspire løser ligningen $b \cdot 3^2 = 36$ mht. b og får $\underline{\underline{b = 4}}$.

$\text{solve}(b \cdot 3^2 = 36, b)$ ▸ $b=4$

31. Bestem a i $f(x) = b \cdot a^x$ ud fra b og punkt.

Når punktet $(3, 40)$ ligger på grafen for funktionen $f(x) = 5 \cdot a^x$,
så kan vi finde a sådan:

Når vi indsætter 3 for x i forskriften, så er resultatet 40, dvs. $5 \cdot a^3 = 40$.
Nspire løser ligningen $5 \cdot a^3 = 40$ mht. a og får $\underline{\underline{a = 2}}$.

$\text{solve}(5 \cdot a^3 = 40, a)$ ▸ $a=2$

32. $b \cdot a^x$ og $b \cdot e^{x \cdot k}$.

30a. Regel

Vi kan skrive en eksponentiel forskrift på to måder: $f(x) = b \cdot a^x$ og $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$

Vi kan omskrive fra den ene måde til den anden ved hjælp af formlen: $a = e^k$

30b. Opgave Skriv $f(x) = 20 \cdot 0{,}76^x$ på formen $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$.

Svar $a = e^k$

$0{,}76 = e^k$

Nspire løser denne ligning mht. k og får $k = -0{,}274437$.

$\underline{\underline{f(x) = 20 \cdot e^{-0{,}274x}}}$

Almindeligt e kan ikke bruges!

Nspire: solve(0.76=e^k,k) ▸ k=-0.274437

30c. Opgave Skriv $f(x) = 3{,}8 \cdot e^{1{,}4x}$ på formen $f(x) = b \cdot a^x$.

Svar $a = e^k$

$a = e^{1{,}4}$

Nspire udregner højre side og får $a = 4{,}0552$.

$\underline{\underline{f(x) = 3{,}8 \cdot 4{,}06^x}}$

33. Bestem a og b i $y = b \cdot x^a$ ud fra to punkter.

33a. Opgave Punkterne $(x, y) = (2, 5)$ og $(x, y) = (3, 7)$ ligger på grafen for sammenhængen $y = b \cdot x^a$. Udregn tallene a og b .

Oplysningen om de to punkter er nogle gange skrevet sådan: $f(2) = 5$ og $f(3) = 7$.

Metode 1: Vi løser ligningssystem med elektronisk hjælpemiddel

Punkterne $(x, y) = (2, 5)$ og $(x, y) = (3, 7)$ ligger på grafen for $y = b \cdot x^a$, så

$5 = b \cdot 2^a$ og $7 = b \cdot 3^a$

Nspire løser dette ligningssystem mht. a og b og får

$a = \underline{\underline{0{,}829843}}$ og $b = \underline{\underline{2{,}81295}}$

Nspire: solve(5=b· 2^a and 7=b· 3^a,a,b)

Metode 2: Vi bruger potensregression

Nspire laver potensregression på punkterne $(x, y) = (2, 5)$ og $(x, y) = (3, 7)$ og får

$a = \underline{\underline{0{,}829843}}$ og $b = \underline{\underline{2{,}81295}}$

33b. Konklusion

Hvis der står at vi skal **finde a og b** , så skal vi skrive konklusionen sådan:

$a = \underline{\underline{0{,}829843}}$ og $b = \underline{\underline{2{,}81295}}$

Hvis der står at vi skal **finde forskriften** for f, så skal vi skrive konklusionen sådan:

$\underline{\underline{f(x) = 2{,}81295 \cdot x^{0{,}829843}}}$

Fordoblings- og halveringskonstant

34. Fordoblingskonstant og halveringskonstant.

34a. Oplæg

Tabellen viser hvordan højden af en plante er vokset eksponentielt.

Antal uger efter køb:	0	1	2	3	4	5	6
Højde i cm:	12	15	19	24	30	38	48

I tabellen ser vi:

1 uge efter købet er højden 15 cm.
3 uger senere er højden 30 cm, som er det dobbelte af 15 cm.

2 uger efter købet er højden 19 cm.
3 uger senere er højden 38 cm, som er det dobbelte af 19 cm.

Uanset hvornår vi starter, så vil der gå 3 uger før højden er fordoblet.

Man siger at højdens fordoblingskonstant er 3 uger.

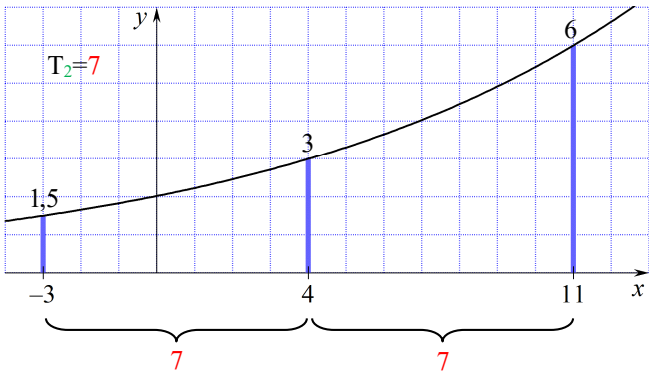
34b En eksponentielt voksende sammenhæng har en fordoblingskonstant T_2.
Når x-værdien bliver T_2 enheder større, så bliver y-værdien fordoblet.

34c En eksponentielt aftagende sammenhæng har en halveringskonstant $T_{\frac{1}{2}}$.
Når x-værdien bliver $T_{\frac{1}{2}}$ enheder større, så bliver y-værdien halveret.

34d. Eksempel

$T_2 = 7$, dvs.
y (søjlehøjden) fordobles
når x bliver 7 større.

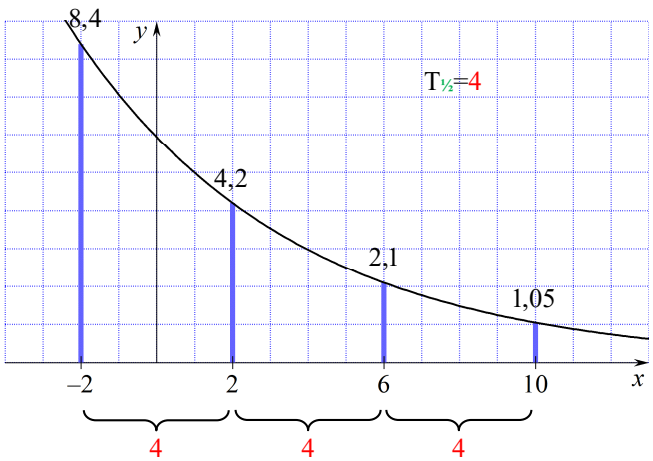
		+7	+7	+7
x :	–3	4	11	18
y :	1,5	3	6	12
		·2	·2	·2



34e. Eksempel

$T_{½} = 4$, dvs.
y (søjlehøjden) halveres
når x bliver 4 større.

		+4	+4	+4
x :	–2	2	6	10
y :	8,4	4,2	2,1	1,05
		·½	·½	·½

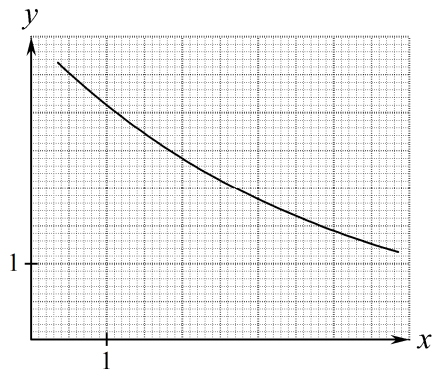


35. Aflæs fordoblingskonstant og halveringskonstant på graf.

Opgave (halvering)

Figuren viser grafen for en eksponentielt aftagende sammenhæng.

Hvad er halveringskonstanten for denne sammenhæng?



Besvarelse

Resultatet bliver det samme uanset hvilken x-værdi vi starter med. Vi kan f.eks. starte med $x = 1$:

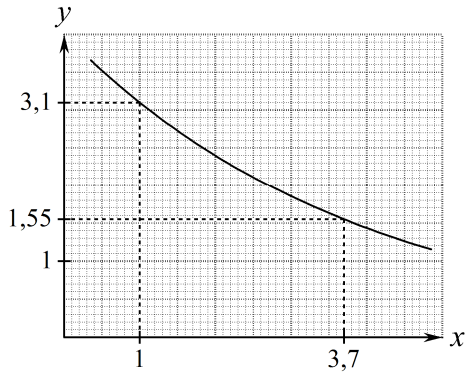
Når $x = 1$ er $y = 3{,}1$ (se figur)

Det halve af $3{,}1$ er $\frac{3{,}1}{2} = 1{,}55$.

Når $y = 1{,}55$ er $x = 3{,}7$ (se figur)

For at halvere y skal vi altså øge x med $3{,}7 - 1 = 2{,}7$ så

halveringskonstanten er $\underline{\underline{2{,}7}}$.



Bemærkning (fordobling)

Hvis funktionen er eksponentielt voksende, kan fordoblingskonstanten aflæses på næsten samme måde: Vi finder to grafpunkter hvor y-koordinaten til det ene er 2 gange y-koordinaten til det andet. Forskellen på de to punkters x-koordinater er fordoblingskonstanten.

36. Udregn fordoblings- og halveringskonstant ud fra forskrift.

For funktionen $f(x) = b \cdot a^x$ gælder:

36a. Regel Hvis f er voksende ($a>1$), er $T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$

36b. Regel Hvis f er aftagende ($0<a<1$), er $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}$

For funktionen $f(x) = b \cdot e^{kx}$ gælder:

36c. Regel Hvis f er voksende ($k>0$), er $T_2 = \frac{\ln(2)}{k}$

36d. Regel Hvis f er aftagende ($k<0$), er $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{k}$

36e. Eksempel Hvis $f(x) = 12{,}5 \cdot 1{,}063^x$ er $T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}063)} = 11{,}3454 \approx 11{,}3$

36f. Eksempel Hvis $f(x) = 400 \cdot 0{,}85^x$ er $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(0{,}85)} = 4{,}26502 \approx 4{,}27$

36g. Eksempel Hvis $f(x) = 0{,}622 \cdot e^{0{,}25x}$ er $T_2 = \frac{\ln(2)}{0{,}25} = 2{,}77259 \approx 2{,}77$

36h. Eksempel Hvis $f(x) = 3{,}08 \cdot e^{-1{,}3x}$ er $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-1{,}3} = 0{,}53319 \approx 0{,}533$

37. Skriv hvad fordoblings- og halveringskonstant fortæller.

37 a. Opgave

Der er en eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ mellem de variable

x = længden (i cm)
y = omkredsen (i cm)

Vi har fået at vide at

fordoblingskonstanten er 7 .

Hvad fortæller dette om længde og omkreds.

Besvarelse

At fordoblingskonstanten er 7 betyder:

Når ***x*-værdien** bliver 7 enheder større, så bliver ***y*-værdien** fordoblet.

Dvs:

Når **længden** bliver 7 cm større, så bliver **omkredsen** fordoblet.

Hvis vi i stedet havde fået at vide at

halveringskonstanten er 7

ville svaret være

Når **længden** bliver 7 cm større, så bliver **omkredsen** halveret.

---

37 b. Fordoblings/halverings-tid når der kun er én *y*-værdi hvert år (eller en anden tidspeiode).

Opgave: Hvert år opgøres antal fugle pr. 1. august. Der gælder med tilnærmelse

$f(x) = 4300 \cdot 1{,}35^x$

hvor $f(x)$ er antal fugle pr. 1. august, og x er antal år efter 2002.
Bestem fordoblingstiden for antal fugle pr. 1. august.

Med metoden fra ramme 36 udregner vi at "fordoblingstiden er 2,3 år" . Dette er et korrekt svar.
Det er en **fejl** at skrive: "Efter 2,3 år er antal fugle det dobbelte" , da der kun er én y-værdi hvert år.

38. Udregn y-værdier med T_2 og $T_{½}$.

Når der om en eksponentiel funktion f er oplyst at $f(4) = 9$ og at $T_2 = 3$,
så kan vi udregne $f(10)$ sådan:

		+3	+3	
x :	4	7	10	
$f(x)$:	9	18	36	
		·2	·2	

$f(10) = 36$

Når der om en eksponentiel funktion f er oplyst at $f(0) = 12$ og at halveringskonstanten er 1
så kan vi udregne $f(3)$ sådan:

$f(1) = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$, $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ og $f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1{,}5$.

$f(3) = 1{,}5$

Proportionale og omvendt proportionale variable

39. Proportionale variable.

39a. Definition

Om to variable x og y siger vi at

y er proportional med x

hvis

$y = k \cdot x$ og k er det samme tal for alle værdier af x .

39b. Opgave

De to variable x og y er proportionale.
Tabellen viser nogle sammenhørende værdier af x og y.
Hvad er y når x er 10?
Hvad er x når y er 15?

x	24	36	92
y	18	27	69

Besvarelse

I opgaven står ikke at vi skal udregne k.
Vi skal selv vide at vi skal udregne k først,
så vi kan bruge k til at udregne de tal der er spurgt om.

Udregne k:

Da x og y er proportionale, er der et tal k så

(1) $y = k \cdot x$.

I tabellen ser vi at når $x = 24$ er $y = 18$.

Dette indsætter vi i (1):

$18 = k \cdot 24$

Vi kan løse ligningen ved at dividere begge sider med 24.

Denne ligning løser vi mht. k og får

$0{,}75 = k$

Dette tal indsætter vi i (1) og får ligningen for sammenhængen mellem x og y:

(2) $\underline{y = 0{,}75 \cdot x}$

Udregne y:

For at finde y når x er 10, sætter vi x til 10 i (2):

$y = 0{,}75 \cdot 10$

Heraf får vi $y = 7{,}5$ så

y er $\underline{\underline{7{,}5}}$ når x er 10

Udregne x:

For at finde x når y er 15, sætter vi y til 15 i (2):

$15 = 0{,}75 \cdot x$

Vi kan løse ligningen ved at dividere begge sider med 0,75.

Vi løser denne ligning mht. x og får

$20 = x$

så

x er $\underline{\underline{20}}$ når y er 15

40. Omvendt proportionale variable.

40a. Definition

Om to variable x og y siger vi at

y er <u>omvendt proportional</u> med x

hvis

$y = \frac{k}{x}$ og k er det samme tal for alle værdier af x .

40b. Opgave

De to variable x og y er omvendt proportionale.
Hvad skal der stå på de tomme pladser i tabellen?

x		12	36
y	9	6	

Besvarelse

I opgaven står ikke at vi skal udregne k.
Vi skal selv vide at vi skal udregne k først,
så vi kan bruge k til at udregne de tal der er spurgt om.

<u>Udregne k :</u>

Da x og y er omvendt proportionale, er der et tal k så

(1) $y = \frac{k}{x}$.

I tabellen ser vi at når $x = 12$ er $y = 6$. Dette indsætter vi i (1):

$$6 = \frac{k}{12}$$

Vi kan løse ligningen ved at gange begge sider med 12.

Vi løser denne ligning mht. k og får

$$72 = k$$

Dette tal indsætter vi i (1) og får ligningen for sammenhængen mellem x og y:

(2) $\underline{y = \frac{72}{x}}$

<u>Udregne y :</u>

For at finde y når x er 36, sætter vi x til 36 i (2):

$$y = \frac{72}{36}$$

Heraf får vi $y = 2$ så

y er $\underline{\underline{2}}$ når x er 36

<u>Udregne x :</u>

For at finde x når y er 9, sætter vi y til 9 i (2):

$$9 = \frac{72}{x}$$

Vi kan løse ligningen ved først at gange begge sider med x og derefter at dividere begge sider med 9.

Vi løser denne ligning mht. x og får

$$x = 8$$

så

x er $\underline{\underline{8}}$ når y er 9

41. Opgave hvor variable fra virkeligheden er omvendt proportionale.

Opgave

På en skærm er et rektangel som vi kan ændre ved at trække med musen.
Højde og bredde er omvendt proportionale.
Højden er 2,5 når bredden er 8

Hvad er højden når bredden er 3,2 ?

Besvarelse

Vi kalder højden for h og bredden for b.

Udregne k :

Da h er omvendt proportional med b, findes et tal k så

$$h = \frac{k}{b}$$

Da $h = 2{,}5$ når $b = 8$ må

$$2{,}5 = \frac{k}{8}$$

Vi ganger begge sider med 8 og får $k = 20$, dvs.

(1) $$h = \frac{20}{b}$$

Udregne h :

Vi sætter $b = 3{,}2$ i (1):

$$h = \frac{20}{3{,}2}$$

Heraf får vi $h = 6{,}25$ så

højden er $\underline{\underline{6{,}25}}$ når bredden er 3,2

42. Proportional/omvendt proportional med udtryk.

42a. Opgave

En variabel y er proportional med kvadratet på en variabel x.
Bestem en forskrift for y som funktion af x.

Besvarelse

"Kvadratet på x" er "x^2". At y er proportional med noget, betyder at y er lig en konstant k gange dette noget. Dvs. $\underline{\underline{y = k \cdot x^2}}$.

42b. Opgave

En variabel V er omvendt proportional med en variabel a i 3. potens.
Skriv en formel der angiver V udtrykt ved a.

Besvarelse

At V er omvendt proportional med noget, betyder at V er lig en konstant k divideret med dette noget. Dvs. $\underline{\underline{V = \frac{k}{a^3}}}$.

Logaritmefunktioner

43. Naturlig logaritme og titalslogaritme.

Funktionen $\ln(x)$ hedder den naturlige logaritmefunktion.
Funktionen $\log(x)$ hedder titalslogaritmefunktionen.
Funktionerne $\ln(x)$ og $\log(x)$ er på Nspire.

Logaritmereglerne:

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\qquad$ $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$

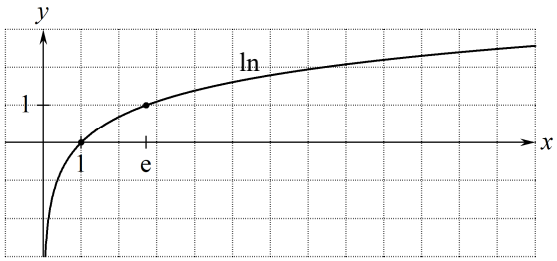
$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$ $\qquad$ $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$

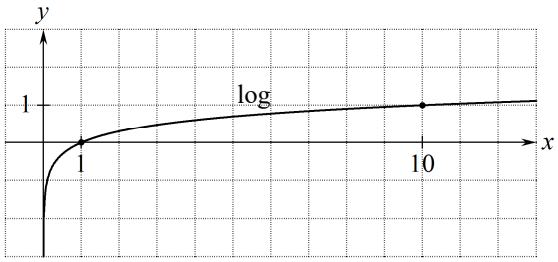
$\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$ $\qquad$ $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$

$\ln(1) = 0$ $\qquad$ $\log(1) = 0$

$\ln(\mathrm{e}) = 1$ $\qquad$ $\log(10) = 1$

Grafer:





Definitionsmængden for **ln** og **log** er de positive tal, dvs. alle positive tal kan indsættes for x.

Eksempler på brug af logaritmereglerne:

$\ln(\mathrm{e}^4) = 4 \cdot \ln(\mathrm{e}) = 4 \cdot 1 = 4$

$\ln(\mathrm{e}^x) = x$

$\log(1000) = \log(10^3) = 3 \cdot \log(10) = 3 \cdot 1 = 3$

$\log(120) - \log(0{,}12) = \log(\frac{120}{0{,}12}) = \log(1000) = 3$

$\log(5) + \log(2) = \log(5 \cdot 2) = \log(10) = 1$

Beviser

44. Bevis for hvad a og b i $y = ax+b$ fortæller.

Sætning For en lineær sammenhæng $y = ax + b$ gælder:

44a. Når vi **lægger 1 til x**, så **lægges a til y**.
44b. Når $x=0$, er $y=b$.

Bevis for 44a

		+1
x :	t	$t+1$
$a{\cdot}x+b$:	$a{\cdot}t+b$	$a{\cdot}(t+1)+b$

Første x kalder vi t. Andet x er 1 større.

Første y får vi ved at indsætte t for x i $a{\cdot}x+b$ og andet y får vi ved at indsætte $t+1$ for x i $a{\cdot}x+b$

$= a{\cdot}t+a{\cdot}1 + b$ Vi ganger a ind i parentes.

$= a{\cdot}t+a + b$ a gange 1 er a.

$= a{\cdot}t+b + a$ Dette er første y plus a, så 44a er bevist!

Bevis for 44b

Om $y = ax + b$ gælder: Når $x=0$ er $y = a{\cdot}0+b = 0+b = b$, så 44b er bevist!

45. Bevis for hvad a og b i $y = ba^x$ fortæller.

Sætning For en eksponentiel sammenhæng $y = b{\cdot}a^x$ gælder:

45a. Når vi **lægger 1 til x**, så **ganges y med a**.
45b. Når $x=0$, er $y=b$.

Bevis for 45a

		+1
x :	t	$t+1$
$b{\cdot}a^x$:	$b{\cdot}a^t$	$b{\cdot}a^{t+1}$

Første x kalder vi t. Andet x er 1 større.

Første y får vi ved at indsætte t for x i $b{\cdot}a^x$ og andet y får vi ved at indsætte $t+1$ for x i $b{\cdot}a^x$

$= b{\cdot}a^t{\cdot}a^1$ Ifølge potensreglen $a^{r+s} = a^r{\cdot}a^s$.

$= b{\cdot}a^t \cdot a$ Ifølge potensreglen $a^1 = a$.

Dette er første y gange a, så 45a er bevist!

Bevis for 45b

Om $y = b{\cdot}a^x$ gælder: Når $x=0$ er $y = b{\cdot}a^0 = b{\cdot}1 = b$, så 45b er bevist!

46. Bevis for reglen om potensvækst.

Sætning Om en potenssammenhæng $y = b{\cdot}x^a$ gælder for et positivt tal k:

46a. Når **x bliver ganget med k**, så **ganges y med k^a**.

Bevis

		$\cdot k$
x :	t	$t{\cdot}k$
$b{\cdot}x^a$:	$b{\cdot}t^a$	$b{\cdot}(t{\cdot}k)^a$

Første x kalder vi t. Andet x er k gange første.

Første y får vi ved at indsætte t for x i $b{\cdot}x^a$ og andet y får vi ved at indsætte $t{\cdot}k$ for x i $b{\cdot}x^a$.

$= b{\cdot}t^a{\cdot}k^a$ Ifølge potensreglen $(a{\cdot}b)^r = a^r{\cdot}b^r$.

Dette er første y gange k^a, så 46a er bevist!

47. Bevis for formler for fordoblings- og halveringskonstant.

Sætning For en voksende eksponentiel sammenhæng $y = b \cdot a^x$ gælder: $T_2 = \dfrac{\ln(2)}{\ln(a)}$.

Bevis

		$+T_2$	
x :	t		$t+T_2$
$b \cdot a^x$:	$b \cdot a^t$	$\cdot 2$	$b \cdot a^{t+T_2}$

Første x kalder vi t .
Andet x får vi ved at lægge T_2 til første x.

Første y får vi ved at indsætte t for x i $b \cdot a^x$ og andet y får vi ved at indsætte $t+T_2$ for x i $b \cdot a^x$

Da T_2 er det vi skal lægge til x for at fordoble y , så

$b \cdot a^t \cdot 2 = b \cdot a^{t+T_2}$	Vi dividerer begge sider med b .
$a^t \cdot 2 = a^{t+T_2}$	Vi bruger potensreglen $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$.
$a^t \cdot 2 = a^t \cdot a^{T_2}$	Vi dividerer begge sider med a^t .
$2 = a^{T_2}$	Vi tager den naturlige logaritme på begge side.
$\ln(2) = \ln(a^{T_2})$	Vi bruger logaritme-reglen $\ln(a^r) = r \cdot \ln(a)$.
$\ln(2) = T_2 \cdot \ln(a)$	Vi dividerer begge sider med $\ln(a)$. ln(a) er kun 0 når a=1, og a er ikke 1 da funktionen er voksende.
$\dfrac{\ln(2)}{\ln(a)} = T_2$	Nu har vi bevist formlen!

Formlen for halveringskonstant kan bevises på næsten samme måde.

48. Polynomier og rødder.

48a. Polynomier

Et førstegradspolynomium er en funktion af typen $f(x) = ax + b$ hvor $a \neq 0$.

Et andengradspolynomium er en funktion af typen $f(x) = ax^2 + bx + c$ hvor $a \neq 0$.

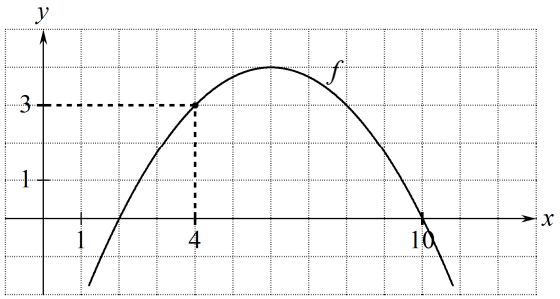
Et tredjegradspolynomium er en funktion af typen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hvor $a \neq 0$.

Osv.

48b. Nulpunkter og rødder

Hvis vi i $f(x) = ax^2 + bx + c$ sætter $a = -\frac{1}{4}$, $b = 3$ og $c = -5$, får vi andengradspolynomiet

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}x^2 + 3x - 5$$



Til højre har vi tegnet grafen for dette andengradspolynomium.

På grafen ser vi at hvis vi sætter 4 ind for x i forskriften og regner ud, så får vi y-værdien 3.

På grafen ser vi også at hvis vi sætter 10 ind for x og regner y-værdien ud, så får vi 0.

Et tal kaldes et <u>nulpunkt</u> for f hvis vi får 0 når vi indsætter tallet for x i forskriften og regner ud. Et nulpunkt kaldes også en <u>rod</u>. At finde rødderne er det samme som at løse ligningen $f(x) = 0$.

På grafen ser vi at <u>rødderne</u> er 2 og 10. Hvis vi løser ligningen $-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5 = 0$, så får vi altså løsningerne 2 og 10.

48c. Opgave

Vis at 10 er rod i polynomiet $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5$.

Besvarelse Vi indsætter 10 for x i polynomiet $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5$:

$$f(10) = -\tfrac{1}{4}\cdot 10^2 + 3\cdot 10 - 5 = -\tfrac{1}{4}\cdot 100 + 30 - 5 = -25 + 25 = 0$$

Da resultatet er 0, er 10 rod i polynomiet.

48d. Regel om antal rødder, antal fællespunkter med x-akse og antal løsninger

Et polynomium af grad n kan højst have n rødder.

Eksempel

Et tredjegradspolynomium kan ikke have mere end 3 rødder.

Grafen for et tredjegradspolynomium kan højst have 3 punkter fælles med x-aksen.

En tredjegradsligning kan højst have 3 løsninger.

Andengradspolynomier

49. Andengradspolynomium.

49a. Et andengradspolynomium er er en funktion af typen

(1) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ hvor $a \neq 0$

Hvis vi skriver 0 på a's plads, så bliver det ikke et andengrads-polynomium da x^2 forsvinder.

49b. Eksempel *Hvilke tal er a, b og c lig?*

Vi sætter $a = 1$ $b = -2$ $c = 0$

i $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

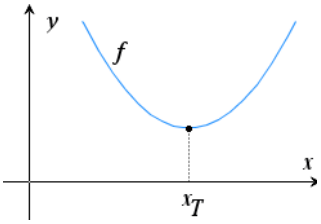
og får $f(x) = 1 \cdot x^2 + (-2) \cdot x + 0$

så $f(x) = x^2 - 2x$

er et andengradspolynomium.

I dette og andre andengrads-polynomier skal vi kunne se hvad a, b og c er, for at kunne indsætte i formler med a, b og c.

50. Toppunkt.

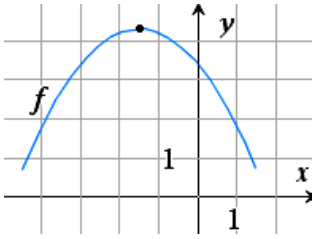


50a. Formel for toppunkts x-koordinat

Grafen for et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

er en parabel. Grafens toppunkt har x-koordinaten $x_T = \dfrac{-b}{2a}$

50b. Udregn toppunkt



$f(x) = -0{,}4x^2 - 1{,}2x + 3{,}4$

Vi ser at $f(x) = ax^2 + bx + c$

og $a = -0{,}4$ $b = -1{,}2$ $c = 3{,}4$

Toppunktets x-koordinat er $x_T = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-1{,}2)}{2 \cdot (-0{,}4)} = -1{,}5$

Toppunktet ligger på grafen og har x-koordinaten $-1{,}5$ så y-koordinaten er

$y_T = f(-1{,}5) = -0{,}4 \cdot (-1{,}5)^2 - 1{,}2 \cdot (-1{,}5) + 3{,}4 = 4{,}3$

Toppunktet er $T = \underline{\underline{(-1{,}5\ ,\ 4{,}3)}}$.

50c. Bevis for formlen for toppunkts x-koordinat

Når $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, er $f'(x) = a \cdot 2x + b + 0 = 2ax + b$

$f'(x) = 0$ Tangenthældningen $f'(x)$ er 0 når x er toppunktets x-koordinat.

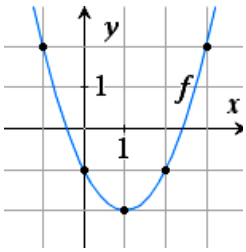
$2ax + b = 0$

$2ax = -b$

$\dfrac{2ax}{2a} = \dfrac{-b}{2a}$ da $a \neq 0$.

$x = \dfrac{-b}{2a}$ Dette er formlen vi ville bevise.

50d. Tegn uden hjælpemidler graf for $f(x) = x^2 - 2x - 1$



1) Udregn x-koordinat til toppunkt med metoden fra 50b. $x_T = 1$

2) I tabel til støttepunkter: Vælg tal på begge sider af toppunkts x-koordinat.

x:	-1	0	1	2	3
y:					

3) Udregn y-koordinater med metoden fra 49b.

4) Tegn afrundet graf gennem støttepunkter.
Sørg for at grafen IKKE er spids i toppunktet.

51. Diskriminant.

51a. Diskriminanten for et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
er tallet $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

51b. Eksempler *Udregn diskriminanten d*

50c. $f(x) = 3x^2 - x + 5$ er på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$ og $a = 3$ $b = -1$ $c = 5$

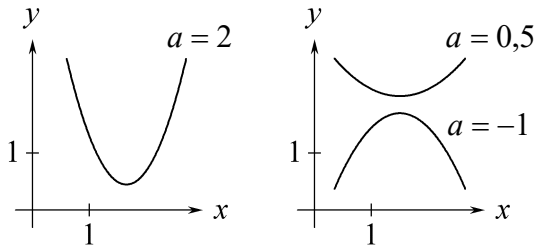
$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 1 - 60 = \underline{\underline{-59}}$

50d. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ er på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$ og $a = 1$ $b = 2$ $c = -3$

$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 - 4 \cdot (-3) = 4 - (-12) = 4 + 12 = \underline{\underline{16}}$

52. Betydning af *a*, *b*, *c* og *d* for grafen.

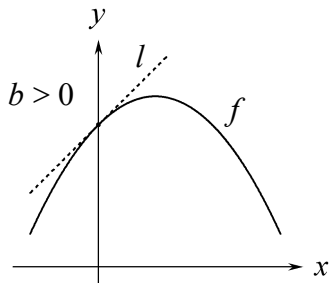
$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
d er diskriminanten



a : *a* positiv: grene vender op
a negativ: grene vender ned
parablen er bredere når *a* er tættere på nul

b : *b* er hældningskoefficient for tangent til graf i skæringspunkt med *y*-akse

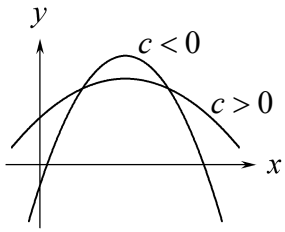
b positiv: graf går op mod højre i skæring med *y*-akse
b nul: grafs toppunkt er på *y*-akse
b negativ: graf går ned mod højre i skæring med *y*-akse



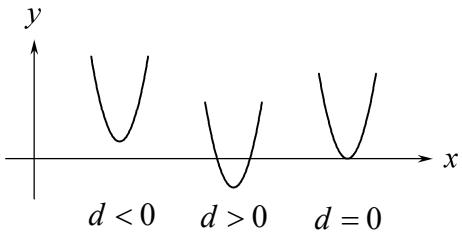
l er tangent til *f*-grafen i dennes skæringspunkt med *y*-aksen. *b* er lig *l* 's hældningskoefficient.

c : Graf skærer *y*-akse i punktet $(0, c)$

c positiv: graf skærer *y*-akse over *x*-akse
c nul: graf går gennem punktet $(0, 0)$
c negativ: graf skærer *y*-akse under *x*-akse



d : *d* positiv: graf har to punkter på *x*-akse
d nul: graf har ét punkt på *x*-akse
d negativ: graf har ingen punkter på *x*-akse



52e Bevis. *Bevis for reglen for betydningen af b*

Når $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, er $f'(x) = a \cdot 2x + b + 0 = 2ax + b$
Grafens skæringspunkt med *y*-aksen har *x*-koordiant 0 ,
så i dette punkt er tangenthældningen lig

$f'(0) = 2a \cdot 0 + b = 0 + b = b$

hvilket skulle bevises.

53. Nulpunkt.

53a. At

et tal er nulpunkt for en funktion

betyder at

når vi indsætter tallet for x i forskriften og regner ud, så får vi nul.

Et nulpunkt kan både være et tal og et punkt. For funktionen i 53b gælder:

0 og 1,5 er nulpunkter.

(0 , 0) og (1,5 , 0) er nulpunkter.

53b. Eksempel *Nulpunkt*

At

1,5 er nulpunkt for $f(x) = 2x^2 - 3x$

betyder at

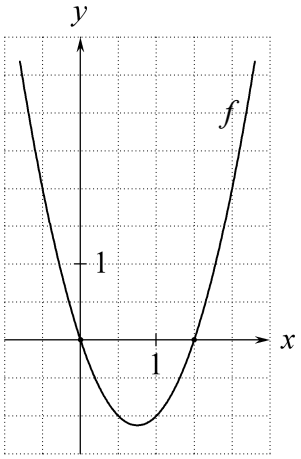
$2 \cdot 1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 = 0$

Dette er det samme som at

1,5 er løsning til ligningen $2x^2 - 3x = 0$

og det samme som at

grafpunktet med x-koordinat 1,5 ligger på x-aksen.



0 og 1,5 er nulpunkter for f

54. Antal nulpunkter eller løsninger.

54a. $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

d er diskriminanten

Der gælder at

antallet af nulpunkter for andengradspolynomiet $ax^2 + bx + c$

dvs.

antallet af løsninger til andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$

er

2 hvis $d > 0$

1 hvis $d = 0$

0 hvis $d < 0$

54b. Eksempel *Antal nulpunkter eller løsninger*

Vi vil bestemme tallet k så andengradsligningen

$kx^2 - 2x + 3 = 0$

har netop én løsning.

Ligningen er på formen $ax^2 + bx + c = 0$ med $a = k$, $b = -2$, $c = 3$,

så diskriminanten er $d = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot k \cdot 3 = \underline{4 - 12k}$

Vi vil finde ud af hvornår der er én løsning, dvs. vi vil finde ud af hvornår d er 0:

$4 - 12k = 0$ er ensbetydende med at $k = \frac{1}{3}$

Ligningen $kx^2 - 2x + 3 = 0$ har netop én løsning når $k = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

55. Løs andengradsligning.

55a. En andengradsligning $ax^2+bx+c = 0$, $a \neq 0$ kan vi løse sådan:

Først udregner vi diskriminanten: $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Så bruger vi følgende regel:

Hvis $d<0$ har ligningen ingen løsninger.

Hvis $d=0$ har ligningen løsningen $\frac{-b}{2a}$

Hvis $d>0$ har ligningen løsningerne $\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$ og $\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$

Bemærkning Både når $d=0$ og $d>0$ er løsningerne $\frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

55b. Eksempel *Løs andengradsligning*

Ligningen $3x^2-2x-1 = 0$

er af typen $ax^2+bx+c = 0$ med $a=3$, $b=-2$ og $c=-1$

Diskriminanten er $d = b^2-4 \cdot a \cdot c = (-2)^2-4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$

Da $d>0$ har ligningen løsningerne

$$\frac{-b-\sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{-b+\sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2+4}{6} = 1$$

Konklusion: Ligningen $3x^2-2x-1 = 0$ har løsningerne $-\frac{1}{3}$ og 1

56. Regel for at faktorisere andengradspolynomium

Hvis andengradspolynomiet $f(x) = ax^2+bx+c$, $a \neq 0$ har nulpunkterne (rødderne) x_1 og x_2 , er

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ ← formlen for at faktorisere et andengradspolynomium

Når vi skriver andengradspolynomiet sådan, så har vi faktoriseret andengradspolynomiet.

Tal der ganges, kaldes faktorer. Her er der tre faktorer, nemlig a , $x-x_1$ og $x-x_2$.

57. Eksempler på faktorisering af andengradspolynomium

57a. Vi vil faktorisere andengradspolynomiet $f(x)=2x^2+5x-3$

Vi bruger formlen for at løse andengradsligninger og får at

$2x^2+5x-3=0$ har løsningerne (rødderne) $\frac{1}{2}$ og -3

Vi bruger formlen for at faktorisere et andengradspolynomium og får at

$$f(x)=2\left(x-\tfrac{1}{2}\right)(x-(-3))$$

$$f(x)=(2x-1)(x+3)$$

← Vi ganger 2 ind i parentesen for at undgå brøk. Ellers havde vi ikke ganget ind.

57b. I $g(x)=x^2+4x+4$ er $a=1$ og rødderne er begge -2 , så faktoriseringen er

$$g(x) = 1 \cdot (x-(-2)) \cdot (x-(-2)) = (x+2) \cdot (x+2) = (x+2)^2 .$$

58. Find forskrift for andengradspolynomium

58a. Find forskrift når der er givet nulpunkter og et punkt på grafen

Vi har fået at vide at

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x)$ har nulpunkterne 2 og 5 (I stedet kunne være oplyst at $f(2)=0$ og $f(5)=0$)

punktet $(3,8)$ ligger på grafen for $f(x)$ (I stedet kunne være oplyst at $f(3)=8$)

Vi vil finde a, b og c.

Vi indsætter i formlen for at faktorisere et andengradspolynomium:

$f(x) = a(x-2)(x-5)$

Når vi indsætter et grafpunkts x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi grafpunktets y-koordinat. Da $(3,8)$ ligger på grafen, er

$a(3-2)(3-5) = 8$

dvs. $a \cdot 1 \cdot (-2) = 8$, så $a = -4$.

Vi får $f(x) = -4(x-2)(x-5) = -4x^2 + 28x - 40$

Nedenfor er vist to måder at udregne dette på.

så $a = \underline{\underline{-4}}$, $b = \underline{\underline{28}}$ og $c = \underline{\underline{-40}}$

Uden hjælpemidler:

$-4(x-2)(x-5) = (-4x+8)(x-5) = -4x^2 + 20x + 8x - 40 = -4x^2 + 28x - 40$

Med Nspire: expand(-4·(x−2)·(x−5)) = -4·x^2+28·x−40

58b. Find forskrift når der er givet y-akse-skæring og to andre andre punkter på grafen

Vi har fået at vide at

$f(x) = ax^2 + bx + c$

punkterne $(0,5)$, $(2,1)$, $(4,5)$ ligger på grafen for $f(x)$ (I stedet kunne være oplyst at $f(0)=5$, $f(2)=1$, $f(4)=5$)

Vi vil finde a, b og c.

Da grafen skærer y-aksen i $(0,5)$, er $c=5$, så

$f(x) = ax^2 + bx + 5$

Da $(2,1)$ og $(4,5)$ ligger på grafen, er

$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 5 = 1$

$a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 5 = 5$

Nspire løser dette ligningssystem mht. a og b og får $a=1$ og $b=-4$,

så $a = \underline{\underline{1}}$, $b = \underline{\underline{-4}}$ og $c = \underline{\underline{5}}$

Uden hjælpemidler kan vi løse ligningssystemet sådan:

I: $4a + 2b = -4$

II: $16a + 4b = 0$

Af II får vi

III: $b = -4a$

Dette indsætter vi i I og får

$4a + 2 \cdot (-4a) = -4$

$-4a = -4$

$\underline{a = 1}$

Dette indsætter vi i III og får

$b = -4 \cdot 1$

$\underline{b = -4}$

59. Nulregel

59a. Nulregel

At *et produkt er 0*
er det samme som at *en af faktorerne er 0*

Dvs. $udtryk1 \cdot udtryk2 = 0$
er det samme som $udtryk1 = 0$ eller $udtryk2 = 0$

59b. Eksempel *Nulregel*

Vi vil løse ligningen $(x+2)\cdot(2x-6) = 0$

Vi bruger nulreglen og får $x+2 = 0$ eller $2x-6 = 0$

dvs. $\underline{\underline{x = -2 \text{ eller } x = 3}}$

60. Ligninger af typen $x^2 = r$.

60a. Oplæg *Ligninger af typen* $x^2 = r$

Når $x=3$ er $x^2 = x\cdot x = 3\cdot 3 = 9$

Når $x=-3$ er $x^2 = x\cdot x = (-3)\cdot(-3) = 9$

$x^2 = 9$ netop når $x = -3$ eller $x = 3$

60b. Regel *for at løse ligninger af typen* $x^2 = r$

Når n er negativ: $x^2 = n$ har ingen løsninger da et tal ganget med sig selv ikke kan give noget negativt ($+\cdot+=+$, $0\cdot 0 = 0$, $-\cdot-=+$).

$x^2 = 0$ har løsningen $x = 0$.

Når p er positiv: $x^2 = p$ har to løsninger: $x = -\sqrt{p}$ eller $x = \sqrt{p}$ da kvadratroden af p er det tal som ganget med sig selv giver p .

60c. Eksempel *Ligninger af typen* $(\,udtryk\,)^2 = r$

Vi vil løse ligningen $(x+2)^2 = 9$

Af regel 60b får vi $x+2 = -\sqrt{9}$ eller $x+2 = \sqrt{9}$

$x+2 = -3$ eller $x+2 = 3$

dvs. $\underline{\underline{x = -5 \text{ eller } x = 1}}$

61. Særlige andengradsligninger.

61a. Andengradsligning uden konstantled *Kan løses med nulregel*

$$2x^2 - 5x = 0$$
$$x \cdot (2x - 5) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{eller} \quad 2x - 5 = 0$$
$$\underline{\underline{x = 0 \quad \text{eller} \quad x = \tfrac{5}{2}}}$$

61b. Andengradsligning uden *x*-led *Kan løses med reglen for ligninger af typen $x^2 = k$*

$$2x^2 - 6 = 0$$
$$2x^2 = 6$$
$$x^2 = 3$$
$$\underline{\underline{x = -\sqrt{3} \quad \text{eller} \quad x = \sqrt{3}}}$$

62. Bevis for reglen for løsning af andengradsligninger.

Først finder vi frem til en ligning (1) som vi skal bruge i beviset (for reglen for løsning af andengradsligning).

$$(2ax+b)^2 = (2ax)^2 + b^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b$$ ifølge formlen $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv$

(1) $$(2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + b^2 + 4abx$$ Her har vi omskrevet højre side.

Vi omskriver andengradsligningen:

I ligningen

Det er denne ligning vi skal løse.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \qquad a \neq 0$$

ganger vi begge sider med $4a$:

$$4a \cdot \left(ax^2 + bx + c\right) = 4a \cdot 0$$

Vi ganger ind i parentesen:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Vi lægger diskriminanten $d = b^2 - 4ac$ til begge sider:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac = 0 + b^2 - 4ac$$

Vi reducerer:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = d$$

Af (1) får vi

$$(2ax+b)^2 = d$$

Vi bruger nu de tre dele af 60b:

Hvis $d < 0$:

$$(2ax+b)^2 = d$$

har ingen løsninger ← da et tal i anden ikke kan give noget negativt

Hvis $d = 0$:

$$(2ax+b)^2 = 0$$
$$2ax + b = 0$$ ← Da 0 er eneste tal som ganget med sig selv giver 0
$$x = \frac{-b}{2a}$$

Hvis $d > 0$:

$$(2ax+b)^2 = d$$
$$2ax + b = \pm\sqrt{d}$$ ← Da $w^2 = p$ har løsningerne $w = \pm\sqrt{p}$ når $p > 0$
$$2ax = -b \pm \sqrt{d}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Nu har vi bevist alle tre dele af reglen i ramme 55a for løsning af andengradsligning.

63. Bevis for formelen for faktorisering af andengradspolynomium.

$f(x) = ax^2+bx+c$, $a>0$ er et andengradspolynomium.
Antag at h og k er nulpunkter (evt. ens) for f.
Vi skal vise at
(1) $f(x) = a\cdot(x-h)\cdot(x-k)$

Nulpunkterne er $\dfrac{-b-\sqrt{d}}{2a}$ og $\dfrac{-b+\sqrt{d}}{2a}$

Vi kan antage at h er den første, og k er den anden.

Vi starter med at udregne de to tal $h+k$ og $h\cdot k$ da det viser sig at vi får brug for dem i beviset for (1).

$$h+k = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a}$$

To brøker med samme nævner lægger man sammen ved at beholde nævneren og lægge tællerne sammen. De to kvadratrødder går ud mod hinanden.

$$= \frac{-b}{a}$$

Vi har forkortet brøken med 2.

$$h\cdot k = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$$

$$= \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{d}\right)^2}{(2a)^2}$$

Man ganger to brøker ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner. For at gange de to tællere har vi brugt kvadratsætningen $(u-v)\cdot(u+v) = u^2-v^2$ med $u=-b$ og $v=\sqrt{d}$.

$$= \frac{b^2-d}{4a^2}$$

Vi har reduceret.

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

Da $d = b^2-4ac$.

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

Vi har reduceret.

$$= \frac{c}{a}$$

Vi har forkortet med $4a$.

Vi beviser nu formlen (1) der står ovenfor:

$$\begin{aligned}
a\cdot(x-h)\cdot(x-k) &= a\cdot(x\cdot x - x\cdot k - h\cdot x + h\cdot k)\\
&= a\cdot(x^2-(h+k)\cdot x + h\cdot k)\\
&= a\cdot x^2 - a\cdot(h+k)\cdot x + a\cdot h\cdot k\\
&= a\cdot x^2 - a\cdot\frac{-b}{a}\cdot x + a\cdot\frac{c}{a}\\
&= a\cdot x^2+b\cdot x+c\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Hermed har vi vist (1) .

Funktionerne sinus og cosinus

64. Funktionerne sinus og cosinus

64 a. Funktioner med sin og/eller cos i forskrift

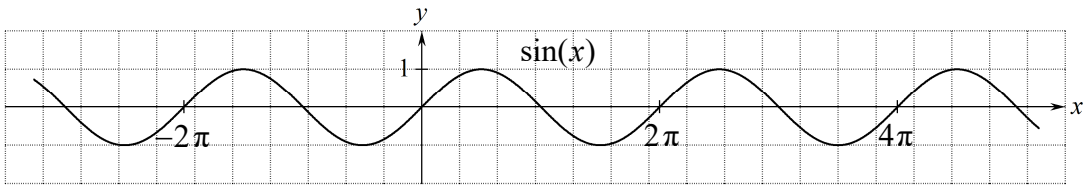
Her er et eksempel på en funktion hvor forskriften indeholder sinus: $f(x) = 5\sin(2x) + 3$.

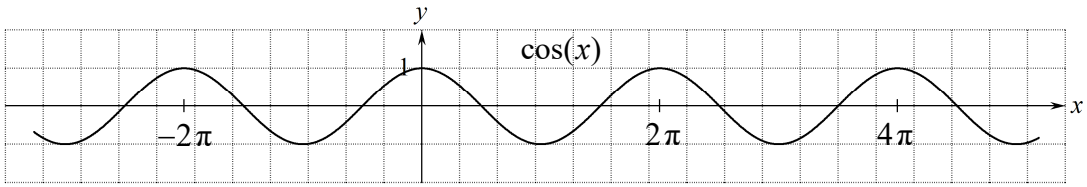
Når sin og cos er i en forskrift for en funktion:

Hvert matematikfelt hvor funktionen bruges, skal indstilles til radianer.

Hvert grafvindue hvor funktionen bruges, skal indstilles til at bruge radianer i grafer (ikke i geometri).

64 b. Grafer for sin og cos





Find på begge grafer grafstykket hvor $0 \le x \le 2\pi$.

Forskyd dette grafstykke 2π mod højre. Så får du den næste del af grafen.
Enhver del af grafen kan du få frem ved et antal gange at forskyde dette grafstykke 2π mod højre eller venstre.

For begge grafer gælder: y-koordinaterne til grafpunkterne er tallene i intervallet $-1 \le y \le 1$.

64 c. Egenskaber ved sin og cos

For alle tal x gælder:

$$-1 \le \sin(x) \le 1 \qquad \text{og} \qquad -1 \le \cos(x) \le 1$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \qquad \text{og} \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

64 d. Funktioner af typerne $f(x) = a\cdot\sin(b\cdot x + c) + d$ og $f(x) = a\cdot\cos(b\cdot x + c) + d$

har en bølgeformet graf som gentager sig selv. Afstanden mellem to bølgetoppe kaldes **perioden**.

$$\text{periode} = \frac{2\pi}{b} \qquad \text{størsteværdi} = d + a \qquad \text{mindsteværdi} = d - a$$

Opgave: Bestem periode, størsteværdi og mindsteværdi for funktionen $f(x) = 3\cdot\sin(0{,}5x - 4{,}2) + 6$.

Svar: Forskrift for f er på formen $a\cdot\sin(b\cdot x + c) + d$ med $a = 3$, $b = 0{,}5$, $c = 4{,}2$, $d = 6$, så

periode $= \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{0{,}5} = 12{,}5664 \approx \underline{\underline{12{,}5}}$, størsteværdi $= d + a = 6 + 3 = \underline{\underline{9}}$, mindsteværdi $= d - a = 6 - 3 = \underline{\underline{3}}$.

64 e. Hvis der både er cos og sin i forskrift

så brug Nspires **fMax** og **fMin** til at finde størsteværdi og mindsteværdi.

Opgave: Bestem størsteværdi for funktionen $f(x) = \sin(3x) + 2\cos(x)$, $1 \le x \le 9$.

Svar: $f(x) = \sin(3\cdot x) + 2\cdot\cos(x)$, $1 \le x \le 9$

Nspire bestemmer x i intervallet $1 \le x \le 9$ så $\sin(3\cdot x) + 2\cdot\cos(x)$ er størst mulig og får $x = 6.71296$:

$\text{fMax}(\sin(3\cdot x) + 2\cdot\cos(x), x) \mid 1 \le x \le 9$ ▸ $x = 6.71296$

$f(6.71296) = \sin(3\cdot 6.71296) + 2\cdot\cos(6.71296) = 2.77877 \approx 2{,}78$

Størsteværdi for $f(x)$ er 2,78

A
andengradsligning 33
andengradsligning uden konstantled 36
andengradsligning uden *x*-led 36
andengradsligning, bevis 36
andengradsligning, løsninger 33
andengradspolynomium 30
andengradspolynomium, find *a*, *b* og *c* 34
andengradspolynomium, find forskrift 34
andengradspolynomium, graf 31
B
bevis 27, 28, 30, 31, 36, 37
C
cos i forskrift 38
cosinus som funktion 38
D
diskriminant 31, 32, 33
E
e 19, 21, 26
eksponentiel funktion 5
eksponentiel graf 8
eksponentiel regression 12
eksponentiel vækst 5
eksponentiel, bestem *a* og *b* 12
eksponentiel, bestem forskrift/ligning 6, 17
eksponentiel, fortæller 6
F
faktor 33
faktorisere 33
faktorisering, bevis 37
fordoblingskonstant 20, 22, 28
fordoblingskonstant, aflæs 21
fordoblingskonstant, formel 21
fordoblingskonstant, fortæller 22
fremskrivningsfaktor 2, 5
G
gennemsnitlig procent 2, 13
gennemsnitlig vækstrate 13
graf 8, 26, 31
H
halveringskonstant 20, 22, 28
halveringskonstant, aflæs 21
halveringskonstant, formel 21
halveringskonstant, fortæller 22
K
kvadratet på 25
L
lineær funktion 3
lineær graf 8
lineær regression 9
lineær vækst 3, 27
lineær, bestem forskrift/ligning 4, 15, 16
lineær, fortæller 4
logaritme 26
logaritmefunktion, graf 26
logaritmeregler 26
løsning 33
løsninger, antal 29, 32
N
naturlig logaritme 26
nulpunkt 29, 32
nulpunkter, antal 29, 32
nulregel 35
O
omvendt proportional 24, 25
omvendt proportional med udtryk 25
P
periode 38
polynomium 29
potens, bestem forskrift/ligning 19
potensfunktion 7
potensfunktion, bestem *a* og *b* 13
potensfunktion, procentændring 7, 27
potensgraf 8
potensregression 13
potensvækst 7, 27
procent 1, 6, 7
procent, gennemsnitlig 2
proportional 25
proportional 23
proportional med udtryk 25
R
regression, eksponentiel 12
regression, lineær 9
regression, lineær, Nspire 9
regression, potens 13
rod 29
rødder 29
rødder, antal 29, 32
S
sin i forskrift 38
sinus som funktion 38
T
tegn graf uden hjælpemidler 30
titalslogaritme 26
toppunkt 30
V
vækstrate 2, 13