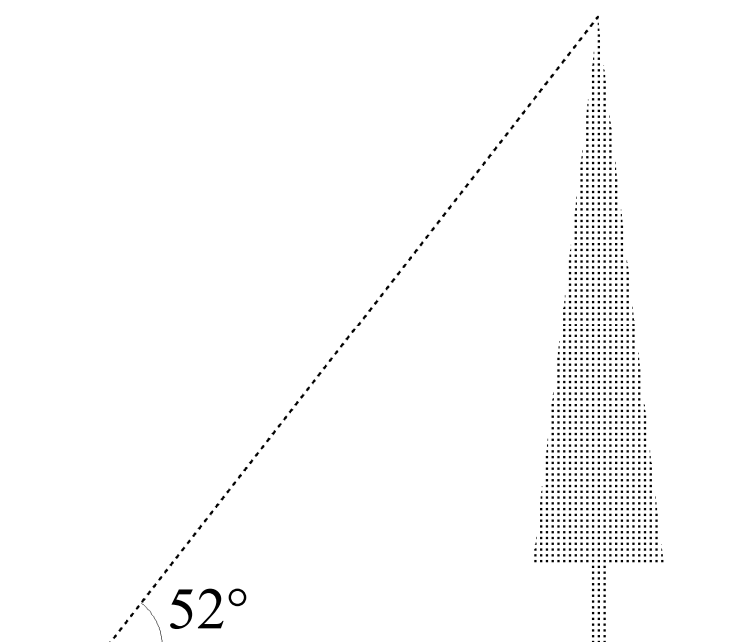


Kortfattet

# Trekants- beregning

for gymnasiet og hf



2010 Karsten Juul

# Indhold

1. Højde og areal.....	1
2. Pythagoras' sætning .....	2
3. Ensvinklede trekanter .....	4
4. Cosinus og sinus i retvinklet trekant.....	6
5. Tangens i retvinklet trekant .....	9
6. Vinkler .....	11
7. Udregne areal ved hjælp af sinus.....	12
8. Sinusrelationen .....	13
9. Cosinusrelationen .....	14
10. Tilføjelser.....	15

Kortfattet trekantsberegning for gymnasiet og hf

© 2010 Karsten Juul

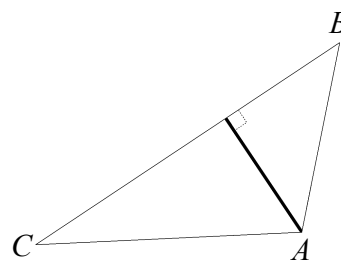
Dette hæfte kan downloades fra [www.mat1.dk](http://www.mat1.dk)

Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til [kj@mat1.dk](mailto:kj@mat1.dk) som dels oplyser at dette hæfte benyttes, dels oplyser om hold, lærer og skole.

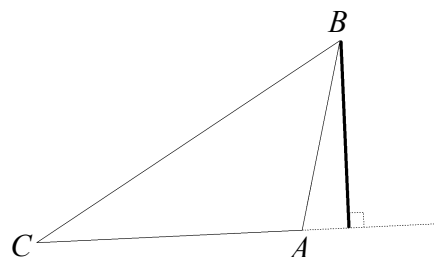
# 1: Højde og areal

## 1.1 Definition Højde.

Højden fra  $A$  er det linjestykke der går fra  $A$  og vinkelret ind på den modstående side.

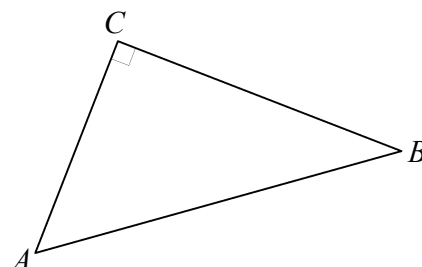


Højden fra  $B$  er det linjestykke der går fra  $B$  og vinkelret ind på den modstående sides forlængelse.



## 1.2 Eksempel En side kan være en højde.

Højden fra  $A$  er linjestykket  $AC$



## 1.3 Sætning Areal af trekant.

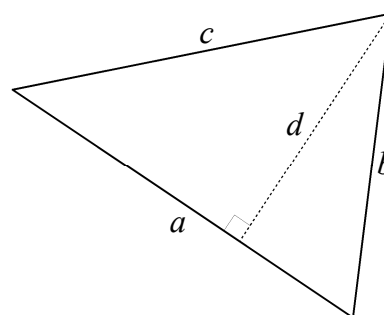
Trekantens areal er

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot a$$

når

$d$  er en højde i trekanten

$a$  er den side der er vinkelret på  $d$ .



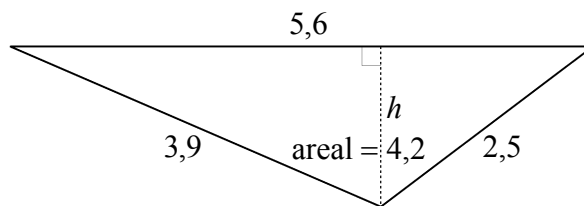
## 1.4 Eksempel Areal er kendt.

På billedet ser vi:

Trekantens areal er 4,2

$h$  er en højde

$h$  er vinkelret på siden der er 5,6



Af dette får vi at

$$4,2 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 5,6$$

Vi har brugt sætningen om  
trekants areal (ramme 1.3).

Vi taster denne ligning

og får den løst mht.  $h$  for  $h > 0$

og får  $h = 1,5$  .

## 2: Pythagoras' sætning

### 2.1 Definition Katete og hypotenuse.

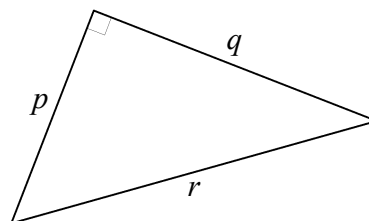
Siderne  $p$  og  $q$  er trekantens kateter.

Det kan vi se fordi vinklen imellem  $p$  og  $q$  er ret.

Siden  $r$  er hypotenusen.

Det kan vi se fordi  $r$  ikke er en af kateterne.

Hvis en trekant ikke er retvinklet, så har den hverken hypotenuse eller kateter.



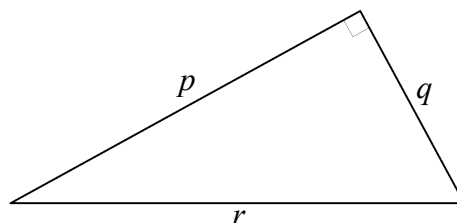
### 2.2 Sætning Pythagoras' sætning.

For en retvinklet trekant gælder:

$$p^2 + q^2 = r^2$$

når  $p$  og  $q$  er kateter, og

$r$  er hypotenuse



## 2.3 Eksempel

 Hypotenusen og en katete er kendt.

Vi ser:

kateterne er  $d$  og  $3,6$

hypotenusen er  $8,1$

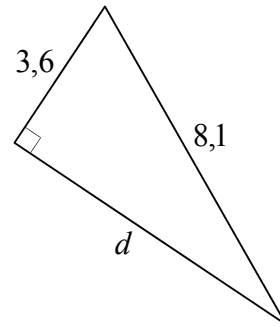
Derfor er

$$3,6^2 + d^2 = 8,1^2$$

Vi taster denne ligning

og får den løst mht.  $d$  for  $d > 0$

og får  $d = 1,5$  .



## 2.4 Bemærkning

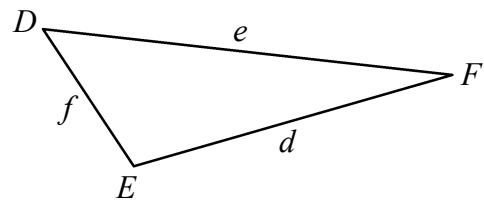
 En sprogbrug.

Hvis der står

i trekant  $DEF$  er  $f = 14$

gælder

det er siden over for vinkelspidsen  $F$  der er  $14$ .



Sprogbrugen er nemlig sådan at når

et stort bogstav er en vinkelspids i en trekant,

gælder

det tilsvarende lille bogstav er siden over for vinkelspidsen,

hvis der ikke fremgår andet.

### Eksempel på udnyttelse af denne sprogbrug

I en trekant  $ABC$  hvor vinkel  $C$  er ret, er  $a^2 + b^2 = c^2$  .

### Advarsel

Se figuren til højre.

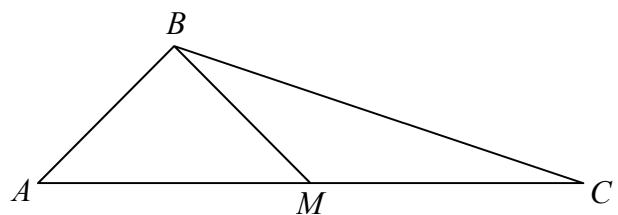
Her dur det ikke hvis du skriver  $m = 2,6$  .

Læseren kan ikke vide om det er  $AB$

eller  $BC$  der er  $2,6$  .

Skriv  $m$  på den side du mener.

Du skal altid tegne en figur i en geometriopgave.

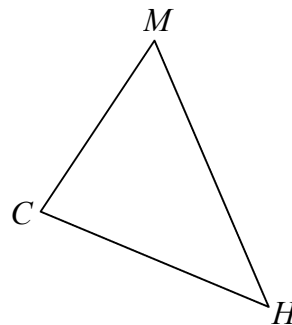


### 3: Ensvinklede trekanter

#### 3.1 Definition En sides modstående vinkel.

Forestil dig at du sidder på linjestykket  $CM$  og holder i de to vinkler ved linjestykkets endepunkter.

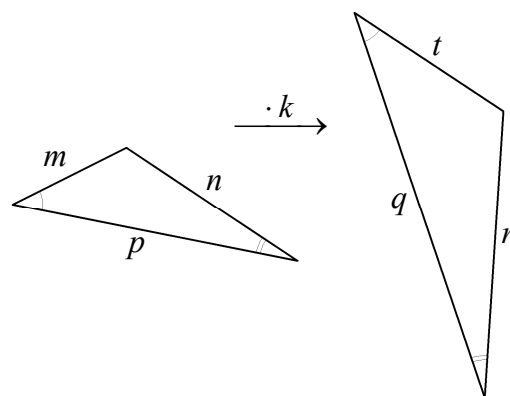
Den vinkel du ikke holder i (altså  $H$ ) er den modstående vinkel til siden  $CM$ .



#### 3.2 Sætning Ensvinklede trekanter

De to trekanter har samme vinkler.  
Derfor er der en skalafaktor.

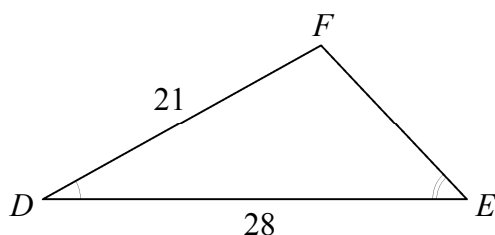
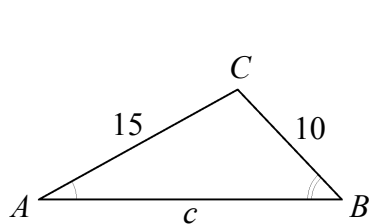
- $k$  er det tal som kaldes skalafaktoren.  
 $m \cdot k = t$  da  $m$  og  $t$  har ens modstående vinkler.  
 $p \cdot k = q$  da  $p$  og  $q$  har ens modstående vinkler.  
 $n \cdot k = r$  da  $n$  og  $r$  har ens modstående vinkler.



Pilen på figuren viser hvilken vej vi ganger.  
Hvis vi i stedet valgte at gange siderne i højre trekant, så ville  $k$  stå for et andet tal.

Det er tilladt at bruge et andet bogstav i stedet for  $k$ .  
(Læseren ved ikke på forhånd at  $k$  står for skalafaktoren, så det er nødvendigt at vi skriver det).

### 3.3 Eksempel Udregne og bruge skalafaktor.



Vi begrundet at der er en skalafaktor:

De to trekanter har samme vinkler.  
Derfor er der en skalafaktor  $q$ .

Vi udregner skalafaktoren:

Siderne med længder 15 og 21 har ens modstående vinkler. Derfor er

$$15 \cdot q = 21$$

Vi taster denne ligning  
og får den løst mht.  $q$  for  $q > 0$   
og får

$$\underline{q = 1,4} .$$

Vi bruger skalafaktoren:

Siderne med længder  $c$  og 28 har modstående vinkler der er lige store.  
Derfor er

$$c \cdot 1,4 = 28$$

Vi taster denne ligning  
og får den løst mht.  $c$  for  $c > 0$   
og får

$$\underline{\underline{c = 20}} .$$

## 4: Cosinus og sinus i retvinklet trekant

### 4.1 Definition Vinkels hosliggende katete og modstående katete.

Forestil dig at du sidder i den spidse vinkel  $u$  og holder i de to vinkelben.

De to sider du holder i, kaldes vinklens hosliggende sider.

En af de sider du holder i, er en katete.

Denne side kaldes vinklens hosliggende katete.

Der er én side tilbage som du ikke holder i.

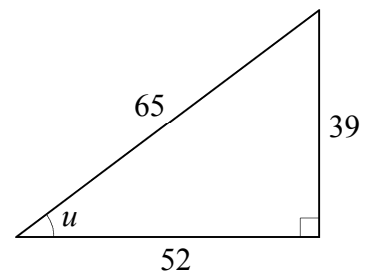
Denne side kaldes vinklens modstående katete.

I den viste trekant gælder altså:

Vinkel  $u$ 's hosliggende katete er 52.

Vinkel  $u$ 's modstående katete er 39.

At en vinkel er spids, betyder at vinklen er mindre end  $90^\circ$ .



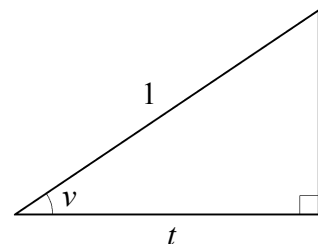
### 4.2 Definition Cosinus og sinus

Når  $v$  er en spids vinkel (f.eks.  $17^\circ$  eller  $62^\circ$ ), er

cosinus til vinklen  $v =$   
 $v$ 's hosliggende katete i en trekant med hypotenuse 1.

Vi skriver

$$\cos(v) = t .$$

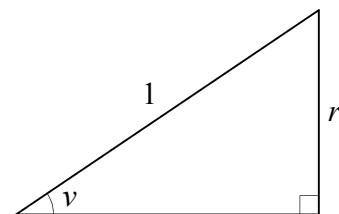


Når  $v$  er en spids vinkel (f.eks.  $17^\circ$  eller  $62^\circ$ ), er

sinus til vinklen  $v =$   
 $v$ 's modstående katete i en trekant med hypotenuse 1.

Vi skriver

$$\sin(v) = r .$$



Lommeregneren (eller matematikprogrammet) **skal** være indstillet til at regne med enheden grader.

### 4.3 Eksempel Udregning af side med cosinus eller sinus.

På lommeregner eller computer får vi udregnet at

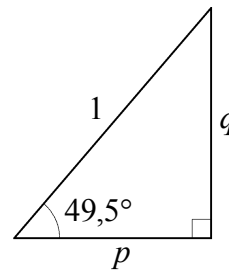
$$\cos(49,5^\circ) = 0,649448$$

$$\sin(49,5^\circ) = 0,760406$$

Så har vi fundet ud af at

$$\underline{\underline{p = 0,649}}$$

$$\underline{\underline{q = 0,760}}$$



### 4.4 Eksempel Udregning af vinkel med cosinus eller sinus.

På billedet ser vi at

$$\cos(u) = 0,800$$

Vi taster denne ligning og får den løst mht.  $u$  for  $0^\circ < u < 90^\circ$  og får  $u = 36,8699^\circ$

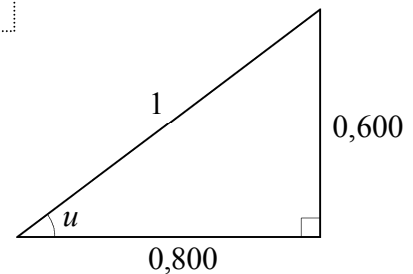
Så har vi fundet ud af at

$$\underline{\underline{u = 36,9^\circ}}$$

Dette resultat kunne vi også have fundet ved at løse ligningen

$$\sin(u) = 0,600$$

Her står at vinkel  $u$  er mellem  $0^\circ$  og  $90^\circ$ .



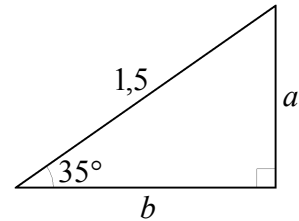
## 4.5 Eksempel

 Retvinklet trekant hvor hypotenusen ikke er 1.

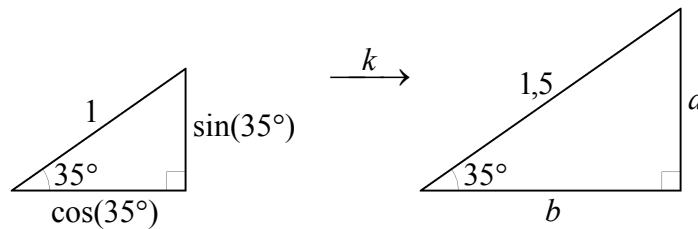
I trekanten til højre er hypotenusen 1,5.

Vi vil bruge  $\cos$  og  $\sin$ . Derfor tegner vi en ny trekant hvor vinklerne er de samme, men hvor hypotenusen er 1.

Kateterne i den nye trekant er tallene  $\cos(35^\circ)$  og  $\sin(35^\circ)$ .  
(Se rammerne 4.2 og 4.3)



Da de to trekanter har samme vinkler, er der en skalafaktor  $k$ :



Vi finder skalafaktoren:

Siderne med længder 1 og 1,5 ligger over for ens vinkler (begge er  $90^\circ$ )

så

$$1 \cdot k = 1,5$$

dvs.

$$k = 1,5.$$

Vi bruger skalafaktoren:

$$1,5 \cdot \sin(35^\circ) = a \quad 1,5 \cdot \cos(35^\circ) = b$$

Resultat:

$$\underline{a = 0,860365} \quad \underline{b = 1,22873}$$

Vi ser at for alle retvinklede trekanter kan vi skrive formler der svarer til

$$1,5 \cdot \cos(35^\circ) = b \quad \text{og} \quad 1,5 \cdot \sin(35^\circ) = a$$

Dette er indholdet af sætningen i ramme 4.6.

## 4.6 Sætning Cosinus og sinus i retvinklet trekant.

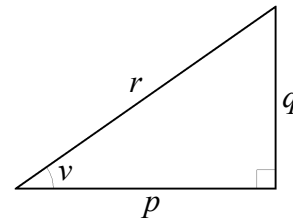
Når

$v$  er en spids vinkel i en retvinklet trekant

$r$  er hypotenusen

$p$  er  $v$ 's hosliggende katete

$q$  er  $v$ 's modstående katete



så gælder:

$$r \cdot \cos(v) = p$$

$$r \cdot \sin(v) = q$$

I mange tilfælde hedder vinklen og siderne noget andet end ovenfor.

Derfor er det ofte en fordel at udtrykke reglen i ord, f.eks. sådan:

Om en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:

– Når vi ganger *cosinus til vinklen*  
med *hypotenusen*  
så får vi *vinklens hosliggende katete*

– Når vi ganger *sinus til vinklen*  
med *hypotenusen*  
så får vi *vinklens modstående katete*

## 5: Tangens i retvinklet trekant

### 5.1 Definition Tangens

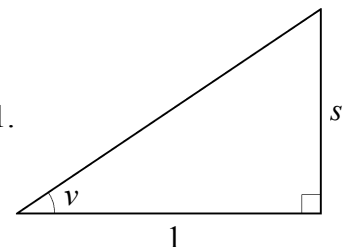
Når  $v$  er en spids vinkel (f.eks.  $17^\circ$  eller  $62^\circ$ ), er

tangens til  $v =$

$v$ 's modstående katete i en trekant hvor  $v$ 's hosliggende katete er 1.

Vi skriver

$$\tan(v) = s .$$



Lommeregneren (eller matematikprogrammet) **skal** være indstillet til at regne med enheden grader.

## 5.2 Sætning Tangens i retvinklet trekant.

Når

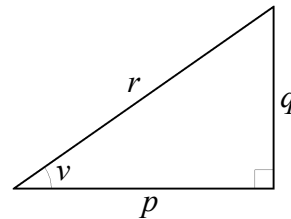
$v$  er en spids vinkel i en retvinklet trekant

$p$  er  $v$ 's hosliggende katetet

$q$  er  $v$ 's modstående katete

så gælder:

$$p \cdot \tan(v) = q$$



I mange tilfælde hedder vinklen og siderne noget andet end ovenfor.

Derfor er det ofte en fordel at udtrykke reglen i ord, f.eks. sådan:

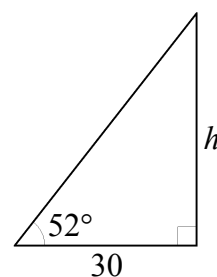
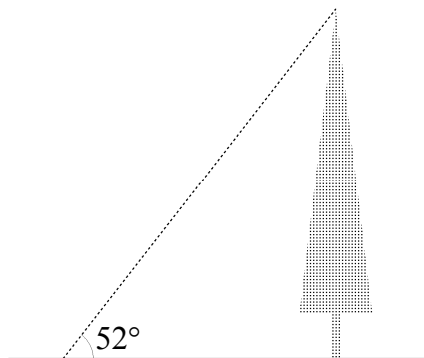
Om en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:

- Når vi ganger *tangens til vinklen*  
med *vinklens hosliggende katete*  
så får vi *vinklens modstående katetet*

## 5.3 Eksempel Tangens i retvinklet trekant.

30 meter fra et træ sigter vi op mod toppen. Vinklen mellem sigtelinje og vandret er  $52^\circ$ .

Trekanten til højre er en model af denne situation.



Enhed: meter

Vi får

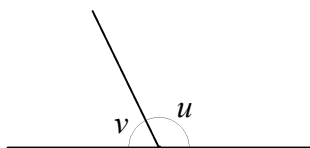
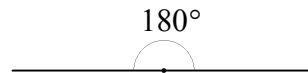
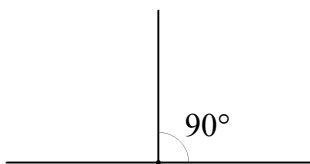
$$h = 30 \cdot \tan(52^\circ) = 38,3982$$

dvs.

Træets højde er 38 m

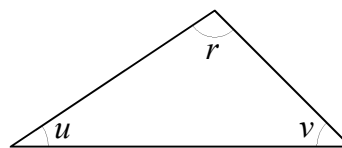
## 6: Vinkler

### 6.1 Regler



$$u + v = 180^\circ$$

$$v = 180^\circ - u$$



Når vi lægger vinklerne i en trekant sammen, så får vi altid  $180^\circ$  :

$$u + v + r = 180^\circ$$

$$r = 180^\circ - u - v$$

En vinkel i en trekant er

**spids** hvis den er under  $90^\circ$

**ret** hvis den er  $90^\circ$

**stump** hvis den er over  $90^\circ$  .

### 6.2 Definition Cosinus til en stump vinkel og til $90^\circ$ .

Hvis  $v$  er  $90^\circ$

så er  $\cos(v) = 0$

dvs.  $\cos(90^\circ) = 0$

Hvis  $v$  er mellem  $90^\circ$  og  $180^\circ$ :

Vi trækker  $v$  fra  $180^\circ$ .

Så får vi en vinkel  $u$  som er under  $90^\circ$ .

Da  $u$  er under  $90^\circ$ , ved vi fra ramme 4.2 hvad der forstås ved  $\cos(u)$  .

Vi definerer at

$$\cos(v) = -\cos(u) \quad \text{hvor} \quad u = 180^\circ - v .$$

### 6.3 Definition Sinus til en stump vinkel og til $90^\circ$ .

Hvis  $v$  er  $90^\circ$

så er  $\sin(v) = 1$

dvs.  $\sin(90^\circ) = 1$

Hvis  $v$  er mellem  $90^\circ$  og  $180^\circ$ :

Vi trækker  $v$  fra  $180^\circ$ .

Så får vi en vinkel  $u$  som er under  $90^\circ$ .

Da  $u$  er under  $90^\circ$ , ved vi fra ramme 4.2 hvad der forstås ved  $\sin(u)$ .

Vi definerer at

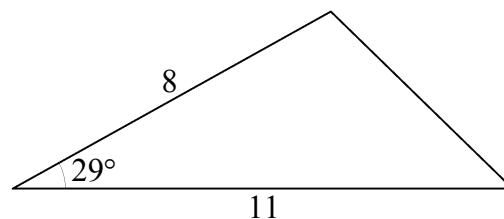
$$\sin(v) = \sin(u) \quad \text{hvor} \quad u = 180^\circ - v.$$

## 7: Udregne areal ved hjælp af sinus

### 7.1 Eksempel Udregne trekants areal ved hjælp af sinus.

I den viste trekant kender vi to sider og vinklen imellem dem.

Vi vil udregne trekantens areal.



Vi tegner en højde  $h$ .

Så har vi to retvinklede trekanter.

I den venstre er (se ramme 4.6)

$$8 \cdot \sin(29^\circ) = h$$

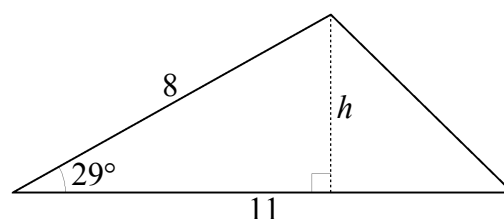
Arealet af hele trekanten er (se ramme 1.3)

$$\text{areal} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot h$$

$$\text{areal} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \cdot \sin(29^\circ)$$

$$\text{areal} = 21,3316$$

$$\text{areal} = \underline{\underline{21,3}}$$



Vi ser at hvis vi har en trekant hvor vi kender to sider og vinklen mellem dem, så kan vi altid finde trekantens areal ved at skrive en ligning der svarer til  $\text{areal} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 \cdot \sin(29^\circ)$ . Her står at

areal =

en halv gange den ene side

gange den anden side

gange sinus til vinklen imellem de to sider.

## 8: Sinusrelationen

### 8.1 Sætning Sinusrelationen.

Hvis der i en trekant gælder

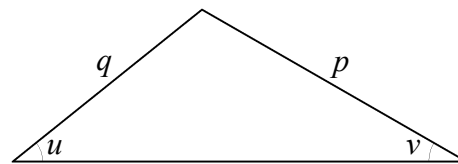
siden  $p$  er modstående til vinklen  $u$

siden  $q$  er modstående til vinklen  $v$

så er

$$\frac{p}{\sin(u)} = \frac{q}{\sin(v)}$$

Denne regel hedder sinusrelationen.



#### Bevis for sinusrelationen

På figuren har vi tilføjet en højde  $h$ .

Højden deler trekanten i to trekanter.

Da disse to trekanter er retvinklede, er

$$q \cdot \sin(u) = h \quad \text{og} \quad p \cdot \sin(v) = h$$

Heraf får vi

$$q \cdot \sin(u) = p \cdot \sin(v)$$

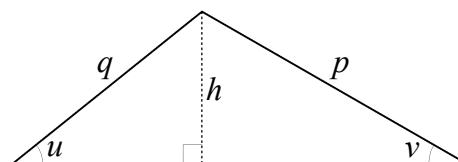
Vi dividerer begge ligningens sider med  $\sin(u) \cdot \sin(v)$  og får

$$\frac{q \cdot \sin(u)}{\sin(u) \cdot \sin(v)} = \frac{p \cdot \sin(v)}{\sin(u) \cdot \sin(v)}$$

Vi forkorter de to brøker:

$$\frac{q}{\sin(v)} = \frac{p}{\sin(u)}$$

Nu har vi bevist at sinusrelationen gælder.



### 8.2 Eksempel Sinusrelationen.

Vi bruger sinusrelationen:

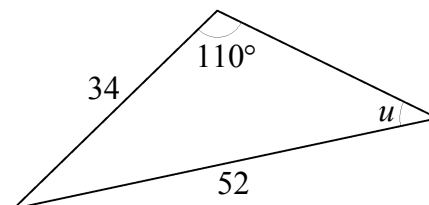
$$\frac{34}{\sin(u)} = \frac{52}{\sin(110^\circ)}$$

Vi taster denne ligning og

får den løst mht.  $u$  for  $u$  mellem  $0^\circ$  og  $90^\circ$  og

får  $u = 37,9094^\circ$

dvs.  $u = 37,9^\circ$



## 9: Cosinusrelationen

### 9.1 Sætning Cosinusrelationen.

Hvis der i en trekant gælder

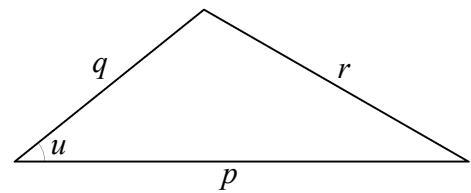
Siderne er  $p$ ,  $q$  og  $r$

Siden  $r$  er modstående til vinklen  $u$

så er

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(u)$$

Denne regel hedder cosinusrelationen.



#### Bevis for cosinusrelationen

På figuren har vi tilføjet en højde.

På figuren ser vi at

$$n = p - m$$

så

$$n^2 = (p - m)^2$$

Vi omskriver højresiden:

$$(1) \quad n^2 = p^2 + m^2 - 2 \cdot p \cdot m$$

Højden deler trekanten i to deltrekanter. Af den venstre får vi

$$(2) \quad q \cdot \cos(u) = m$$

da trekanten er retvinklet.

Da de to deltrekanter er retvinklede, får vi

$$h^2 = q^2 - m^2 \quad \text{og} \quad h^2 = r^2 - n^2$$

Heraf får vi

$$r^2 - n^2 = q^2 - m^2$$

Vi lægger  $n^2$  til begge ligningens sider og får

$$r^2 = q^2 - m^2 + n^2$$

Heri erstatter vi  $n^2$  med højresiden fra (1):

$$r^2 = q^2 - m^2 + p^2 + m^2 - 2 \cdot p \cdot m$$

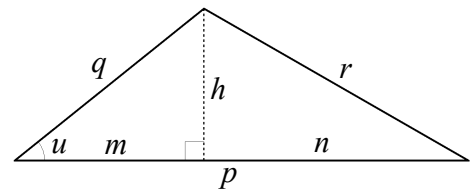
hvoraf

$$r^2 = q^2 + p^2 - 2 \cdot p \cdot m$$

Heri erstatter vi  $m$  med venstresiden i (2):

$$r^2 = q^2 + p^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(u)$$

Nu har vi bevist at cosinusrelationen gælder.



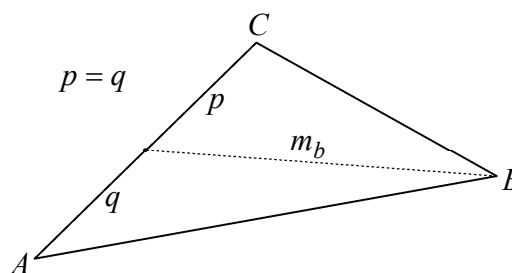
## 10: Tilføjelser

### 10.1 Median

En median i en trekant er et linjestykke der går fra en vinkelspids til midtpunktet af den modstående side.

I enhver trekant er der tre medianer.

På figuren er vist medianen  $m_b$  fra  $B$  på siden  $b$

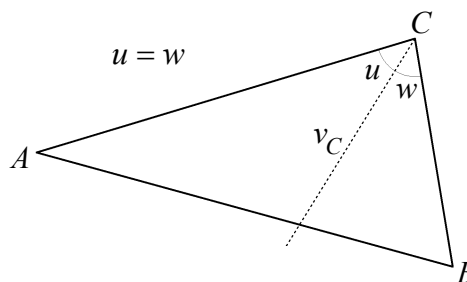


### 10.2 Vinkelhalveringslinje

En vinkelhalveringslinje i en trekant er en linje der går gennem en af vinkelspidserne og halverer vinklen.

I enhver trekant er der tre vinkelhalveringslinjer.

På figuren er vist vinkelhalveringslinjen  $v_C$  for vinkel  $C$ .



### 10.3 Nogle betegnelser

$\angle ABC$  er vinkel  $B$  i trekant  $ABC$ .

Eksempel: På figuren er  $\angle RSQ = v$ .

$AB$  er linjestykket med endepunkter  $A$  og  $B$ .

$|AB|$  er længden af linjestykket  $AB$ .

Eksempel: På figuren er  $PQ$  og  $PS$  ikke samme linjestykke, men  $|PQ| = |PS|$ .

I en trekant  $ABC$  betegner  $A$ ,  $B$  og  $C$  både punkter og vinkler.

Eksempel: Man kan skrive  $P = 90^\circ$  eller  $\angle P = 90^\circ$ .

