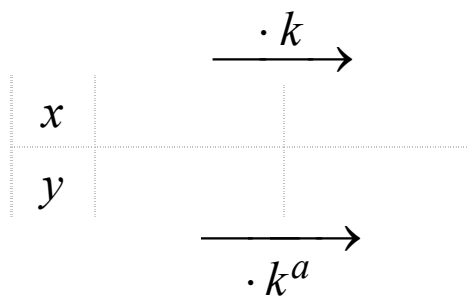


# Potens- sammenhænge

$$y = b \cdot x^a$$



Dette hæfte er en fortsættelse af hæftet "Eksponentielle sammenhænge, 2009".

## Indhold

24. Hvad er en potens-sammenhæng? .....	83
25. Hvordan ser grafen ud for en potens-sammenhæng .....	85
26. Opgaver hvor vi skal bestemme $x$ eller $y$ i $y = b \cdot x^a$ .....	88
27. Hvordan kan vi beregne ændringer i $y$ og $x$ for en potens-sammenhæng? .....	90

### Nyere hæfter:

[http://mat1.dk/kort\\_om\\_potenssammenhaenge.pdf](http://mat1.dk/kort_om_potenssammenhaenge.pdf) 1/5-11

[http://mat1.dk/oeverser\\_til\\_haeftet\\_kort\\_om\\_potenssammenhaenge.pdf](http://mat1.dk/oeverser_til_haeftet_kort_om_potenssammenhaenge.pdf) 29/5-11

Potens-sammenhænge

1. udgave 2009

© 2009 Karsten Juul

Dette hæfte kan downloades fra

[www.mat1.dk](http://www.mat1.dk)

Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til [kj@mat1.dk](mailto:kj@mat1.dk) som dels oplyser at dette hæfte benyttes, dels oplyser om klasse/hold, lærer og skole/kursus.

## Afsnit 24. Hvad er en potens-sammenhæng?

### DEFINITION 24.1 Hvad er en potens-sammenhæng?

Vi kalder en sammenhæng for en potens-sammenhæng hvis den kan beskrives ved en ligning der fås ved at indsætte bestemte tal for  $a$  og  $b$  i ligningen

$$(1) \quad y = b \cdot x^a$$

hvor  $b$  skal være positiv.

### Opgave 24.2: Ligningen

$$(2) \quad y = x^{2,6} \cdot 1,4$$

viser en sammenhæng mellem to variable  $y$  og  $x$ .

Hvilke tal skal vi indsætte for  $a$  og  $b$  i ligningen  $y = b \cdot x^a$  for at få sammenhængen (2)?

Svar:

Vi skal sætte

$$\underline{\underline{a = 2,6}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{b = 1,4}}$$

for når vi gør det, får vi ligningen

$$y = 1,4 \cdot x^{2,6}$$

som kan omskrives til ligningen (2).

Bemærkning: I svaret på 24.2 viste vi at ligningen (2) kan fås ved at sætte bestemte tal ind for  $a$  og  $b$  i ligning (1) i definition 24.1, dvs. vi viste at (2) er en potens-sammenhæng.

### Opgave 24.3: Ligningen

$$(3) \quad y = \frac{4}{x}$$

viser en sammenhæng mellem to variable  $y$  og  $x$ .

Hvilke tal skal vi indsætte for  $a$  og  $b$  i ligningen  $y = b \cdot x^a$  for at få sammenhængen (3)?

Svar:

For at få sammenhængen (3) skal vi i ligningen  $y = b \cdot x^a$  sætte

$$\underline{\underline{a = -1}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{b = 4}}$$

for når vi gør det, får vi ligningen

$$y = 4 \cdot x^{-1}$$

som vi kan omskrive til ligningen (3) da

$$4 \cdot x^{-1} = 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4 \cdot 1}{x} = \frac{4}{x} .$$

Her har vi brugt reglerne

$$p^{-1} = \frac{1}{p} , \quad p \cdot \frac{q}{r} = \frac{p \cdot q}{r} \quad \text{og} \quad p \cdot 1 = p .$$

**Opgave 24.4:** Ligningen

(4)  $y = \sqrt{x}$

viser en sammenhæng mellem to variable  $y$  og  $x$ .Hvilke tal skal vi indsætte for  $a$  og  $b$  i ligningen  $y = b \cdot x^a$  for at få sammenhængen (3)?**Svar:**For at få sammenhængen (3) skal vi i ligningen  $y = b \cdot x^a$  sætte

$$\underline{\underline{a = \frac{1}{2}}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{b = 1}}$$

for når vi gør det, får vi ligningen

$$y = 1 \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

som vi kan omskrive til ligningen (4) da

$$1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} .$$

Her har vi brugt reglerne

$$1 \cdot p = p \quad \text{og} \quad p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{p} .$$

**Øvelse 24.5**Hver af følgende sammenhænge kan vi få ved at sætte tal ind for  $a$  og  $b$  i ligningen  $y = b \cdot x^a$ . Angiv i hvert tilfælde hvad der skal indsættes for  $a$  og  $b$ .

(1)  $y = 4 \cdot x^3$     (2)  $y = x^4 \cdot 3$     (3)  $y = \frac{5,9}{x}$     (4)  $y = 2,5 \cdot \sqrt{x}$  .

**Opgave 24.6:** Et kvadratisk område dækkes med kakler der hver vejer 238 enheder.

- Hvilken udregning skal vi foretage for at beregne vægten af kaklerne hvis området er 2 kakler bredt (og højt)?
- Hvilken udregning skal vi foretage for at beregne vægten af kaklerne hvis området er 3 kakler bredt?
- Hvilken udregning skal vi foretage for at beregne vægten af kaklerne hvis området er 8 kakler bredt?
- Opskriv en ligning til beregning af vægten  $y$  når bredden  $x$  er kendt.

**Svar:**

a)  $238 \cdot 2^2$  .

b)  $238 \cdot 3^2$  .

c)  $238 \cdot 8^2$  .

d)  $y = 238 \cdot x^2$  .

**Bemærkning:** Sammenhængen  $y = 238 \cdot x^2$  er en potens-sammenhæng. Dette følger af definition 24.1 da vi får ligningen  $y = 238 \cdot x^2$  når vi i  $y = b \cdot x^a$  indsætter  $a = 2$  og  $b = 238$  .

*Der er en bemærkning til på næste side.*

Bemærkning: Når bredden er  $t$ , er vægten  $y = \underline{\underline{238 \cdot t^2}}$ .

Når bredden er  $2 \cdot t$ , er vægten  $y = 238 \cdot (2 \cdot t)^2 = 238 \cdot 2^2 \cdot t^2 = \underline{\underline{238 \cdot t^2 \cdot 4}}$ .

Ved at sammenligne de to resultater kan vi se at vægten firedobles når bredden fordobles.

### Øvelse 24.7

Om nogle kasser gælder:

Bredden er 3 gange højden.

Længden er 5 gange højden.

- Når højden er 2, hvad er så bredden? og længden? og rumfanget?
- Opskriv en ligning til beregning af rumfanget  $y$  når højden  $x$  er kendt.
- Når højden er  $t$ , hvad er så rumfanget?
- Når højden er  $2 \cdot t$ , hvad er så rumfanget?
- Hvad sker der med rumfanget når højden fordobles?

## Afsnit 25. Hvordan ser grafen ud for en potens-sammenhæng?

Opgave 25.1: Følgende tre sammenhænge er alle potenssammenhænge (ifølge definition 24.1).

I:  $y = 0,25 \cdot x^{1,9}$

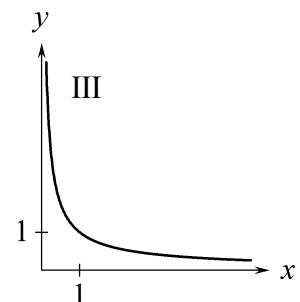
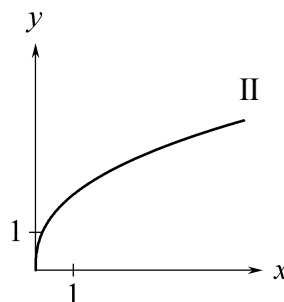
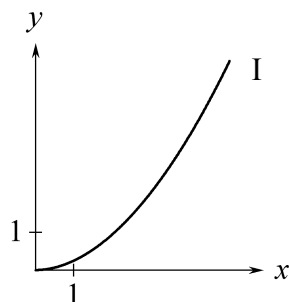
II:  $y = 2 \cdot x^{0,4}$

III:  $y = x^{-0,8}$

Tegn graferne for de tre sammenhænge.

Svar:

Ved hjælp af et elektronisk hjælpemiddel eller ved metoden fra afsnit 4 kan vi tegne graferne.



Bemærkning: Af graferne ses at

de to sammenhænge hvor  $a$  er positiv, er voksende,  
og  
den sammenhæng hvor  $a$  er negativ, er aftagende.

### SÆTNING 25.2

En potenssammenhæng  $y = b \cdot x^a$  er

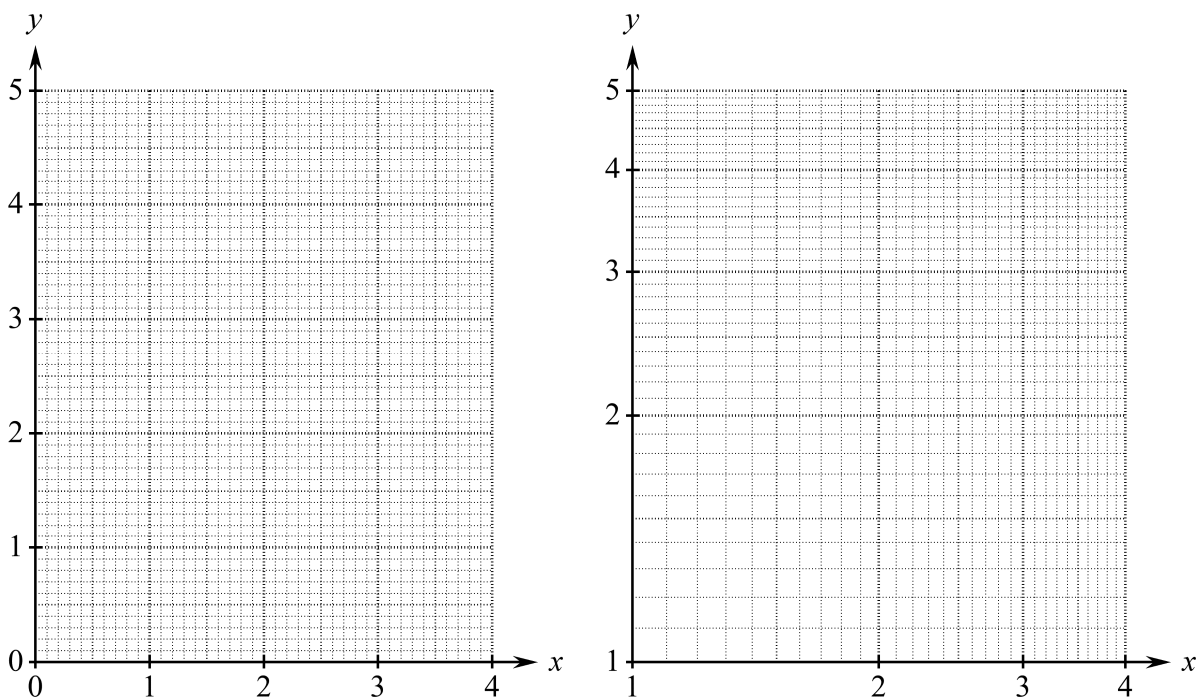
aftagende hvis  $a$  er negativ

og

voksende hvis  $a$  er positiv.

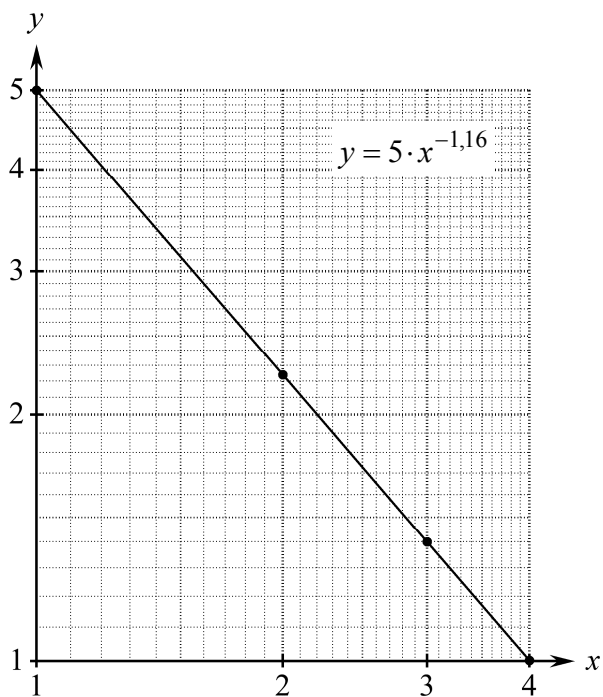
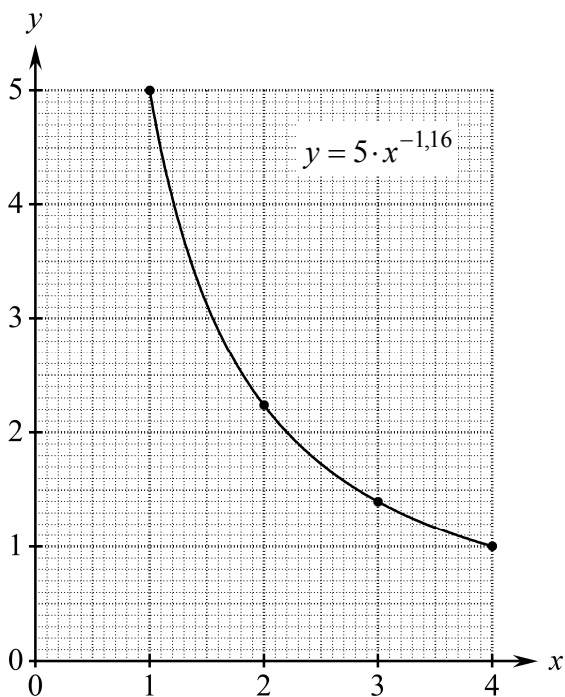
### Dobbeltlogaritmisk koordinatsystem

I koordinatsystemet nedenfor til højre er hver af akserne en speciel type der kaldes en logaritmisk akse. Et koordinatsystem kaldes et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem hvis begge akser er logaritmiske.



**Opgave 25.3:** Tegn grafen for sammenhængen  $y = 5 \cdot x^{-1,16}$  i begge koordinatsystemerne ovenfor.

Svar: Vi bruger metoden fra afsnit 4 og afsætter de fundne punkter i begge koordinatsystemer. (Se næste side).



#### SÆTNING 25.4

Grafen for en potenssammenhæng er en ret linje i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

#### Bemærkning

Når vi ser koordinatsystemer i aviser, tidsskrifter og lærebøger i forskellige fag, skal vi se efter om akserne er sædvanlige, så vi ikke tror at en sammenhæng er lineær når grafen er en ret linje i et dobbeltlogaritmisk (eller enkeltlogaritmisk) koordinatsystem.

## Afsnit 26. Opgaver hvor vi skal bestemme $x$ eller $y$ i $y = b \cdot x^a$

**Opgave 26.1:** For nogle dyr gælder

$$(1) \quad y = 0,24 \cdot x^{2,8}$$

hvor  $y$  er vægten, målt i gram, og  $x$  er længden, målt i cm.

a) Hvad er vægten af et dyr hvis længde er 3 cm?

b) Hvad er længden af et dyr hvis vægt er 0,5 g?

Svar på a): Under ligningen (1) står at  $x$  er længden, så da det oplyste tal 3 er længden, skal 3 indsættes på  $x$ 's plads:

$$y = 0,24 \cdot 3^{2,8}$$

Ved at udregne dette får vi

$$y = 5,2$$

Under ligningen (1) står at  $y$  er vægten, så

et 3 cm langt dyr vejer 5,2 g .

Svar på b): Under ligningen (1) står at  $y$  er vægten, så da det oplyste tal 0,5 er vægten, skal 0,5 indsættes på  $y$ 's plads:

$$0,5 = 0,24 \cdot x^{2,8}$$

For at løse denne ligning starter vi med at dividere begge sider med 0,24:

$$\frac{0,5}{0,24} = \frac{0,24 \cdot x^{2,8}}{0,24}$$

Vi forkorter brøken på højre side og får

$$\frac{0,5}{0,24} = x^{2,8}$$

Denne ligning har løsningen

$$x = \sqrt[2,8]{\frac{0,5}{0,24}}$$

Ved at udregne dette får vi

$$x = 1,3$$

Under ligningen (1) står at  $x$  er længden, så

et dyr hvis vægt er 0,5 g , har længden 1,3 cm .

### **Øvelse 26.2**

Antallet af dyr i en indhegning afhænger af dyrenes længde. Der gælder

$$y = 5800 \cdot x^{-2,3}$$

hvor  $y$  er antal dyr i indhegningen, og  $x$  er dyrenes længde, målt i cm.

- Hvor mange dyr er der i indhegningen, hvis dyrenes længde er 6 cm?
- Hvad er dyrenes længde når der er 19 dyr i indhegningen?

### **Øvelse 26.3**

Sammenhængen mellem tykkelse og længde for visse stængler kan beskrives ved ligningen

$$y = 13 \cdot x^{0,72}$$

hvor  $y$  er længden i cm, og  $x$  er tykkelsen i mm.

Hvor tyk er en 100 cm lang stængel?

### **Øvelse 26.4**

Prisen for nogle figurer er fastlagt ved

$$y = 20 \cdot x^{3,5}$$

hvor  $y$  er prisen i kr. og  $x$  er højden i cm.

En gul figur er 3 cm høj, en rød figur er 5 cm høj, og en blå figur er 7 cm høj.

- Hvor mange kroner er den røde dyrere end den gule?
- Hvor mange kroner er den blå dyrere end den røde?
- Hvor mange procent er den røde dyrere end den gule?
- Hvor mange procent er den blå dyrere end den røde?

## Afsnit 27. Hvordan kan vi beregne ændringer i $y$ og $x$ for en potens-sammenhæng?

**Opgave 27.1:** Det årlige varmetab gennem loftet afhænger af tykkelsen af isoleringen. For en bestemt bolig gælder at

$$y = 5400 \cdot x^{-0,75}$$

hvor  $y$  er varmetabet i kWh og  $x$  er tykkelsen i cm.

- a) Nu er tykkelsen 10 cm. Hvor mange procent vil varmetabet nedsættes hvis tykkelsen øges med 85%?
- b) Nu er tykkelsen 8 cm. Hvor mange procent skal tykkelsen øges for at varmetabet bliver nedsat med 37%?

Svar på a):  $x$  er 10. For at udregne det tal der er 85 % større, skal vi gange med

$$100\% + 85\% = 185\% = \frac{185}{100} = 1,85 : 10 \cdot 1,85 = 18,5 .$$

$$\text{Når } x = 10 \text{ er } y = 5400 \cdot 10^{-0,75} = 960,27 .$$

$$\text{Når } x = 18,5 \text{ er } y = 5400 \cdot 18,5^{-0,75} = 605,36 .$$

Vi udregner hvor mange procent  $y$  er blevet ændret:

$$\frac{605,36 - 960,27}{960,27} = -0,36959 \approx -37\%$$

		+85% →
$x$	10	18,5
$y$	960,27	605,36
		← -37%

Vi har nu fundet ud af at

varmetabet nedsættes 37% når tykkelsen på 10 cm øges med 85%.

Svar på b):  $x$  er 8.

$$\text{Når } x = 8 \text{ er } y = 5400 \cdot 8^{-0,75} = 1135,21$$

dvs.  $y$  er 1135,21. For at udregne det tal der er 37 % mindre, skal vi gange med

$$100\% - 37\% = 63\% = \frac{63}{100} = 0,63 : 1135,21 \cdot 0,63 = 715,18 .$$

Vi finder nu ud af hvad  $x$  er, når  $y$  er 715,18:

$$\text{Vi løser ligningen } 715,18 = 5400 \cdot x^{-0,75}$$

$$\text{og får } x = 14,81 .$$

Vi udregner hvor mange procent  $x$  er blevet ændret:

$$\frac{14,81 - 8}{8} = 0,85125 \approx 85\% .$$

		+85% →
$x$	8	14,81
$y$	1135,21	715,18
		← -37%

Vi har nu fundet ud af at

når tykkelsen på 8 cm øges 85%, så nedsættes varmetabet 37%.

**Bemærkning:** Af svarene på de to spørgsmål ser vi at uanset om tykkelsen er 8 cm eller 10 cm, gælder:

Når tykkelsen øges 85%, så nedsættes varmetabet 37%.

Dette kan også udtrykkes sådan:

Når tykkelsen ganges med 1,85, så ganges varmetabet med 0,63.

## Øvelse 27.2

Et dyr vokser sådan at

$$y = 2,7 \cdot x^{1,6}$$

hvor  $y$  er vægten i gram, og  $x$  er længden i cm.

- Længden blev målt tre gange. Første gang var længden 2 cm, og anden gang var længden 3 cm. Hvad var vægten da dyrets længde første gang blev målt, og hvad var vægten anden gang.
- Hvor mange procent er længden vokset fra første til anden måling, og hvor mange procent er vægten vokset i samme periode?
- Fra anden til tredje måling er vægten vokset 30%. Hvor mange procent er længden vokset i samme periode?

## Opgave 27.3: Bevis for 27.4

I denne opgave står både  $a$ ,  $b$ ,  $k$  og  $t$  for tal som endnu ikke er oplyst.

Ligningen

$$(1) \quad y = b \cdot x^a$$

viser sammenhængen mellem to variable  $y$  og  $x$ .

Hvilken ændring sker i værdien af  $y$ , når  $x$  ændrer værdi fra  $t$  til  $t \cdot k$  ?

Svar:

Vi regner ud hvad  $y$  er når  $x$  er  $t$  og  $t \cdot k$  :

$$\text{Når } x = t \text{ er } y = b \cdot t^a$$

$$\text{Når } x = t \cdot k \text{ er } y = b \cdot (t \cdot k)^a = b \cdot t^a \cdot k^a$$

Af potensreglen

$$(u \cdot v)^s = u^s \cdot v^s$$

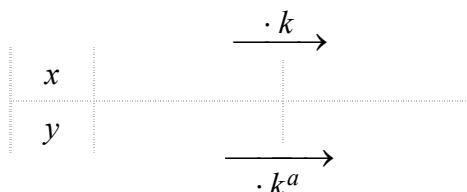
får vi  $(t \cdot k)^a = t^a \cdot k^a$ .

Vi ser at når værdien af  $x$  ændres fra  $t$  til  $t \cdot k$ , så ændres værdien af  $y$

$$\text{fra } b \cdot t^a \text{ til } b \cdot t^a \cdot k^a .$$

Dvs. værdien af  $y$  bliver ganget med  $k^a$  når værdien af  $x$  bliver ganget med  $k$ .

Bemærkning: Da  $t$  ikke indgår i svaret, gælder altså at ligegyldig hvilken værdi  $x$  starter med at have, så vil  $y$  blive ganget med  $k^a$  når  $x$  bliver ganget med  $k$  :



Hvis  $a = 0,94$  og  $k = 1,27$ , er  $k^a = 1,27^{0,94} = 1,252$  så

hver gang  $x$  bliver ganget med 1,27, så bliver  $y$  ganget med 1,252  
dvs.

hver gang  $x$  øges 27%, så bliver  $y$  øget med 25,2%.

Med udregningerne i svaret på opgave 27.3 har vi gjort rede for at følgende regel gælder:

### SÆTNING 27.4

Om en potens-sammenhæng  $y = b \cdot x^a$  gælder for et positivt tal  $k$ :

Hver gang  $x$  bliver ganget med  $k$ , så bliver  $y$  ganget med  $k^a$ .

**Opgave 27.5:** For en cylinder hvor højden er lig diameteren, gælder

$$y = \frac{\pi}{4} \cdot x^3$$

hvor  $y$  er rumfanget og  $x$  er diameteren.

- Hvad sker der med rumfanget af sådan en cylinder når diameteren fordobles?
- Hvor mange procent øges rumfanget når diameteren øges 20% ?

Svar på a): Når  $x$  ganges med 2, så vil  $y$  blive ganget med  $2^3 = 8$  ifølge sætning 27.4 .  
Dvs. rumfanget ottedobles når diameteren fordobles.

Svar på b): Vi skal gange diameteren med 1,20 for at øge den 20% .  
Når  $x$  ganges med 1,20 , så bliver  $y$  ganget med  $1,20^3 = 1,728$  ifølge sætning 27.4 .  
At  $y$  bliver ganget med 1,728 , er det samme som at  $y$  bliver øget 72,8% .  
Dvs. rumfanget øges 72,8% når diameteren øges 20% .

### Øvelse 27.6:

Hvis en vares pris sættes op, så sælges der mindre af den. For en bestemt vare gælder

$$y = 946000 \cdot x^{-2,11}, \quad 10 \leq x \leq 29$$

hvor  $y$  er det beløb der sælges for på en dag, og  $x$  er prisen pr. pakke. (Enheden for  $x$  og  $y$  er kr.).

- Hvor mange procent falder det beløb der sælges for på en dag, hvis prisen sættes op med 20% ?
- Hvor mange procent falder det beløb der sælges for på en dag, hvis prisen sættes op med 40% ?
- Hvor mange procent falder det beløb der sælges for på en dag, hvis prisen sættes op fra 10 kr. til 20 kr.?

### Øvelse 27.7

Om nogle kasser gælder at højden er 2 gange bredden, og længden er 3 gange bredden.

- Hvis bredden er 5, hvad er så kassens overflade?
- Skriv en ligning der viser sammenhængen mellem overfladen  $y$  og bredden  $x$ .
- Hvad sker der med overfladen når bredden fordobles?