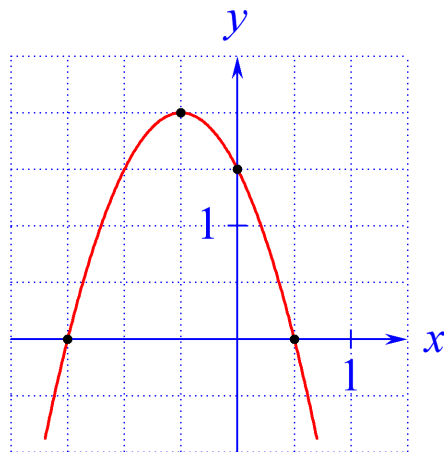


Kort om

# Andengrads- polynomier



2011 Karsten Juul

Dette hæfte indeholder pensum i andengradspolynomier for gymnasiet og hf

## Indhold

1. Definition	Andengradspolynomium .....	1
2. Eksempel	Hvilke tal er $a$ , $b$ og $c$ lig? .....	1
3. Eksempel	Hvordan udregner vi koordinater til grafpunkt? .....	1
4. Eksempel	Skæringspunkter med $x$ -akse og $y$ -akse .....	2
5. Sætning	Formel for $x$ -koordinat til toppunkt .....	2
6. Eksempel	Udregn toppunkt .....	2
7. Definition	Formel for diskriminant .....	3
8. Eksempel	Udregn diskriminanten .....	3
9. Sætning	Betydning af $a$ , $b$ , $c$ og $d$ for grafen .....	3
10. Definition	Nulpunkt .....	4
11. Eksempel	Nulpunkt .....	4
12. Sætning	Antal nulpunkter eller løsninger .....	4
13. Eksempel	Antal nulpunkter eller løsninger .....	4
14. Sætning	Løs andengradsligning .....	5
15. Eksempel	Løs andengradsligning .....	5
16. Sætning	Faktoriser andengradspolynomium .....	6
17. Eksempel	Faktoriser andengradspolynomium .....	6
18. Eksempel	Find forskrift for andengradspolynomium .....	6
19. Oplæg	Nulregel .....	7
20. Sætning	Nulregel .....	7
21. Eksempel	Nulregel .....	7
22. Oplæg	Ligninger af typen $x^2 = r$ .....	8
23. Sætning	Ligninger af typen $x^2 = r$ .....	8
24. Eksempel	Ligninger af typen $(\text{udtryk})^2 = r$ .....	8
25. Eksempel	Andengradsligning med to led .....	8
26. Bevis	for formelen for løsning af andengradsligninger .....	9
27. Definition	Rødder .....	9

Kort om andengradspolynomier

© 2011 Karsten Juul

Dette hæfte kan downloades fra [www.mat1.dk](http://www.mat1.dk)

Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til [kj@mat1.dk](mailto:kj@mat1.dk) som dels oplyser at dette hæfte benyttes, dels oplyser om hold, lærer og skole.

## 1. Definition Andengradspolynomium

Et andengradspolynomium er en funktion af typen

$$(1) \quad f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad \text{hvor } a \neq 0$$

Hvis vi skriver 0 på  $a$ 's plads, så bliver det ikke et andengradspolynomium da  $x^2$  forsvinder.

## 2. Eksempel Hvilke tal er $a$ , $b$ og $c$ lig?

Vi sætter  $a = 1$   $b = -2$   $c = 0$

$$i \quad f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$\text{og får} \quad f(x) = 1 \cdot x^2 + (-2) \cdot x + 0$$

$$\text{så} \quad f(x) = x^2 - 2x$$

er et andengradspolynomium.

I dette og andre andengradspolynomier skal vi kunne se hvad  $a$  og  $b$  er for at kunne indsætte i formler med  $a$  og  $b$ .

## 3. Eksempel Hvordan udregner vi koordinater til grafpunkt?

Grafen for et andengradspolynomium er en parabel.

I koordinatsystemet har vi tegnet grafen for

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

### 3.1 Udregn $y$ -koordinat til grafpunkt med kendt $x$ -koordinat

Et punkt på grafen har  $x$  koordinaten 0,5 .

Vi vil udregne punktets  $y$ -koordinat  $y_1$  .

Da  $(0,5, y_1)$  ligger på grafen, gælder at

når vi i forskriften indsætter 0,5 for  $x$  og regner ud, så får vi  $y_1$

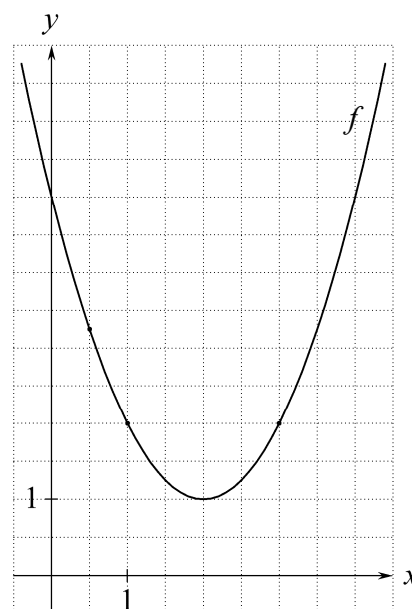
dvs.

$$y_1 = 0,5^2 - 4 \cdot 0,5 + 5$$

Vi udregner højresiden og får

$$y_1 = \underline{\underline{3,25}}$$

Find punktet i koordinatsystemet.



### 3.2 Udregn $x$ -koordinat til grafpunkt med kendt $y$ -koordinat

Et punkt på grafen har  $y$ -koordinaten 2 .

Vi vil udregne punktets  $x$ -koordinat  $x_1$  .

Da  $(x_1, 2)$  ligger på grafen, gælder at

når vi i forskriften indsætter  $x_1$  for  $x$  og regner ud, så får vi 2

dvs.

$$2 = x_1^2 - 4x_1 + 5$$

Vi løser denne ligning mht.  $x_1$  og får

$$x_1 = \underline{\underline{1}} \quad \text{eller} \quad x_1 = \underline{\underline{3}}$$

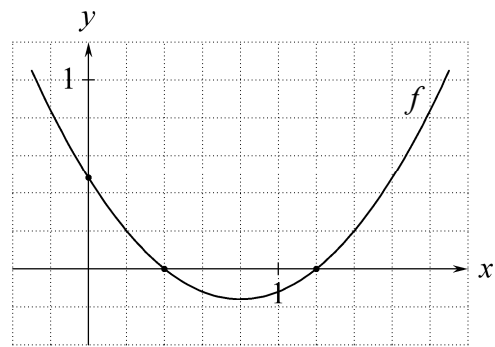
Der er altså to punkter på grafen som har  $y$ -koordinaten 2 .

Find punkterne i koordinatsystemet.

#### 4. Eksempel *Skæringspunkter med x-akse og y-akse*

I koordinatsystemet har vi tegnet grafen for

$$f(x) = x^2 - 1,6x + 0,48$$



##### 4.1 Udregn grafens skæringspunkt med y-aksen

Punktets  $x$ -koordinat er 0, så om dets  $y$ -koordinat  $y_1$  gælder at

$$y_1 = 0^2 - 1,6 \cdot 0 + 0,48 \quad \text{Se 3.1}$$

Vi udregner højresiden og får

$$y_1 = 0,48$$

Grafens skæringspunkt med  $x$ -aksen er  $(0, 0,48)$

##### 4.2 Udregn grafpunkt der ligger på $x$ -aksen

Punktets  $x$ -koordinat kalder vi  $x_1$ . Punktets  $y$ -koordinat er 0 da det ligger på  $x$ -aksen.

Da  $(x_1, 0)$  ligger på grafen, gælder

$$0 = x_1^2 - 1,6x_1 + 0,48 \quad \text{Se 3.2}$$

Vi løser denne ligning mht.  $x_1$  og får

$$x_1 = 0,4 \quad \text{eller} \quad x_1 = 1,2$$

Grafens skæringspunkter med  $x$ -aksen er  $(0,4, 0)$  og  $(1,2, 0)$

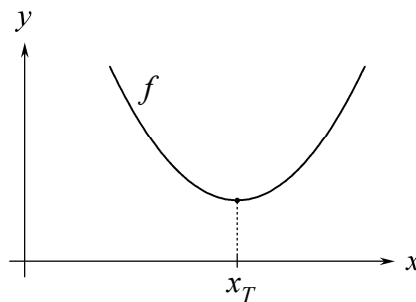
---

#### 5. Sætning *Formel for $x$ -koordinat til toppunkt*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Grafens toppunkt har  $x$ -koordinaten

$$x_T = \frac{-b}{2a}$$



#### 6. Eksempel *Udregn toppunkt*

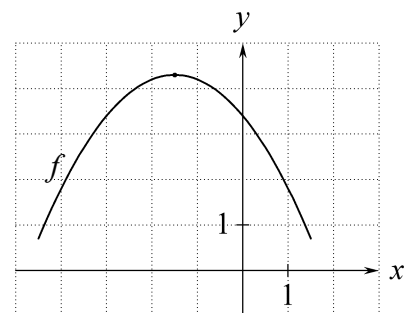
$$f(x) = -0,4x^2 - 1,2x + 3,4$$

Vi ser at  $f(x) = ax^2 + bx + c$

og  $a = -0,4$   $b = -1,2$   $c = 3,4$  Se 2.

Toppunktets  $x$ -koordinat er

$$x_T = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1,2)}{2 \cdot (-0,4)} = -1,5 \quad \text{Se 5.}$$



Toppunktet ligger på grafen og har  $x$ -koordinaten  $-1,5$  så om  $y$ -koordinaten  $y_T$  gælder at

$$y_T = -0,4 \cdot (-1,5)^2 - 1,2 \cdot (-1,5) + 3,4 \quad \text{Se 3.1}$$

Vi udregner højresiden og får

$$y_T = 4,3$$

Toppunktet er  $T = (-1,5, 4,3)$

## 7. Definition *Formel for diskriminant*

Diskriminanten for et andengradspolynomium

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

er tallet

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

## 8. Eksempel *Udregn diskriminanten*

$$f(x) = 3x^2 - x + 5$$

Vi ser at  $f(x) = ax^2 + bx + c$

og  $a = 3 \quad b = -1 \quad c = 5$

Se 2.

Diskriminanten er

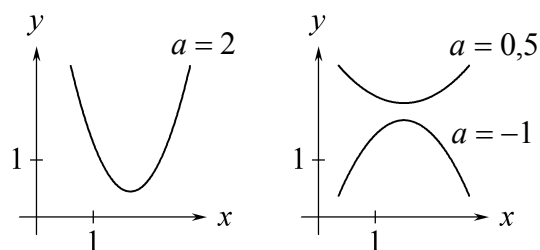
$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{\underline{-59}}$$

## 9. Sætning *Betydning af a, b, c og d for grafen*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

$d$  er diskriminanten

**a** :  $a$  positiv: grene vender op  
 $a$  negativ: grene vender ned  
parablen er bredere når  $a$  er tættere på nul

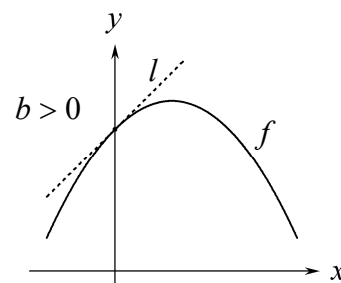


**b** :  $b$  er hældningskoefficient for tangent til graf i skæringspunkt med  $y$ -akse

$b$  positiv: graf går op mod højre i skæring med  $y$ -akse

$b$  nul: grafs toppunkt er på  $y$ -akse

$b$  negativ: graf går ned mod højre i skæring med  $y$ -akse



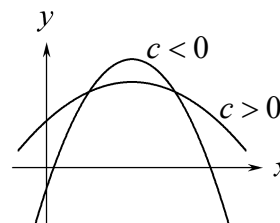
$l$  er tangent til  $f$ -grafen i dennes skæringspunkt med  $y$ -aksen.  
 $b$  er lig  $l$ 's hældningskoefficient.

**c** : Graf skærer  $y$ -akse i punktet  $(0, c)$

$c$  positiv: graf skærer  $y$ -akse over  $x$ -akse

$c$  nul: graf går gennem punktet  $(0, 0)$

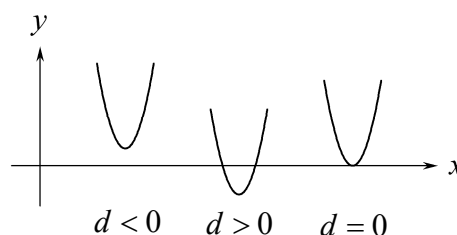
$c$  negativ: graf skærer  $y$ -akse under  $x$ -akse



**d** :  $d$  positiv: graf har to punkter på  $x$ -akse

$d$  nul: graf har ét punkt på  $x$ -akse

$d$  negativ: graf har ingen punkter på  $x$ -akse



## 10. Definition *Nulpunkt*

At

et tal er nulpunkt for en funktion

betyder at

når vi indsætter tallet for  $x$  i forskriften og regner ud, så får vi nul.

Ordet nulpunkt er misvisende.  
Et nulpunkt er IKKE et punkt.  
Et nulpunkt er et tal.

## 11. Eksempel *Nulpunkt*

At

1,5 er nulpunkt for  $f(x) = 2x^2 - 3x$

betyder at

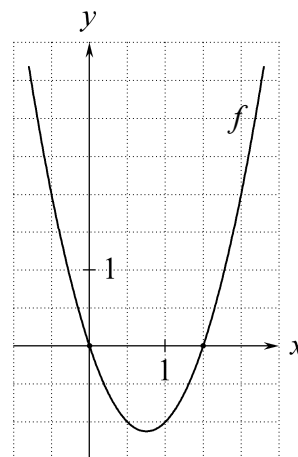
$$2 \cdot 1,5^2 - 3 \cdot 1,5 = 0$$

Dette er det samme som at

1,5 er løsning til ligningen  $2x^2 - 3x = 0$

og det samme som at

grafpunktet med  $x$ -koordinat 1,5 ligger på  $x$ -aksen. Se 4.2



0 og 1,5 er nulpunkter for  $f$

---

## 12. Sætning *Antal nulpunkter eller løsninger*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

$d$  er diskriminanten

Se 7. og 8.

Der gælder at

antallet af nulpunkter for andengradspolynomiet  $ax^2 + bx + c$   
dvs.

antallet af løsninger til andengradsligningen  $ax^2 + bx + c = 0$

er

2 hvis  $d > 0$

1 hvis  $d = 0$

Se 9. d

0 hvis  $d < 0$

## 13. Eksempel *Antal nulpunkter eller løsninger*

Vi vil bestemme tallet  $k$  så andengradsligningen

$$kx^2 - 2x + 3 = 0$$

har netop én løsning.

Ligningen er på formen  $ax^2 + bx + c = 0$  med  $a = k$ ,  $b = -2$ ,  $c = 3$ ,  
så diskriminanten er  $d = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot k \cdot 3 = \underline{4 - 12k}$

Vi vil finde ud af hvornår der er én løsning, dvs. vi vil finde ud af hvornår  $d$  er 0:

$$4 - 12k = 0 \text{ er ensbetydende med at } k = \frac{1}{3}$$

Ligningen  $kx^2 - 2x + 3 = 0$  har netop én løsning når  $k = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

## **14. Sætning** *Løs andengradsligning*

En andengradsligning

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

kan vi løse sådan:

Først udregner vi diskriminanten:

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Så bruger vi følgende regel:

Hvis  $d < 0$  har ligningen ingen løsninger.

Hvis  $d = 0$  har ligningen løsningen  $\frac{-b}{2a}$

Hvis  $d > 0$  har ligningen løsningerne  $\frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$  og  $\frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$

Bemærkning

Både når  $d = 0$  og  $d > 0$  er løsningerne

$$\frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Formlen for at løse andengradsligninger.

## **15. Eksempel** *Løs andengradsligning*

Ligningen

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

er af typen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

med

$$a = 3, \quad b = -2 \quad \text{og} \quad c = -1$$

Diskriminanten er

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$$

Se 14

Da  $d > 0$  har ligningen løsningerne

$$\frac{-b - \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2 - 4}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2 + 4}{6} = 1$$

Konklusion:

Ligningen  $3x^2 - 2x - 1 = 0$  har løsningerne  $-\frac{1}{3}$  og  $1$

## 16. Sætning *Faktoriser andengradspolynomium*

Hvis andengradspolynomiet

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

har nulpunkterne  $x_1$  og  $x_2$ , er

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \leftarrow \text{Formlen for at faktoriser andengradspolynomier.}$$

Når vi skriver andengradspolynomiet sådan, så har vi faktoriseret andengradspolynomiet.

Tal der ganges, kaldes faktorer. Her er der tre faktorer, nemlig  $a$ ,  $x - x_1$  og  $x - x_2$ .

## 17. Eksempel *Faktoriser andengradspolynomium*

Vi vil faktoriser andengradspolynomiet

$$f(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

Vi bruger formelen for at løse andengradsligninger og får at

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \quad \text{har løsningerne} \quad \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad -3 \quad \boxed{\text{Se 14. og 15.}}$$

Vi bruger formelen for at faktoriser andengradspolynomier og får at

$$f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - (-3)) \quad \boxed{\text{Se 16.}}$$

Vi reducerer dette og får

$$f(x) = \underline{\underline{(2x - 1)(x + 3)}}$$

## 18. Eksempel *Find forskrift for andengradspolynomium*

Vi har fået at vide at

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$f(x)$  har nulpunkterne 2 og 5

punktet (3, 8) ligger på grafen for  $f(x)$

Vi vil finde  $a$ ,  $b$  og  $c$ .

Vi indsætter i formelen for at faktoriser et andengradspolynomium:

$$f(x) = a(x - 2)(x - 5) \quad \boxed{\text{Se 16.}}$$

Når vi indsætter et grafpunkts  $x$ -koordinat i forskriften og regner ud, så får vi grafpunktets  $y$ -koordinat. Da (3, 8) ligger på grafen, er  $\boxed{\text{Se 3.1}}$

$$a(3 - 2)(3 - 5) = 8$$

dvs.  $a \cdot 1 \cdot (-2) = 8$ , så  $a = -4$ .

Vi indsætter  $-4$  for  $a$  i  $f(x) = a(x - 2)(x - 5)$  og ganger sammen:

$$-4(x - 2)(x - 5) = -4x^2 + 28x - 40$$

så

$$a = \underline{\underline{-4}}, \quad b = \underline{\underline{28}} \quad \text{og} \quad c = \underline{\underline{-40}}$$

## **19. Oplæg** Nulregel

Vi ganger to tal:

$$3 \cdot 2 = 6$$

$$0 \cdot 2 = 0$$

$$3 \cdot 0 = 0$$

Hvis resultatet skal være 0,  
så må en af faktorerne være 0.

Hvis  $x = 3$  er

$$(x+2) \cdot 4 =$$

$$5 \cdot 4 =$$

$$20$$

Hvis  $x = -2$  er

$$(x+2) \cdot 4 =$$

$$0 \cdot 4 =$$

$$0$$

Hvis  $(x+2) \cdot 4 = 0$

må  $x+2 = 0$  eller  $4 = 0$

dvs.  $x+2 = 0$

så  $x = -2$

## **20. Sætning** Nulregel

At  $\qquad \qquad \qquad$  *et produkt er 0*  
er det samme som at  $\qquad \qquad \qquad$  *en af faktorerne er 0*

Se 19.

Dvs.  $\qquad \qquad \qquad$   $udtryk1 \cdot udtryk2 = 0$   
er det samme som  $\qquad \qquad \qquad$   $udtryk1 = 0$  eller  $udtryk2 = 0$

## **21. Eksempel** Nulregel

Vi vil løse ligningen

$$(x+2) \cdot (2x-6) = 0$$

Vi bruger nulreglen og får

$$x+2 = 0 \quad \text{eller} \quad 2x-6 = 0$$

dvs.

$$\underline{\underline{x = -2}} \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{x = 3}}$$

## **22. Oplæg** *Ligninger af typen $x^2 = r$*

Når  $x=3$  er  $x^2 = x \cdot x = 3 \cdot 3 = 9$

Når  $x=-3$  er  $x^2 = x \cdot x = (-3) \cdot (-3) = 9$

$x^2 = 9$  netop når  $x = -3$  eller  $x = 3$

## **23. Sætning** *Ligninger af typen $x^2 = r$*

Når  $n$  er negativ:  $x^2 = n$  er falsk uanset hvilket tal der indsættes for  $x$

$x^2 = 0$  netop når  $x = 0$

Når  $p$  er positiv:  $x^2 = p$  netop når  $x = -\sqrt{p}$  eller  $x = \sqrt{p}$

Se 22.

## **24. Eksempel** *Ligninger af typen $(\text{udtryk})^2 = r$*

Vi vil løse ligningen

$$(x+2)^2 = 9$$

Af sætning 23 får vi

$$x+2 = -\sqrt{9} \quad \text{eller} \quad x+2 = \sqrt{9}$$

dvs.

$$\underline{\underline{x = -5 \quad \text{eller} \quad x = 1}}$$

## **25. Eksempel** *Andengradsligning med to led*

Når en andengradsligning har to led, kan vi løse den ved omskrivning.  
Der er to typer af disse ligninger.

Andengradsligning uden førstegradsled:

$$2x^2 - 6 = 0$$

$$2x^2 = 6$$

$$x^2 = 3$$

$$\underline{\underline{x = -\sqrt{3} \quad \text{eller} \quad x = \sqrt{3}}}$$

Se 23.

Andengradsligning uden konstantled:

$$2x^2 - 5x = 0$$

$$x \cdot (2x - 5) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{eller} \quad 2x - 5 = 0$$

$$\underline{\underline{x = 0 \quad \text{eller} \quad x = \frac{5}{2}}}$$

Se 20. og 21.

## 26. Bevis for formelen for løsning af andengradsligninger

Se 14.

Ved udregning får vi

$$(1) \quad (2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$$

Vi starter med at omskrive andengradsligningen:

I ligningen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

ganger vi begge sider med  $a$ :

$$4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 4a \cdot 0$$

Vi ganger ind i parenteser:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Vi lægger diskriminanten  $d = b^2 - 4ac$  til begge sider:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac = 0 + b^2 - 4ac$$

Vi reducerer:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = d$$

Af (1) får vi

$$(2ax + b)^2 = d$$

Vi bruger nu de tre dele af sætning 23:

Hvis  $d < 0$ :

$$(2ax + b)^2 = d$$

har ingen løsninger

Hvis  $d = 0$ :

$$(2ax + b)^2 = 0$$

$$2ax + b = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Hvis  $d > 0$ :

$$(2ax + b)^2 = d$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{d}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{d}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Nu har vi bevist alle tre dele af sætning 14.

## 27. Definition Rødder

En rod i et polynomium er det samme som et nulpunkt for et polynomium.

En rod i en ligning er det samme som en løsning til en ligning.