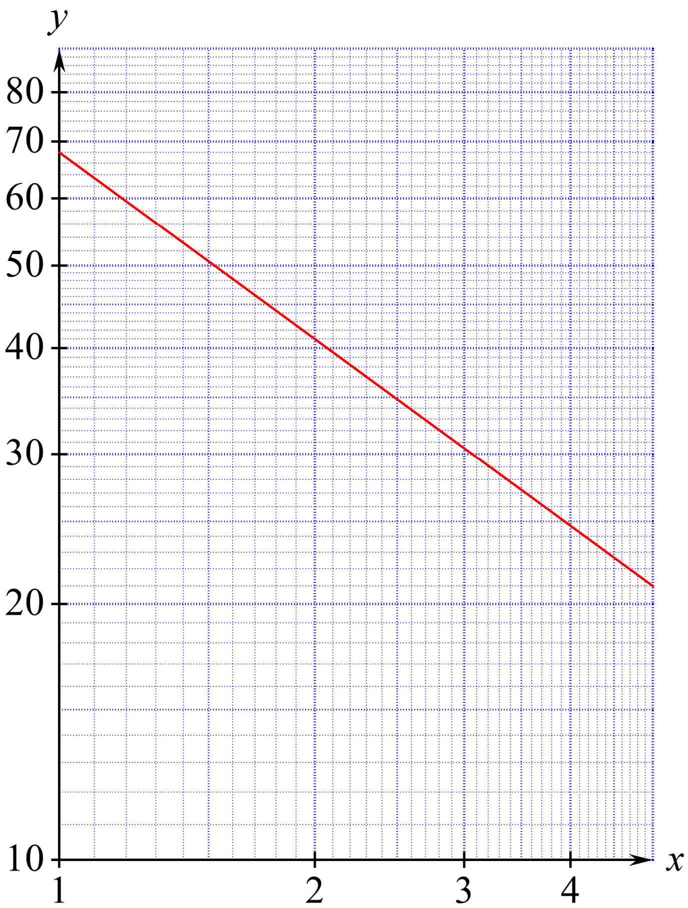
Kort om

Potens-sammenhænge



2011 Karsten Juul

Dette hæfte indeholder pensum i potenssammenhænge, herunder proportionale og omvendt proportionale variable, for gymnasiet og hf.

Indhold

Kort om potenssammenhænge

1. Ligning og graf for potenssammenhænge.

Definition

En sammenhæng kaldes en potenssammenhæng hvis ligningen er af typen

$$y = b \cdot x^a$$

hvor b er positiv.

Bemærk

En potenssammenhæng er ikke det samme som en eksponentiel sammenhæng.

En eksponentiel sammenhæng har en ligning af typen $y = b \cdot a^x$ hvor x er eksponent.

Eksempel

Nogle kvadratiske områder skal dækkes med kvadratiske kakler der hver vejer 238 enheder.
Vi indser:

Hvis området er 2 kakler bredt, er kaklernes vægt $238 \cdot 2^2$

Hvis området er 3 kakler bredt, er kaklernes vægt $238 \cdot 3^2$

Hvis området er 8 kakler bredt, er kaklernes vægt $238 \cdot 8^2$

Hvis området er x kakler bredt, er kaklernes vægt $238 \cdot x^2$

Når y er vægten af kaklerne på et område der er x kakler bredt, så er

$$y = 238 \cdot x^2$$

Dette er en potenssammenhæng.

Sætning

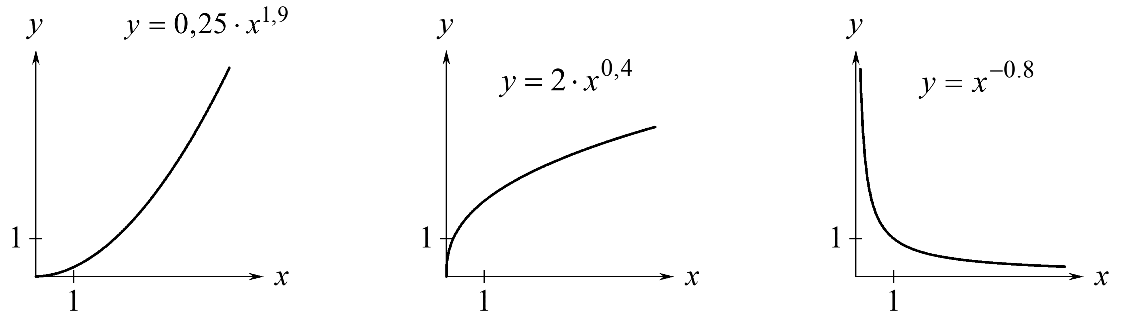
En potenssammenhæng $y = b \cdot x^a$ er

aftagende hvis a er negativ og

voksende hvis a er positiv.

Graf for potenssammenhæng

Grafen for en potenssammenhæng ligner normalt en af graferne nedenfor.



2. Dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

x-aksen og y-aksen er inddelt på en speciel måde. Man siger at de er <u>logaritmiske</u> skalaer.

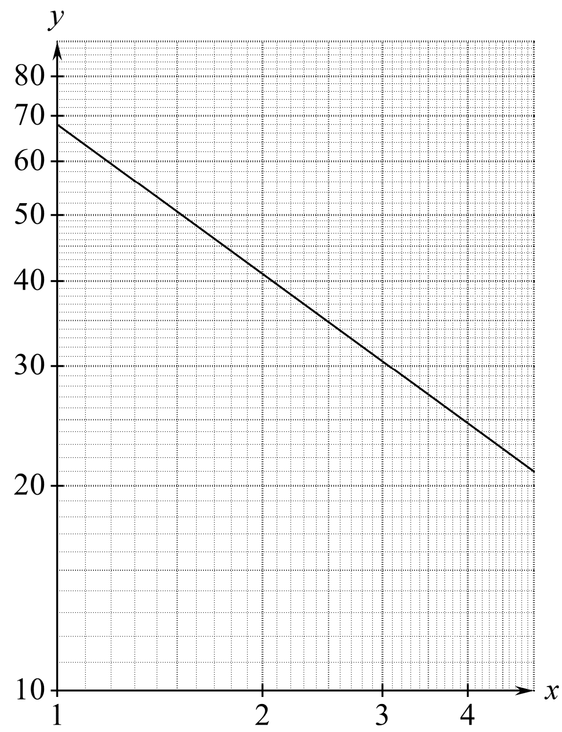
Hvis akserne blev fortsat nedad, så ville vi se at alle tallene er positive. Der er hverken 0 eller negative tal.

<u>Advarsel:</u> Antallet af delestreger mellem to hele tal er ikke det samme alle steder på akserne.

Koordinatsystemet er <u>dobbeltlogaritmisk</u> fordi
både x-aksen og y-aksen er logaritmiske.

Den skrå linje er graf for $y = 68 \cdot x^{-0,73}$.
I et sædvanligt koordinatsystem er denne graf en krum kurve.

<u>Grafen for en potenssammenhæng er en ret linje når vi tegner den i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem. For ingen andre sammenhænge er grafen en ret linje i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.</u>



3. Potensligning

En ligning af følgende type (hvor x er opløftet til en potens)

(3.1) $$b \cdot x^a = c$$

har løsningen

(3.2) $$x = \sqrt[a]{\frac{c}{b}}$$

Vi vil løse ligningen $1,6 \cdot x^{3,5} = 8,2$

<u>Metode 1:</u> <u>Vi bruger elektronisk ligningsløser</u>

Vi taster ligningen $1,6 \cdot x^{3,5} = 8,2$ og får den løst mht. x for $x > 0$ og får $x = 1,59503$.

Løsningen er $x = \underline{\underline{1,6}}$

<u>Metode 2:</u> <u>Vi bruger formel (3.2)</u>

Ligningen $1,6 \cdot x^{3,5} = 8,2$ har løsningen $x = \sqrt[3,5]{\frac{8,2}{1,6}} = 1,59503$. Løsningen er $x = \underline{\underline{1,6}}$

<u>Metode 3:</u> <u>Vi omskriver ligningen</u>

$$1,6 \cdot x^{3,5} = 8,2$$

$$x^{3,5} = \frac{8,2}{1,6}$$

$$x = \sqrt[3,5]{\frac{8,2}{1,6}}$$

$x = 1,59503$ Løsningen er $x = \underline{\underline{1,6}}$

4. Sådan vokser potenssammenhænge.

Sætning

Om en potenssammenhæng $y = b \cdot x^a$ gælder for et positivt tal k:

Hver gang $\boldsymbol{x}$ bliver ganget med $\boldsymbol{k}$, så bliver $\boldsymbol{y}$ ganget med $\boldsymbol{k^a}$.

Bevis

Vi starter med en tilfældig x-værdi: x_1

Vi ganger x_1 med k og får en en ny x-værdi: $x_2 = k \cdot x_1$

y-værdierne som hører til x_1 og x_2 kalder vi y_1 og y_2

$$\begin{aligned}
y_2 &= b \cdot x_2{}^a && \text{da } y_2 \text{ er } y\text{-værdien hørende til } x\text{-værdien } x_2 \text{ for } y = b \cdot x^a \\
&= b \cdot (k \cdot x_1)^a && \text{da } x_2 = k \cdot x_1 \\
&= b \cdot k^a \cdot x_1{}^a && \text{ifølge potensreglen } (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \\
&= k^a \cdot b \cdot x_1{}^a && \text{da vi blot har byttet om på rækkefølgen} \\
&= k^a \cdot y_1 && \text{for } y_1 = b \cdot x_1{}^a \text{ da } y_1 \text{ er } y\text{-værdien hørende til } x_1
\end{aligned}$$

Der gælder altså at vi får y_2 når vi ganger y_1 med k^a .

Det var dette vi skulle bevise.

Opgave

Et dyr vokser sådan at $y = 2{,}7 \cdot x^{1{,}6}$ hvor y er vægten i gram, og x er længden i cm.

Når dyret er blevet 40 % længere, hvor mange procent tungere er det så blevet?

Metode 1 som IKKE bruger sætningen ovenfor

Vi kan f.eks. starte med længden 1 :

Når $x = 1$ er $y = 2{,}7 \cdot 1^{1{,}6} = 2{,}7$

Længden der er 40 % længere end 1 , er $1 \cdot 1{,}40 = 1{,}40$.

Når $x = 1{,}40$ er $y = 2{,}7 \cdot 1{,}40^{1{,}6} = 4{,}6256$

Vi regner ud hvor mange procent vægten 4,6256 er større end vægten 2,7 :

$$4{,}6256 - 2{,}7 = 1{,}9256 \qquad \frac{1{,}9256}{2{,}7} = 0{,}713185 = 71{,}3185\%$$

Dyret bliver $\underline{\underline{71\%}}$ tungere når det bliver 40% længere.

Metode 2 som bruger sætningen ovenfor

At x bliver 40% større, er det samme som at x bliver ganget med 1,40 .

Når x bliver ganget med 1,40 , så bliver y ganget med

$1{,}40^{1{,}6} = 1{,}71319$

Bemærk at vi IKKE sætter 1,40 ind i ligningen. Vi bruger eksponenten fra ligningen.

At y bliver ganget med 1,71319 , er det samme som at y bliver 71,319% større.

Dyret bliver $\underline{\underline{71\%}}$ tungere når det bliver 40% længere.

5. Udregn a og b i $y=b\cdot x^a$ ud fra to punkter på grafen.

Opgave: Punkterne $(x,y)=(2,12)$ og $(x,y)=(4,48)$ ligger på grafen for sammenhængen $y=b\cdot x^a$. Udregn tallene a og b.

Metode 1. Vi sætter ind i formler for a og b

Af $(x_1,y_1)=(2,12)$ og $(x_2,y_2)=(4,48)$ får vi

$$a = \frac{\log(\frac{y_2}{y_1})}{\log(\frac{x_2}{x_1})} = \frac{\log(\frac{48}{12})}{\log(\frac{4}{2})} = \underline{\underline{2}}$$

$$b = \frac{y_1}{x_1^a} = \frac{12}{2^2} = \underline{\underline{3}}$$

Metode 2. Vi løser ligningssystem med elektronisk ligningsløser

Punkterne $(x,y)=(2,12)$ og $(x,y)=(4,48)$ ligger på grafen for $y=b\cdot x^a$, så

$$12 = b\cdot 2^a \quad \text{og} \quad 48 = b\cdot 4^a$$

Vi taster dette ligningssystem og får det løst mht. a og b. Vi får

$$a=\underline{\underline{2}} \quad \text{og} \quad b=\underline{\underline{3}}$$

Metode 3. Vi løser ligningssystem uden elektronisk ligningsløser

Punkterne $(x,y)=(2,12)$ og $(x,y)=(4,48)$ ligger på grafen for $y=b\cdot x^a$, så

$$12 = b\cdot 2^a \quad \text{og} \quad 48 = b\cdot 4^a$$

Vi dividerer højre ligning med venstre:

$$\frac{48}{12} = \frac{b\cdot 4^a}{b\cdot 2^a}$$

Vi forkorter de to brøker og omskriver:

$$4 = \frac{4^a}{2^a}$$

En af potensreglerne siger at $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

$$4 = \left(\frac{4}{2}\right)^a$$

$$4 = 2^a$$

$$a = \underline{\underline{2}}$$

Vi indsætter denne værdi af a i ligningen $12 = b\cdot 2^a$ og får

$$12 = b\cdot 2^2$$

dvs.

$$b=\underline{\underline{3}}$$

Metode 4. Vi bruger potensregression

Vi taster punkterne $(x,y)=(2,12)$ og $(x,y)=(4,48)$ og får udført potensregression på dem. Vi får

$$a=\underline{\underline{2}} \quad \text{og} \quad b=\underline{\underline{3}}$$

6. Potensregression.

Opgave

De målte tal i tabellen viser for et bestemt dyr sammenhængen mellem alder og længde .

Alder i døgn	10	15	20	30	40	50
Længde i mm	43	60	74	105	132	155

Sammenhængen kan med god tilnærmelse beskrives med ligningen

$$y = b \cdot x^a$$

hvor y er længde (målt i mm), og x er alder (målt i døgn).

Hvad skal a og b være for at ligningen $y = b \cdot x^a$ passer bedst med tabellen?

Besvarelse

Denne tabel taster vi. Vi får udført potensregression på hele tabellen og får

$$y = 6{,}79203 \cdot x^{0{,}802027}$$

Dvs. ligningen $y = b \cdot x^a$ passer bedst når

$$a = \underline{\underline{0{,}802}} \qquad \text{og} \qquad b = \underline{\underline{6{,}79}}$$

Bemærk

Hvis vi ikke bruger hele tabellen, så duer besvarelsen ikke.
Grafen for $y = 6{,}79203 \cdot x^{0{,}802027}$ går ikke gennem tabel-punkterne,
men det er den potensgraf der afviger mindst fra punkterne.

Hvordan taster vi på Nspire?

I et vindue med Lister og Regneark taster vi tabellen som vist til højre.

A xv	B yv
10	43
15	60
20	74
30	105
40	132
50	155

I menuen vælger vi

Statistik/Stat-beregning.../Potensregression...

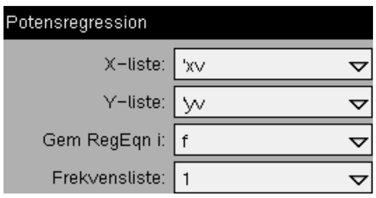
Så fremkommer et vindue vi udfylder som vist nederst til højre.

Når vi i et matematikfelt i et notevindue

taster $f(x)$ og trykker på enter

får vi

$$\mathbf{f}(x) = 6.79203 \cdot x^{0.802027}$$



7. Proportionale variable.

Definition

Om to variable x og y siger vi at

y er proportional med x

hvis

$y = k \cdot x$ og k er det samme tal for alle værdier af x .

Opgave

De to variable x og y er proportionale.
Tabellen viser nogle sammenhørende værdier af x og y.
Hvad er y når x er 10?
Hvad er x når y er 15?

x	24	36	92
y	18	27	69

I opgaven står ikke at vi skal udregne k.
Vi skal selv vide at vi skal udregne k først,
så vi kan bruge k til at udregne de tal der er spurgt om.

Besvarelse

Udregne k :

Da x og y er proportionale, er der et tal k så

(1) $y = k \cdot x$.

I tabellen ser vi at når $x = 24$ er $y = 18$.

Dette indsætter vi i (1):

$18 = 24 \cdot k$

Vi kan løse ligningen ved at dividere begge sider med 24.

Denne ligning løser vi mht. k og får

$0{,}75 = k$

dvs.

(2) $\underline{y = 0{,}75 \cdot x}$

Udregne y :

For at finde y når x er 10, sætter vi x til 10 i (2):

$y = 0{,}75 \cdot 10$

Heraf får vi $y = 7{,}5$ så

y er $\underline{\underline{7{,}5}}$ når x er 10

Udregne x :

For at finde x når y er 15, sætter vi y til 15 i (2):

$15 = 0{,}75 \cdot x$

Vi kan løse ligningen ved at dividere begge sider med 0,75.

Vi løser denne ligning mht. x og får

$20 = x$

så

x er $\underline{\underline{20}}$ når y er 15

8. Omvendt proportionale variable.

Definition

Om to variable x og y siger vi at

y er omvendt proportional med x

hvis

$y = \frac{k}{x}$ og k er det samme tal for alle værdier af x .

Opgave

De to variable x og y er omvendt proportionale.
Hvad skal der stå på de tomme pladser i tabellen?

x		12	36
y	9	6	

Besvarelse

I opgaven står ikke at vi skal udregne k.
Vi skal selv vide at vi skal udregne k først,
så vi kan bruge k til at udregne de tal der er spurgt om.

Udregne k :

Da x og y er omvendt proportionale, er der et tal k så

(1) $y = \frac{k}{x}$.

I tabellen ser vi at når $x = 12$ er $y = 6$. Dette indsætter vi i (1):

$$6 = \frac{k}{12}$$

Vi kan løse ligningen ved at gange begge sider med 12.

Vi løser denne ligning mht. k og får

$$72 = k$$

Der gælder altså:

(2) $y = \frac{72}{x}$

Udregne y :

For at finde y når x er 36, sætter vi x til 36 i (2):

$$y = \frac{72}{36}$$

Heraf får vi $y = 2$ så

y er $\underline{\underline{2}}$ når x er 36

Udregne x :

For at finde x når y er 9, sætter vi y til 9 i (2):

$$9 = \frac{72}{x}$$

Vi kan løse ligningen ved først at gange begge sider med x og derefter at dividere begge sider med 9.

Vi løser denne ligning mht. x og får

$$x = 8$$

så

x er $\underline{\underline{8}}$ når y er 9

9. Når variable fra virkeligheden er omvendt proportionale.

Opgave

På en skærm er et rektangel som vi kan ændre ved at trække med musen.
Højde og bredde er omvendt proportionale.
Højden er 2,5 når bredden er 8

Hvad er højden når bredden er 3,2 ?

Besvarelse

Vi kalder højden for *h* og bredden for *b*.

Udregne k :

Da *h* er omvendt proportional med *b*, findes et tal *k* så

$$h = \frac{k}{b}$$

Da $h = 2{,}5$ når $b = 8$ må

$$2{,}5 = \frac{k}{8}$$

Vi ganger begge sider med 8 og får $k = 20$, dvs.

$$(1) \qquad h = \frac{20}{b}$$

Udregne h :

Vi sætter $b = 3{,}2$ i (1):

$$h = \frac{20}{3{,}2}$$

Heraf får vi $h = 6{,}25$ så

højden er $\underline{\underline{6{,}25}}$ når bredden er 3,2