# Hvordan Leibniz opfandt integralregningen

2012 Karsten Juul

Englænderen Isaac Newton (1642-1727) opfandt i 1665 integralregningen.
Tyskeren Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) opfandt i 1675 integralregningen.
Ingen af dem offentliggjorde deres opfindelse med det samme. Leibniz offentliggjorde før Newton.

Dette hæfte indeholder et historisk forløb til gymnasiets matematikundervisning på A- og B-niveau.
Det kan indgå som en del af et mundtligt eksamensspørgsmål i integralregning.
Der er krav om historisk forløb.

Øvelserne på side 5-8 gør det nemt for eleverne at arbejde på at sætte sig ind i det stof der står på side 1-4. Når eleverne løser øvelserne, får de samtidig repeteret noget grundlæggende stof.



Hvordan Leibniz opfandt integralregningen



Dette hæfte kan downloades fra www.mat1.dk 27/4-2013

## Afsnit 1 *Indledning*

I 1675 opfandt Leibniz integralregningen.

Når du gennemarbejder dette hæfte, får du et indtryk af hvordan Leibniz opfandt integralregningen.

I dette hæfte har vi ikke brugt samme eksempler og skrivemåde som Leibniz brugte i det han skrev.

## Afsnit 2 *En speciel brøkregel*

$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ For at kunne sætte på fælles brøkstreg vil vi skaffe samme nævner i de to brøker. Dette gør vi ved at forlænge brøkerne.

$= \frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}-\frac{3\cdot 1}{3\cdot 4}$ Første brøk forlænger vi med 4, og anden brøk forlænger vi med 3.

$= \frac{4}{3\cdot 4}-\frac{3}{3\cdot 4}$ Vi reducerer de to tællere: én gange et tal er lig tallet.

$= \frac{4-3}{3\cdot 4}$ Vi bruger reglen for at trække brøk fra brøk når de har samme nævner: Nævneren beholdes og tæller trækkes fra tæller.

$= \frac{1}{3\cdot 4}$

Ovenfor lavede vi en udregning med 3 og 4. Vi kan lave tilsvarende udregninger med 4 og 5, og med 5 og 6, osv. Der gælder:

$$\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

**(1)** $$\frac{1}{4\cdot 5} = \frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5\cdot 6} = \frac{1}{5}-\frac{1}{6}$$

Osv.

## Afsnit 3 *En smart udregning af en sum*

Reglen (1) fra afsnit 2 ovenfor vil vi bruge til at lægge 99 tal sammen på en nem måde.
Vi omskriver hvert af de 99 tal ved hjælp af regel (1).
Så får vi nogle tal der går ud med hinanden to og to så kun første og sidste tal er tilbage:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \quad\cdots\quad + \frac{1}{98\cdot 99} + \frac{1}{99\cdot 100} =$$

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \quad\cdots\quad + \left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right) =$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \quad\cdots\quad + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} =$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

## **Afsnit 4** *Princippet i den smarte udregning af sum kan også bruges i nogle andre tilfælde*

I afsnit 3 startede vi med en sum

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

Så fandt vi tal

$$p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n$$

så

$$y_1 = p_0 - p_1 \quad y_2 = p_1 - p_2 \quad \cdots \quad y_n = p_{n-1} - p_n$$

Herefter kunne vi nemt udregne summen fordi $p$-tallene går ud mod hinanden to og to:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n =$$

**(2)** $$(p_0 - p_1) + (p_1 - p_2) + \cdots + (p_{n-1} - p_n) =$$

$$p_0 - p_n$$

Ved at bruge andre omskrivninger end (1) kan metoden (2) bruges på nogle summer der ikke ligner summen fra afsnit 3.

I afsnit 3 var

$$y_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} \quad y_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} \quad \cdots \quad y_n = y_{99} = \frac{1}{99 \cdot 100}$$

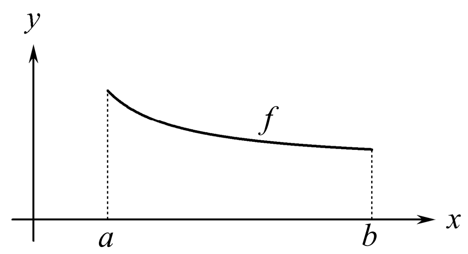
og

$$p_0 = \frac{1}{1} \quad p_1 = \frac{1}{2} \quad p_2 = \frac{1}{3} \quad \cdots \quad p_n = p_{99} = \frac{1}{100}$$

## **Afsnit 5** *En sum der er ca. lig arealet mellem f-graf og x-akse*

Leibniz havde arbejdet med metoden (2) fra afsnit 4 og ville prøve også at bruge den til at udregne arealer. Dette førte til at han opfandt integralregningen.

Vi vil finde arealet mellem $f$-graf og $x$-akse (se figur til højre).

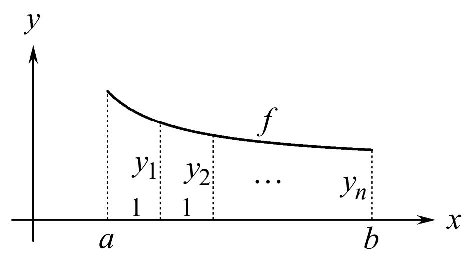



Vi deler arealet op i lodrette strimler der alle har bredden 1 enhed (se figur nedenfor til højre).

Den første strimmel er ca. lig et rektangel med bredde 1 og højde $y_1$, så arealet er ca. $y_1$.

Arealet af næste strimmel er ca. $y_2$.

Osv.

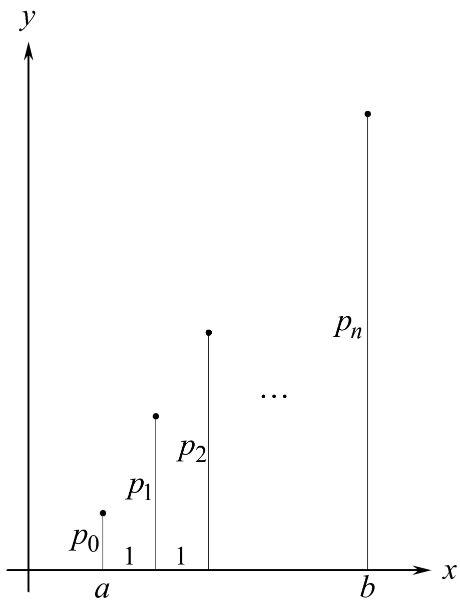



Hele arealet er altså ca. lig

**(3)** $$y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

## Afsnit 6 *Forberedelse af smart udregning af sum der er ca. lig areal mellem f-graf og x-akse*

Vi forsøger at bruge metoden (2) fra afsnit 4 til at udregne summen (3) fra afsnit 5.



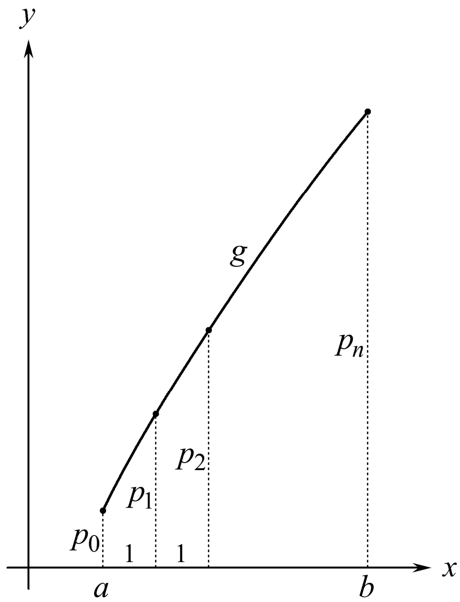

Vi vælger et tal $p_0$.
Så kender vi tallene $p_0$ og $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$,
og vi udregner $p_1,\ \ p_2,\ \ \cdots,\ \ p_n$ sådan:

$$p_1 = p_0 + y_1$$
$$p_2 = p_1 + y_2$$
$$\cdots$$
$$p_n = p_{n-1} + y_n$$

Vi afsætter $n+1$ punkter som vist på figuren til højre sådan at der er én enhed mellem "stolperne".

## Afsnit 7 *Smart udregning af summen der er ca. lig arealet mellem f-graf og x-akse*

Vi forestiller os at vi har en funktion $g$ hvis graf går gennem de $n+1$ punkter fra afsnit 6 (se figuren til højre).




Da

$$p_0 = g(a)$$
$$p_n = g(b)$$

og

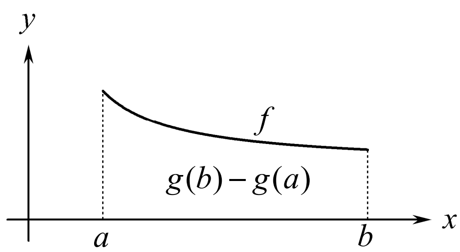
$$y_1 = p_1 - p_0$$
$$y_2 = p_2 - p_1$$
$$\cdots$$
$$y_n = p_n - p_{n-1}$$

kan vi udregne arealet mellem *f*-graf og *x*-akse sådan:

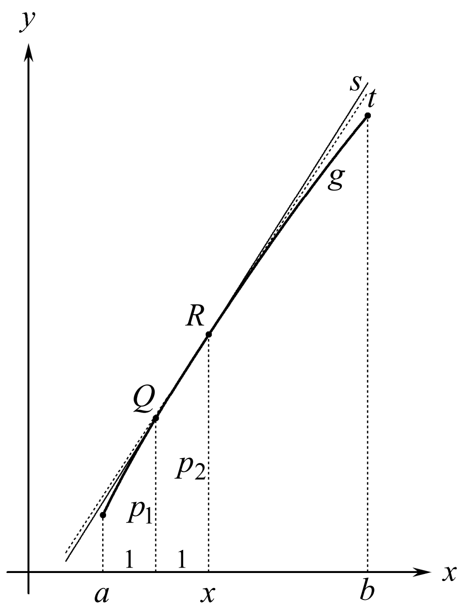
$$\begin{aligned}\text{Areal} &\approx y_1 + y_2 + \cdots + y_n \\ &= (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) + \cdots + (p_n - p_{n-1}) \\ &= p_n - p_0 \\ &= g(b) - g(a)\end{aligned}$$

Der gælder altså

**(4)** $\quad$ Areal $\approx g(b) - g(a)$



## Afsnit 8 *Hvordan vi kan finde g*




Formlen (4) fra afsnit 7 er vigtig fordi vi ofte kan finde $g$ når vi kender $f$.

Nu kommer forklaringen på dette.

På figuren til højre har vi tegnet linjen $s$ der går gennem $Q$ og $R$, og tangenten $t$ i $R$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \text{hældningskoefficient for } t \\ &\approx \text{hældningskoefficient for } s \\ &= p_2 - p_1 \\ &= y_2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Vi kan gøre det samme med andre værdier af $x$, så

**(5)** $\qquad g'(x) \approx f(x)$

Vi kan altså finde $g$ ved at finde en funktion som giver $f$ når vi differentierer den.

## Afsnit 9 *En nøjagtig arealberegningsmetode (dvs. integralregning)*

Formlerne **(4)** og **(5)** gælder mere nøjagtigt hvis vi bruger en enhed der er mindre (dvs. bruger smallere strimler).

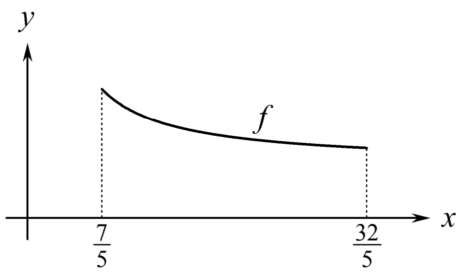
Leibniz forestillede sig at der fandtes tal som er uendelig små, men ikke er 0.
Han sagde at hvis vi lader enheden være sådan et uendelig lille tal,
så vil der gælde $=$ i stedet for $\approx$ i **(4)** og **(5)**, dvs.

**(6)** **Hvis vi kan finde en funktion *g* der differentieret giver *f*,
så kan vi udregne arealet mellem *f*-grafen og *x*-aksen
ved hjælp af formlen Areal $= g(b) - g(a)$ .**

Der er ikke uendelig små tal i de tal vi regner med i gymnasiets matematikundervisning.

Det er muligt at forestille sig nogle uendelig små tal på sådan en måde at man kan bruge dem til at finde korrekte formler.

## Afsnit 10 *Eksempel på brug af den nøjagtige arealberegningsmetode (dvs. integralregning)*




Det er metoden (6) fra afsnit 9 vi plejer at bruge.

Vi vil udregne arealet mellem *f*-graf og *x*-akse når

$$f(x) = \frac{2}{x} + 1 \ , \quad \tfrac{7}{5} \le x \le \tfrac{32}{5} \ ,$$

De funktioner, som differentieret giver $f$, er

$$F(x) = 2\ln(x) + x + c \ .$$

Vi kan vælge den simpleste af dem, dvs. den hvor $c = 0$ :

$$\text{areal} = \int_{\frac{7}{5}}^{\frac{32}{5}} \left(\frac{2}{x} + 1\right) dx = \Big[2\ln(x) + x\Big]_{\frac{7}{5}}^{\frac{32}{5}} =$$

$$\left(2\ln(\tfrac{32}{5}) + \tfrac{32}{5}\right) - \left(2\ln(\tfrac{7}{5}) + \tfrac{7}{5}\right) = \underline{\underline{2\ln(\tfrac{32}{7}) + 5}}$$

## Øvelse 1

Hvilke af følgende tal er lige store?

(1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{2+3}{5+3}$ (3) $\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3}$ (4) $\frac{2}{3}\cdot 3$ (5) $\frac{2\cdot 3}{3}$ (6) $2$

(7) $\frac{2}{5}+\frac{4}{5}$ (8) $\frac{2+4}{5}$ (9) $\frac{2}{5}+4$ (10) $\frac{2+4}{5+5}$

## Øvelse 2

Hvilke af følgende tal er lige store?

(1) $\frac{1}{7}$ (2) $\frac{1\cdot 8}{7\cdot 8}$ (3) $\frac{1}{7}\cdot 8$ (4) $\frac{8}{7\cdot 8}$ (5) $\frac{1+2}{7+2}$ (6) $\frac{1}{3}$

(7) $\frac{8}{7\cdot 8}-\frac{7}{7\cdot 8}$ (8) $\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$ (9) $\frac{1}{7\cdot 8}$ (10) $\frac{8-7}{7\cdot 8}$

## Øvelse 3

Sæt på fælles brøkstreg. Skriv mellemregninger.

(1) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5} =$

(2) $\frac{1}{6}-\frac{1}{7} =$

## Øvelse 4

Gør rede for at hvis $m$ er 1 større end $n$, dvs. hvis $m = n+1$, så er

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{m} = \frac{1}{n\cdot m}$$

## Øvelse 5

(a) Reducér:

$a\cdot a\cdot a\cdot a =$ $\qquad$ $a\cdot a^6 =$

(b) Sæt på fælles brøkstreg. Skriv mellemregninger.

$$\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^5} =$$

(c) Bevis følgende ved at sætte på fælles brøkstreg:

$$\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{2^k}$$

(d) Brug reglen fra (c) til at omskrive nedenstående. Du skal ikke udregne potenserne.

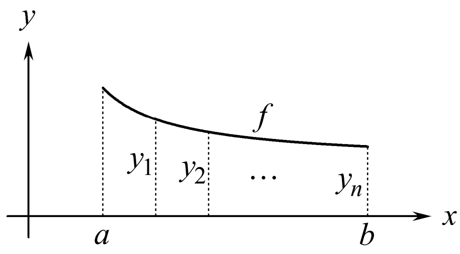
$\frac{1}{2^4} = \frac{\quad}{2^3} -$ $\qquad$ $\frac{1}{2^2} = \quad -$ $\qquad$ $\frac{1}{2} = \quad -$

(e) Brug metoden (2) fra afsnit 4 på side 2 til at udregne nedenstående sum.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n} =$$

$$\left(\qquad\right)+\left(\qquad\right)+\left(\qquad\right)+\cdots+\left(\qquad\right) =$$

## Øvelse 6

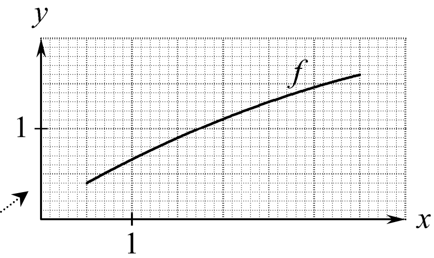



Figuren til højre stammer fra afsnit 5. I dette afsnit er omtalt et rektangel med højde $y_1$ og bredde 1 som ligger i den første strimmel.

(a) Tegn dette rektangel.

(b) Tegn også rektanglet med højde $y_2$ i næste strimmel.

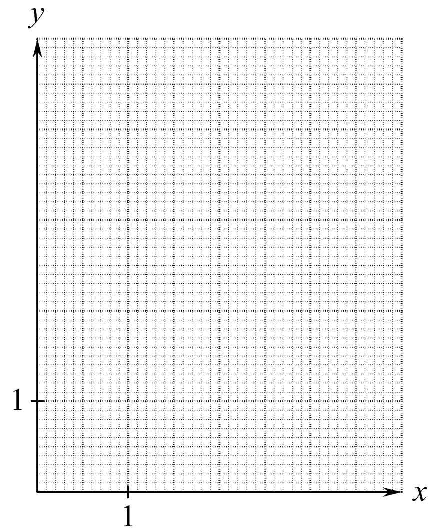
## Øvelse 7




I denne øvelse har bogstavbetegnelserne samme betydning som i

afsnit 5 på side 2
afsnit 6 på side 3
afsnit 7 på side 3

bortset fra at vi i stedet for grafen i afsnit 5 bruger $f$-grafen til højre på millimeterpapir.




(a) $a$ = _______ , $b$ = _______ , $n$ = ________

(b) $y_1$ = _______ , $y_2$ = _______ , $y_3$ = _______

(c) Vælg at sætte $p_0 = 0{,}8$ .

$p_1$ = _______ , $p_2$ = _______ , $p_3$ = _______

(d) I koordinatsystemet til højre skal du tegne punkter svarende til punkterne i koordinatsystemet i afsnit 6.

(e) Tegn grafen for $g$ .

(f) $g(a)$ = _______ , $g(b)$ = _______

(g) Regel (4) fra afsnit 7 siger at for området mellem $f$-grafen og $x$-aksen er

areal ≈ $\qquad - \qquad =$ _______

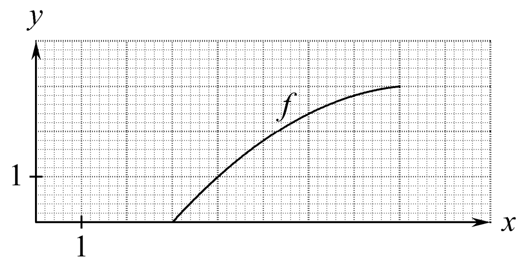
Dette er teori. Du skal ikke bruge metoden i eksamensopgaver. (Hvis metoden skulle give et resultat med stor nøjagtighed, så måtte vi dele op i så mange strimler at en computer var nødvendig).

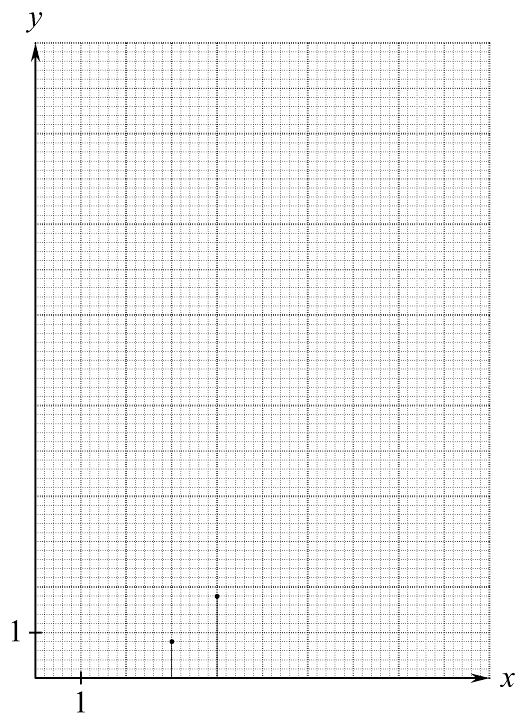
## Øvelse 8

(a) I afsnit 6 afsatte vi punkter ud fra grafen i afsnit 5. I denne øvelse skal du på tilsvarende måde afsætte punkter ud fra grafen nedenfor. Bemærk at enheden er mindre end i øvelse 7.

(b) Tegn $g$-grafen gennem disse punkter.

(c) Tallet $g(\qquad) - g(\qquad) =$
er en tilnærmet værdi for arealet mellem $f$-grafen og $x$-aksen.



## Øvelse 9

(a) I summen $(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_5-a_6)$

har vi skrevert $\cdots$ i stedet for nogle led. Skriv disse led: ______________________________

(b) I summen $(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

er det næstsidste led ______________

## Øvelse 10

(a) $\left(q_2-q_3\right)+\left(q_3-q_4\right)+\left(q_4-q_5\right)+\left(q_5-q_6\right)+\left(q_6-q_7\right) =$

(b) $\left(r_5-r_4\right)+\left(r_6-r_5\right)+\left(r_7-r_6\right)+\left(r_8-r_7\right) =$

(c) $\left(s_2-s_1\right)+\left(s_3-s_2\right)+\cdots+\left(s_n-s_{n-1}\right) =$

## Øvelse 11

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 15,5 | 18,0 | 20,5 | 23,0 |

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 5 | 6 | 8 | 11 |

Kun én af funktionerne $f$ og $g$ er lineær. Det er ___ og dens hældningskoefficient er ______ .

## Øvelse 12

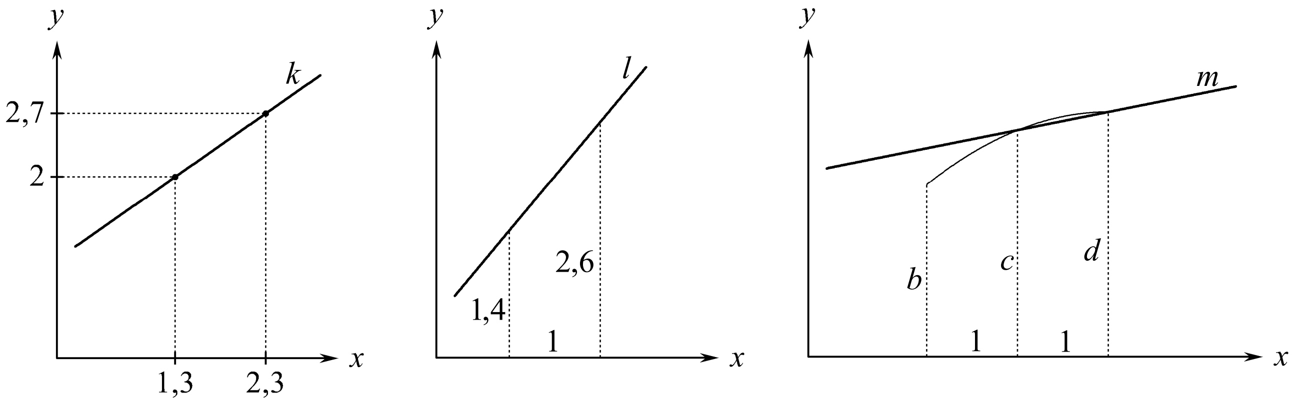
Funktionerne $f$ og $g$ er lineære. Udfyld tabellerne uden at finde forskrifterne.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 17 | 22 | | |

| $x$ | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | 50 | 100 | |

$f$'s hældningskoefficient er ______ . $g$'s hældningskoefficient er ______ .

## Øvelse 13

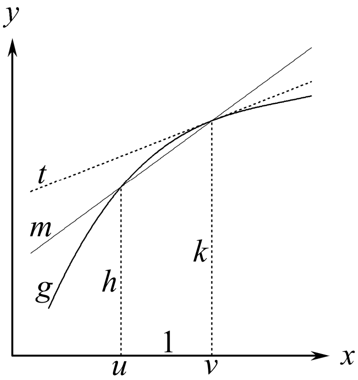



Af formlen $a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ får vi at $k$'s hældningskoefficient $= \dfrac{\quad - \quad}{\quad - \quad} = \_\_\_\_\_ =$

$l$'s hældningskoefficient $=$

$m$'s hældningskoefficient $=$ (Skriv et udtryk med bogstaver).

## Øvelse 14

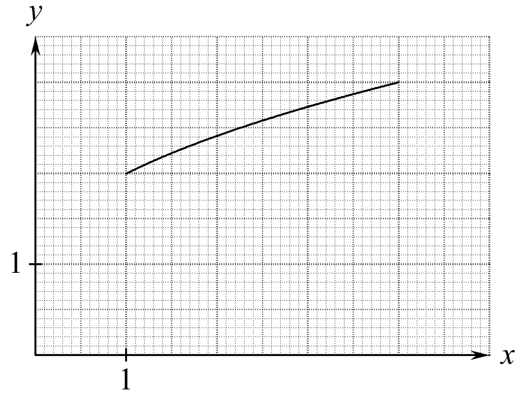



(a) Hvilke af følgende seks tal er ens?

| | |
|---|---|
| (1) $g'(u)$ | (4) $h-k$ |
| (2) $g'(v)$ | (5) $t$ 's hældningskoefficient |
| (3) $k-h$ | (6) $m$ 's hældningskoefficient |

(b) Tegn den tangent hvis hældningskoefficient er $g'(u)$ .

## Øvelse 15





(a) Arealet mellem grafen og $x$-aksen skal du dele op i strimler af bredde 1 som vist i afsnit 5 på side 2.

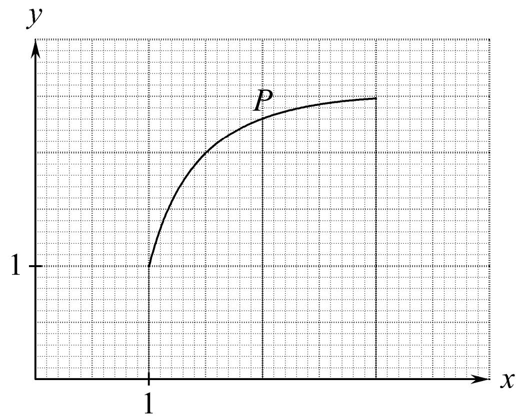
(b) I afsnit 5 er omtalt nogle rektangler hvis arealer er ca. lig arealerne af strimlerne. Tegn de tilsvarende rektangler her (ikke andre som du synes er bedre).

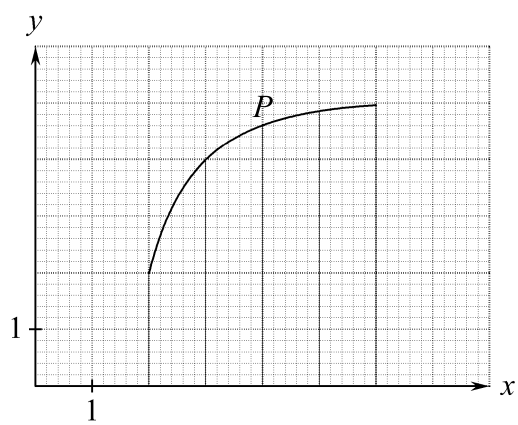
(c) Vi ser at rektanglernes samlede areal er lidt større end arealet mellem graf og $x$-akse, og at forskellen på arealerne er de dele af rektanglerne der er over grafen. Marker disse dele.

(d) På den nederste af de to figurer er enheden mindre, så rektanglernes samlede areal bliver en bedre tilnærmelse til arealet mellem graf og $x$-akse. Besvar spørgsmål (a), (b) og (c) for den nederste figur.

(e) Leibniz sagde at rektanglernes samlede areal er nøjagtig lig arealet mellem grafen og $x$-aksen når enheden er ________________________ .

## Øvelse 16




(a) På begge figurer skal du tegne tangenten $t$ til grafen i punktet $P$ .

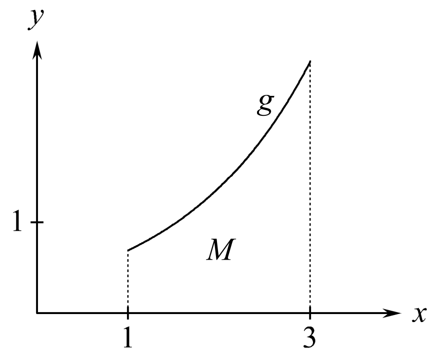
(b) Bemærk at enheden er mindre på nederste figur. På begge figurer skal du tegne linjen $m$ der går gennem $P$ og det grafpunkt $Q$ hvis $x$-koordinat er 1 enhed mindre end $P$ 's $x$-koordinat. Bemærk at enheden er mindre på nederste figur.

(c) $m$ 's hældningskoefficient er en tilnærmelse til tangentens hældningskoefficient. Tilnærmelsen er bedst på nederste figur fordi enheden er mindre. Leibniz sagde at $m$ 's hældningskoefficient er nøjagtig lig tangentens hældningskoefficient når enheden er ________________________ .

(d) På øverste figur er
$m$ 's hældningskoefficient = – =

(e) På nederste figur er
$m$ 's hældningskoefficient = – =

## Øvelse 17




Vi har fået oplyst at

$$h(x) = 2^{x-1}$$

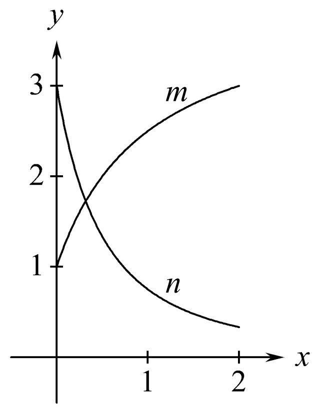
og at

$$h'(x) = g(x)$$

Ved at bruge metoden (6) fra side 4 får vi

Areal af $M$ = − =

## Øvelse 18




Det er oplyst at

$$m'(x) = n(x) .$$

Hvilke af følgende 6 udtryk er samme tal?

(1) areal mellem $m$-graf og $x$-akse

(2) areal mellem $n$-graf og $x$-akse

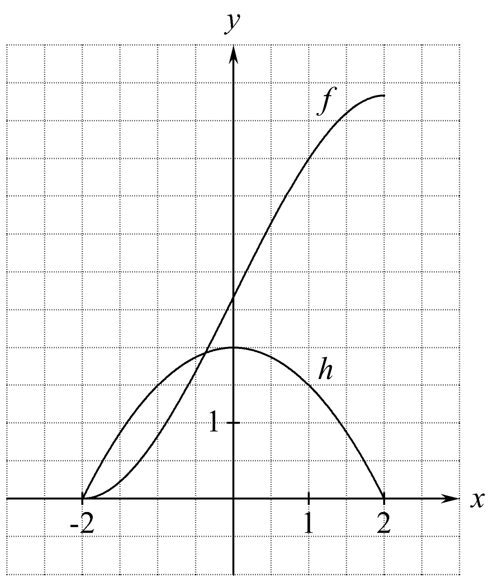
(3) $m(2) - m(0)$

(4) $m(0) - m(2)$

(5) $n(0) - n(2)$

(6) $n(2) - n(0)$

## Øvelse 19




Det er oplyst at

$$f'(x) = h(x) .$$

(a) Hvilke af følgende udtryk er samme tal?

(1) areal mellem $h$-graf og $x$-akse

(2) areal mellem $f$-graf og $x$-akse

(3) $f(2) - f(-2)$

(4) $h(2) - h(-2)$

(b) Arealet mellem $h$-grafen og $x$-aksen er ca. ______ .