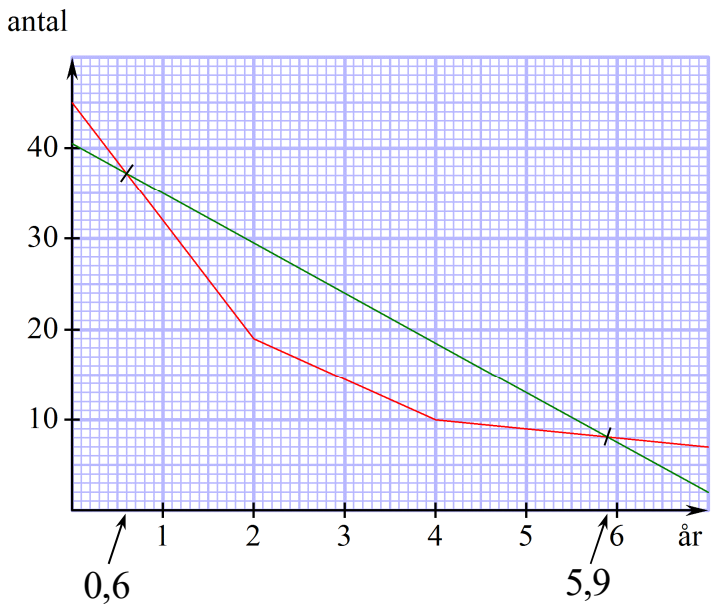
Start-mat

for stx og hf



2017 Karsten Juul

Nyeste version af dette hæfte kan downloades fra http://mat1.dk/noter.htm . Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren sender en e-mail til kj@mat1.dk som oplyser at dette hæfte benyttes og oplyser hold, niveau, lærer og skole.

Side

Koordinater

1.01 Koordinatsystem 1
1.02 Koordinater 1

Funktion

2.01 Eksempel på to størrelser 2
2.02 Variabel 2
2.03 Funktion 2
2.04 Forskrift 2
2.05 $f(x)$-skrivemåde 3
2.06 Opgave-besvarelser 3
2.07 C-, B- og A-niveau 4

Graf

3.01 Hvad er en graf? Oplæg 5
3.02 Definition af graf 5
3.03 Aflæse $f(4)$ på graf for f 6
3.04 Løse $f(x)=6$ på graf for f 6
3.05 Aflæse antal til tiden 1,3 7
3.06 Aflæse hvornår antal er 15 7
3.07 Aflæse hvornår de to kontorer har samme antal 7
3.08 Elektronisk aflæsning 8
3.09 Tegne graf på papir 8
3.10 Tegne graf i Nspire 9
3.11 Ligger punkt på graf? 10
3.12 Bestem k så P ligger på graf 10

Model

4.01 Hvad er en model? 11
4.02 Model og målte tal 11
4.03 Afvigelse 11
4.04 Når x-værdi kun kan være helt tal 11

Regression

5.01 Oplæg 12
5.02 Opgavens formulering 12
5.03 Brugsanvisning til regression i Nspire 12
5.04 Krav til besvarelse 12
5.05 Besvarelsen 13
5.06 Alle tal skal bruges 13
5.07 Når der står ”Brug model” 13
5.08 Årstal 14
5.09 Residualer og største afvigelse 14
5.10 Residualplot 15
5.11 Brugsanvisning til residualplot i Nspire 15

Skæring

6.01 Skæring mellem graf og y-akse 16
6.02 Skæring mellem graf og x-akse 16
6.03 Skæring mellem to graf 16

Opstil forskrift

7.01 Opstil forskrift. Eksempel 1 17
7.02 Samle led 17
7.03 Opstil forskrift. Eksempel 2 18
7.04 Gange ind i parentes 18
7.05 Sætte uden for parentes 18
7.06 Opstil forskrift. Eksempel 3 19
7.07 Hæve parentes 19

Lineær funktion – intro

8.01 Oplæg til definition af lineær funktion 20
8.02 Definition af lineær funktion 20
8.03 Graf for lineær funktion 20

Lineær funktion – løse ligning

9.01 Oplæg 21
9.02 Regler for ligevægt 21
9.03 Eksempel på fejl 21
9.04 Modsat regning 21
9.05 Eksempel på detaljeret løsning 22
9.06 Små-eksempler med regler for ligevægt 22
9.07 Forkorte 23
9.08 Små-eksempler med regler for ligevægt 23

Lineær funktion – betydning af a og b

10.01 Oplæg til betydning af a og b 23
10.02 Sætning om betydning af a og b 23
10.03 Aflæse a og b på graf 24
10.04 Bruge a og b til at afsætte grafpunkter 24
10.05 Graf og fortegn for a 25
10.06 Opgave: Hvad fortæller a og b? 25
10.07 Opgave: Hvad fortæller a og b? 25
10.08 Opgave: Opstil model 26
10.09 Opgave: Opstil model 26
10.10 Eksempel på argumentation 27
10.11 Eksempel på argumentation 27
10.12 Bevis for a-tallets betydning 28
10.13 Bevis for b-tallets betydning 28

Lineær funktion – udregn *a* og *b*

11.01 Bestem *b* ud fra *a* og et punkt 29
11.02 Bestem *a* ud fra *b* og et punkt 29
11.03 Bestem *a* og b ud fra to punkter uden brug af formel 29
11.04 Løs ligningssystem med Nspire 30
11.05 Løs ligningssystem uden hjælpemidler.....30
11.06 Kontrol af facit 30
11.07 Formler for *a* og *b* 31
11.08 Brug af formlerne for *a* og *b* 32

Proportionale størrelser

12.01 Oplæg til definition af proportional 32
12.02 Definition af proportional.....32
12.03 Opgave om proportional.....33

Der er stikordsregister bag i dette hæfte

Øvelser der henvises til i dette hæfte

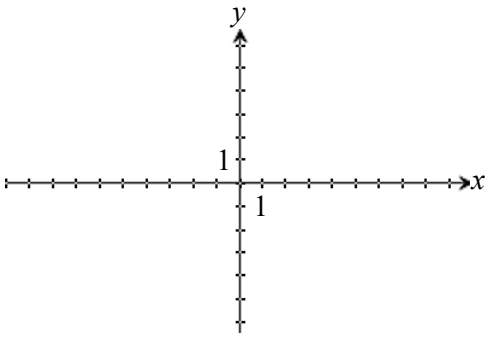
Kan downloades fra http://mat1.dk/noter.htm

start_mat_koordinater.tns
start_mat_funktion.tns
start_mat_graf.tns
start_mat_skaering.tns
start_mat_opstil_1del.tns
start_mat_opstil_2del.tns
start_mat_opstil_3del.tns
start_mat_lineaer_intro.tns
start_mat_lineaer_loese.tns
start_mat_linaer_tolk_a_b.tns
start_mat_linaer_tolk_a_b_2.tns
start_mat_linaer_tolk_a_b_3.tns
start_mat_lineaer_udregn_a_b_1del.tns
start_mat_lineaer_udregn_a_b_2del.tns
start_mat_proportional.tns
start_mat_skyder.tns

1. Koordinater

1.01 Koordinatsystem

Figuren viser et koordinatsystem.



Koordinatsystemet består af to tallinjer:

Den vandrette tallinje kaldes x-aksen eller førsteaksen .

Den lodrette tallinje kaldes y-aksen eller andenaksen .

På hver af tallinjerne er der en pil:

tallene bliver større i pilens retning.

Det er altså en fejl at sætte pil i den anden ende af tallinjen.

1.02 Koordinater

Afsnit 1.2 kan gennemgås ved at løse opgaverne i start_mat_koordinater.tns

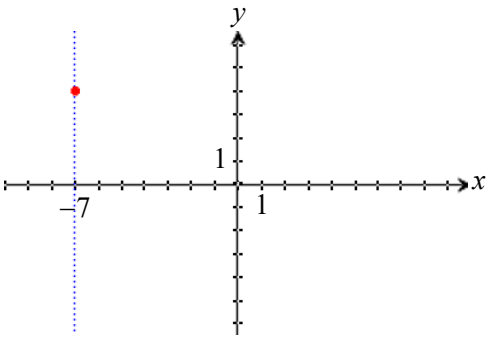
Hvert punkt i koordinatsystemet har et koordinatsæt .
Det røde punkt på figurerne nedenfor har koordinatsættet $(-7, 4)$.

Det første af tallene i koordinatsættet kaldes
x-koordinaten eller førstekoordinaten .

Det andet af tallene i koordinatsættet kaldes
y-koordinaten eller andenkoordinaten .

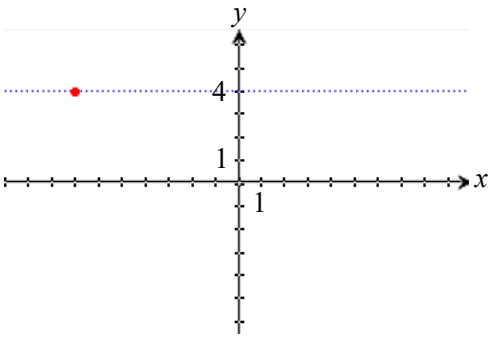
x-koordnat

En lodret linje gennem punktet skærer x-aksen ved -7 .
Derfor er x-koordinaten lig -7 .



y-koordnat

En vandret linje gennem punktet skærer y-aksen ved 4 .
Derfor er y-koordinaten lig 4 .



2. Funktion

2.01 Eksempel med to størrelser

Afsnit 2.01-2.05 kan gennemgås ved at løse opgaverne i start_mat_funktion.tns

Billedet til højre viser et rektangel på en computerskærm.

Når man trækker i det røde punkt,
så ændres bredde og højde
som det er vist på de to billeder nedenfor.

2.02 Variabel

En talstørrelse der ændres kaldes en variabel .

Bredden er er en variabel.
Højden er en variabel.

Man bruger ofte et bogstav som navn for en variabel:

b = bredde
h = højde

På et af billederne ovenfor ser vi:

Når $b = 5{,}5$ så er $h = 7{,}5$.

2.03 Funktion

Der gælder

højden er en funktion af bredden

fordi der gælder

til hver værdi af bredden er der én værdi af højden.

(Der gælder også: bredden er en funktion af højden).

2.04 Forskrift

På hvert af de tre billeder ovenfor ser vi at man får højden ved at lægge 2 til bredden. Det viser sig at dette altid gælder for denne figur:

$$h = b + 2 .$$

Udtrykket på ligningens højre side kaldes

en forskrift for funktionen

eller

en regneforskrift for funktionen.

Ofte er en forskrift mere indviklet, f.eks.:

$$y = 3 \cdot x^2 - x + 5 .$$

2.05 $f(x)$-skrivemåde

I stedet for

$$h = b + 2$$

skriver man ofte

$$h(b) = b + 2 .$$

Så gælder

$h(5)$ er højden når bredden er 5 .

Symbolet

$$h(5)$$

læses

h af 5 .

Når man indsætter et tal for b i

$$h(b) = b + 2$$

så skal man huske at indsætte det på begge sider af lighedstegnet:

$$h(5) = 5 + 2$$
$$h(5) = 7$$

højden svarende til bredden 5 er lig 7 .

Skrivemåden $h(\ )$ kaldes funktions-skrivemåde.

Her er endnu et eksempel på denne skrivemåde:

$$f(x) = 3 \cdot x^2 - x + 5$$
$$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 + 5$$
$$f(2) = 15$$

Vi siger: Funktionsværdien af 2 er 5 .

2.06 Opgave-besvarelser

Opgave

I en model kan antallet af dyr beskrives ved

$$f(x) = 121 \cdot 1{,}07^x$$

hvor y er antal dyr og x er tiden målt i uger efter oversvømmelsen.

a) Bestem antal dyr 5 uger efter oversvømmelsen,

b) Bestem hvornår antallet af dyr er 500.

Besvarelse

$f(x) = 121 \cdot 1.07^x$

$f(x)$ er antal dyr

x er tid i uger efter oversvømmelsen.

HUSK at skrive de oplysninger fra opgaveteksten som du bruger.

a) $f(5) = 121 \cdot (1.07)^5 = 169.709 \approx 170$

5 uger efter oversvømmelsen er antal dyr 170 .

Hvis f(5)= skrives i samme matematikfelt som $121 \cdot 1.07^5$, så kommer det ikke til at stå korrekt.

b) Nspire løser ligningen $500 = 121 \cdot 1.07^x$

mht. x og får $x=20.9702 \approx 21$

Over solve skrives hvad solve udfører, da solve ikke er normalt matematiksprog.

$\text{solve}\left(500=121 \cdot (1.07)^x, x\right) \blacktriangleright x=20.9702$

21 uger efter oversvømmelsen er antal dyr 500 .

HUSK at skrive konklusion til hvert spørgsmål, og markér facit i konklusionen.

2.07 C-, B- og A-niveau

Eksempel på C-niveau

På en skærm er der et rektangel som kan ændres.
$f(x) = 1{,}4 \cdot x + 0{,}8$ hvor x er bredden og $f(x)$ er højden.
Vi bestemmer rektanglets areal når bredden er $4{,}5$:

Når bredde $= 4{,}5$
er højde $= f(4{,}5) = 1{,}4 \cdot 4{,}5 + 0{,}8 = 7{,}1$.
Rektanglets areal er

$$\text{bredde} \cdot \text{højde} = 4{,}5 \cdot 7{,}1 = \underline{\underline{31{,}95}}$$

Eksempel på B-niveau

På en skærm er der et rektangel som kan ændres.
$f(x) = 1{,}4 \cdot x + 0{,}8$ hvor x er bredden og $f(x)$ er højden.
Vi bestemmer en forskrift for rektanglets areal $g(x)$ som funktion af bredden x .

Når bredde $= x$
er højde $= f(x) = 1{,}4 \cdot x + 0{,}8$.
Rektanglets areal er

$$\text{bredde} \cdot \text{højde} = x \cdot (1{,}4 \cdot x + 0{,}8) = 1{,}4 \cdot x^2 + 0{,}8 \cdot x$$

$$\underline{\underline{g(x) = 1{,}4 \cdot x^2 + 0{,}8 \cdot x}}$$

Eksempel på A-niveau

På en skærm er der et rektangel som kan ændres.
$f(x) = a \cdot x + b$ hvor x er bredden og $f(x)$ er højden.
Vi bestemmer en forskrift for rektanglets areal $g(x)$ som funktion af bredden x .

Når bredde $= x$
er højde $= f(x) = a \cdot x + b$.
Rektanglets areal $g(x)$ er

$$\text{bredde} \cdot \text{højde} = x \cdot (a \cdot x + b) = a \cdot x^2 + b \cdot x$$

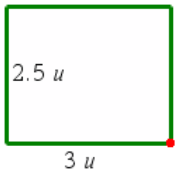
$$\underline{\underline{g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x}}$$

3. Graf

3.01 Hvad er en graf? Oplæg.

Afsnit 3.01-3.05 kan gennemgås ved at løse opgaverne i start_mat_graf.tns

Billedet til højre viser et rektangel på en skærm. Man kan ændre rektanglet ved at trække i det røde punkt. Ved at gøre dette kan man se at



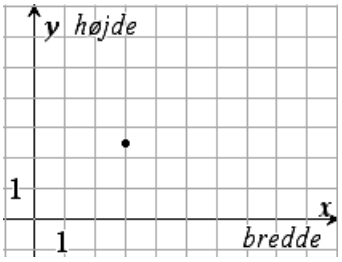
højden er en funktion af bredden

fordi der gælder

til hver værdi af bredden er der én værdi af højden.

På billedet ser vi at når bredden er 3 , så er højden 2,5 .

Denne oplysning afsætter vi som et punkt i koordinatsystemet.



En person der ser koordinatsystemet, kan se:

x-koordinat = 3 og y-koordinat = 2,5 .

Dette fortæller:

når bredde er 3, er højde 2,5 ,

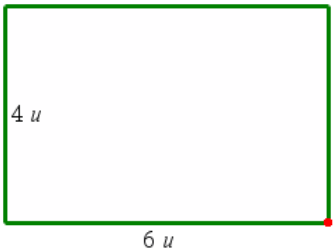
dvs.

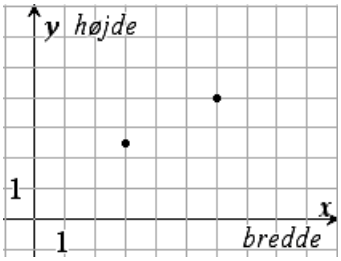
funktionsværdien af 3 er 2,5 .

Hvis funktionen kaldes f, kan dette skrives

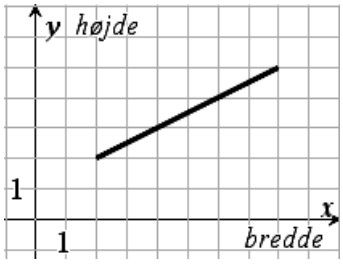
$f(3) = 2{,}5$.

Vi trækker i det røde punkt så bredde bliver 6. Vi ser at højde er 4. Denne oplysning afsætter vi i koordinatsystemet.





Hvis der for hver bredde er et punkt i koordinatsystemet, så har vi funktionens **graf** :



3.02 Definition af graf

En **definition** er en forklaring på hvad et ord betyder.

Grafen for en funktion f består at de punkter (x,y) hvor

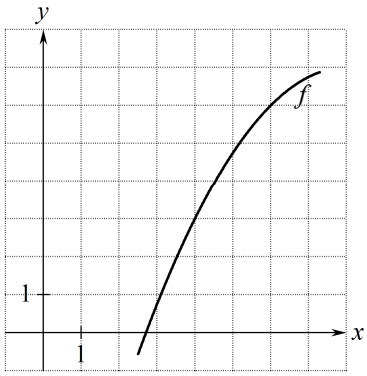
y er funktionsværdien af x ,

dvs.

$y = f(x)$.

3.03 Aflæse $f(4)$ på graf for f

Vi vil aflæse tallet $f(4)$ på grafen.

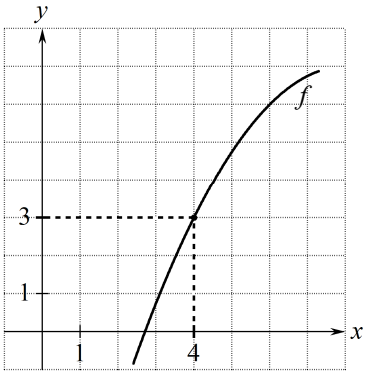


Tallet i parentesen er x-værdien.
Vi skal altså finde det punkt på grafen som har x-koordinat 4 .

Vi ser at punktets y-koordinat er 3 .

$f(4)$ = y-koordinat til grafpunkt med x-koordinat 4

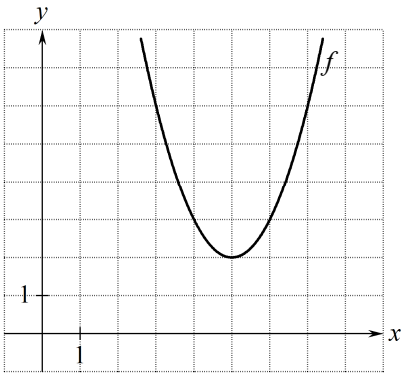
$\underline{\underline{f(4) = 3}}$ Se markering på figur.



Når vi aflæser et tal på en figur, skal vi skrive tallet på figuren der hvor vi har aflæst det.
Hvis der ikke er plads, kan vi lave en pil fra tallet til det sted hvor det er aflæst.

3.04 Løse $f(x)=6$ på graf for f

Vi vil aflæse løsningerne til ligningen $f(x) = 6$ på grafen.



Da $f(x)$ er y-værdien, står der at y-værdien er 6 .

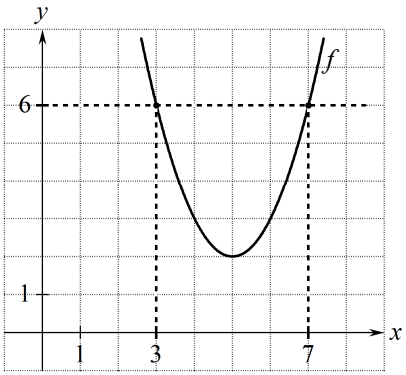
Derfor skal vi finde de punkter på grafen hvor y-koordinaten er 6 .
Der står x i parentesen, så facit er x-koordinaterne til de punkter vi har fundet.

Løsningerne til $f(x) = 6$ er x-koordinaterne til de grafpunkter hvis y-koordinat er 6.

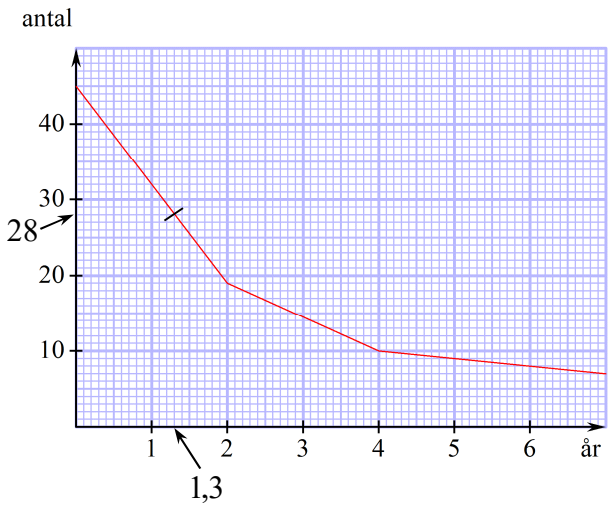
Løsningerne til $f(x) = 6$ er

$\underline{\underline{x = 3 \text{ eller } x = 7}}$.

Se markering på figuren.



3.05 Aflæse antal til tiden 1,3



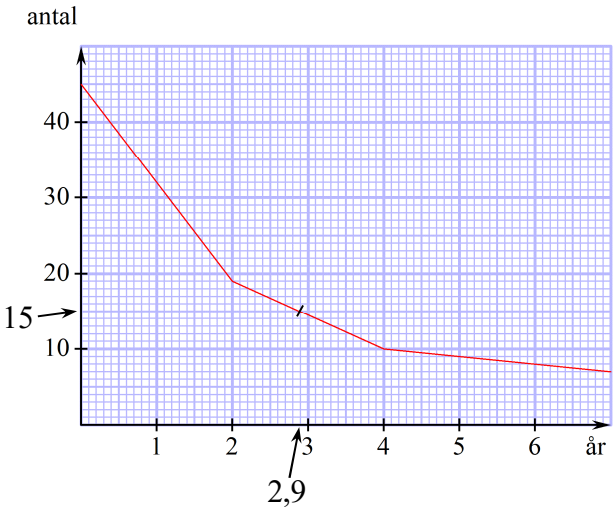
Grafen viser antal ansatte som funktion af tiden (år efter kontorets oprettelse).

Vi vil bestemme antal til tiden 1,3 år.

For at gøre dette, finder vi det punkt på grafen hvor x (tiden) er 1,3 . Vi ser at dette punkts y er 28 , og y er antal.

Til tiden 1,3 år er antal lig 28 .

3.06 Aflæse hvornår antal er 15

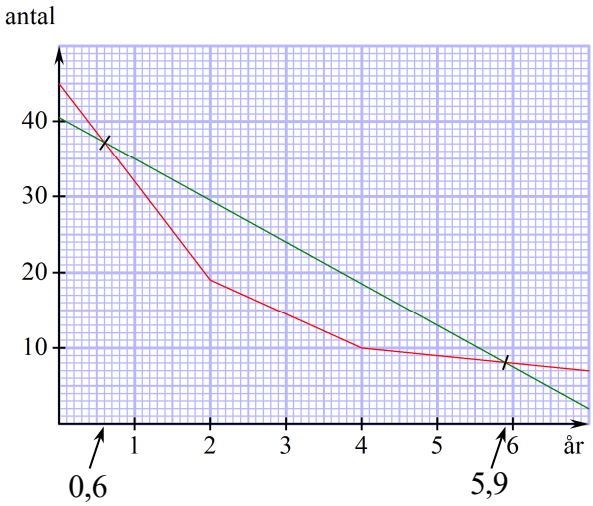


Vi vil bestemme hvornår antal er 15.

Vi finder det punkt på grafen hvor y (antal) er 15 . Vi ser at dette punkts x er 2,9 , og x er tid.

Antal er 15 til tiden 2,9 år.

3.07 Aflæse hvornår de to kontorer har samme antal



I koordinatsystemet er tilføjet grafen for et andet kontor.

Vi vil bestemme hvornår de to kontorer har samme antal.

Vi finder de x-værdier (tider) hvor de to grafer har samme y (antal). Vi ser at det er x-værdierne 0,6 og 5,9 .

De to kontorer har samme antal til tiderne 0,6 år og 5,9 år .

3.08 Elektronisk aflæsning

Hvis graferne er tegnet i Nspire,
så kan aflæsningerne i 3.2 og 3.1 foretages elektronisk.

Ved elektronisk aflæsning udfører Nspire en udregning
der finder resultatet med stor nøjagtighed .

Sådan aflæses en graf elektronisk:

Skift til vindue med graf. Vælg i værktøjsmenu

Geometri / Punkter og linjer / Punkt på .

Klik på graf (ikke i skæring). Klik igen.
Så fremkommer et punkt på grafen.
Tryk på esc (så du kan foretage dig andet).

På nogle grafer fremkommer punktets koordinatsæt automatisk.
Hvis ikke, så højreklik på punktet og vælg

Koordinater og ligninger .

Dobbeltklik på den af koordinaterne som er kendt,
og ret den til den kendte værdi.

Så ændres den ukendte koordinat automatisk til den søgte værdi.

3.09 Tegne graf på papir

På papir vil vi tegne grafen for funktionen

$$f(x) = \frac{12}{x} \quad , \quad 1 \le x \le 4 \ .$$

Dette betyder at x kan være 1 eller 4 eller et tal mellem 1 og 4 . Tal mellem 1 og 4 er også et tal som f.eks. 1,37 .

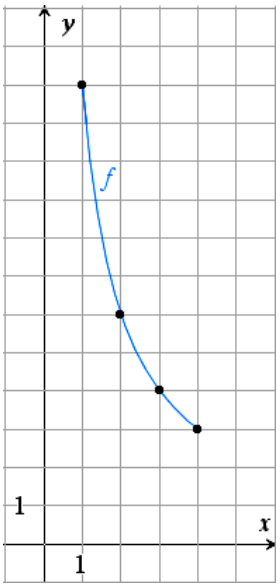
For grafpunktet med x-koordinat 2 er y-koordinaten

$$f(2) = \frac{12}{2} = 6 \ .$$

På tilsvarende måde er de andre y-koordinater i tabellen udregnet:

x:	1	2	3	4
y:	12	6	4	3

Vi afsætter disse punkter i et koordinatsystem og tegner en kurve gennem dem.



3.10 Tegne graf i Nspire

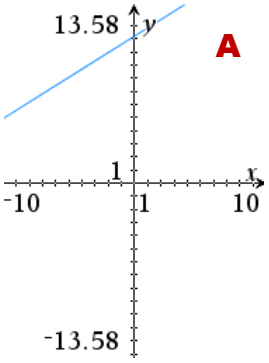
I Nspire vil vi tegne grafen for $f(x) = 0{,}63x+11{,}2$ og aflæse $f(16)$.

Fra grafvinduet vælger vi i værktøjsmenuen

Grafindtastning/Rediger og Funktion,

og taster forskriften.

Vi ser at x-aksen går til 10. Se **A** .



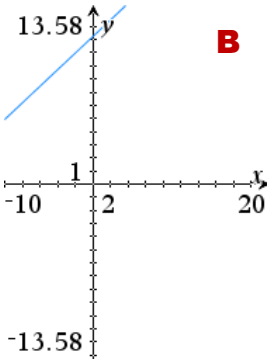
Da vi skal bruge x-værdi 16, lader vi x-akse gå til et tal noget større end 16, f.eks. 20.

Standardmetoden til dette er:

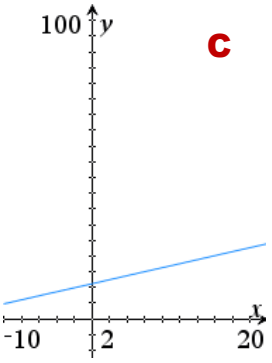
Vælg i Værktøjsmenuen

Vindue/Zoom og Indstillinger for vindue,

og sæt XMax til 20. Se **B** .

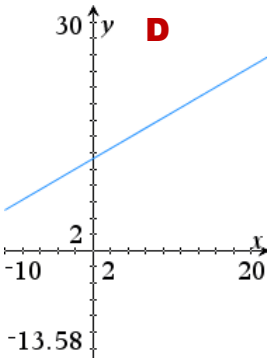


En væsentlig del af grafen ligger over vinduet. Vi må vælge et meget større tal for YMax. Vi kan prøve med 100. Se **C** .

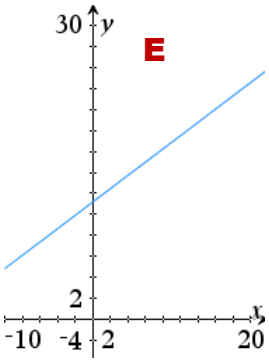


Det var for meget med 100. Grafen skal fylde en større del af koordinatsystemet.

Vi prøver at sætte YMax til 30. Se **D** .



Den negative del af y-aksen er ikke relevant, så vi sætter YMin til et tal tættere på 0, f.eks. –4. Se **E** .

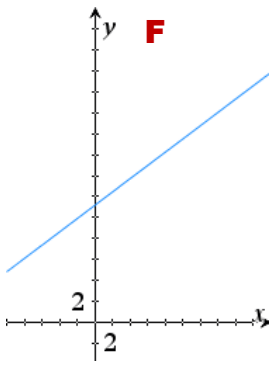


Rammen fortsætter på næste side!

For at pynte på figuren vælger vi i Værktøjsmenuen

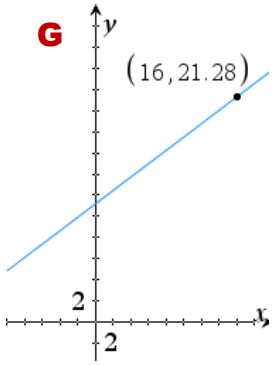
Vis og Skjul aksernes slutværdier.

Se **F** .



Nu kan vi aflæse grafen elektronisk. Se 3.5 .

Hvis koordinatsættet står oven på noget andet, så flytter vi det lidt. Se **G** .



3.11 Ligger punkt på graf?

Vi vil undersøge om punktet $P(2,15)$ ligger på grafen for $f(x) = 3 \cdot x + 8$.

Punktet ligger på grafen netop hvis

funktionsværdien af x-koordinaten 2 er lig y-koordinaten 15 .
ifølge 3.2

Vi udregner funktionsværdien af 2 :

$$f(2) = 3 \cdot 2 + 8 = 6 + 8 = 14 .$$

Funktionsværdien af 2 er altså 14 . Da den ikke er 15, gælder:

Punktet P ligger ikke på grafen for f .

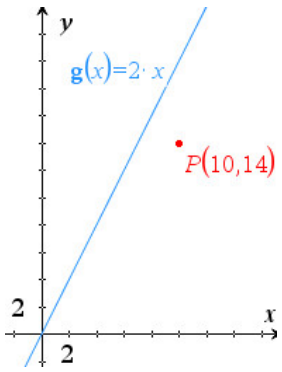
3.12 Bestem k så P ligger på graf

En funktion g har forskriften

$$g(x) = k \cdot x$$

hvor k er et tal.

Billedet viser grafen for g når $k = 2$.
Vi vil bestemme k så P ligger på grafen.



P ligger på grafen netop hvis

$$g(10) = 14$$ ifølge 3.2

dvs.

$$k \cdot 10 = 14$$

Vi løser denne ligning mht. k og får

$$k = 1{,}4$$

P ligger på grafen netop hvis $k = 1{,}4$.

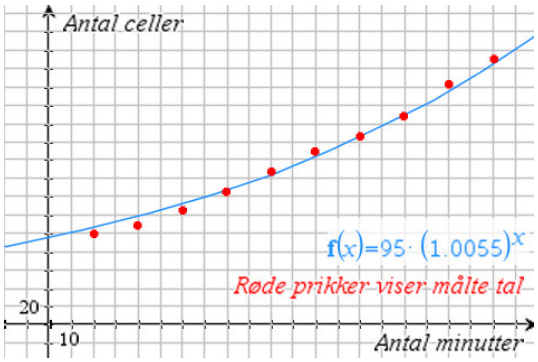
4. Model

4.01 Hvad er en model?

En **model** er noget matematik der ligner noget fra virkeligheden.

Følgende funktion er en model:

$f(x) = 95 \cdot 1{,}0055^x$
$f(x)$ er antal celler
x er antal minutter.



Den blå kurve er graf for f.
De røde prikker er målte tal.

På billedet ser vi f.eks.:

På tidspunktet 20 minutter:
målt antal er lidt mindre end models antal.

På tidspunktet 100 minutter:
målt antal er lidt større end models antal.

4.02 Model og målte tal

Vigtig egenskab ved en matematisk model:

Et målt tal er normalt ikke præcis lig modellens tal.

4.03 Afvigelse

Vi udregner antal dyr med en model. Det viser sig at

forskel på udregnet og målt tal er 200.

Passer model godt med målt tal?

For at svare på dette er det i dette eksempel nødvendigt at sammenligne afvigelsen med størrelsen af det udregnede antal.

Hvis det udregnede antal er 20 000:

Relativ afvigelse: $\frac{200}{20000} = 0{,}01 = 1\%$

Model passer godt med udregnet antal.

Hvis det udregnede antal er 300:

Relativ afvigelse: $\frac{200}{300} = 0{,}67 = 67\%$

Model passer ikke godt med udregnet antal.

4.04 Når x-værdi kun kan være helt tal

I mange opgaver er der en model der ligner følgende:

$f(t)$ = antallet (af et eller andet) t år efter 2003 .

I mange tilfælde er der kun ét antal hvert år (f.eks. antal mio. i et årsregnskab).
Så kan t kun være hele tal.

Hvis spørgsmålet er "hvornår er antallet 23",
og man får $t = 4{,}3$, så er svaret 2007 .

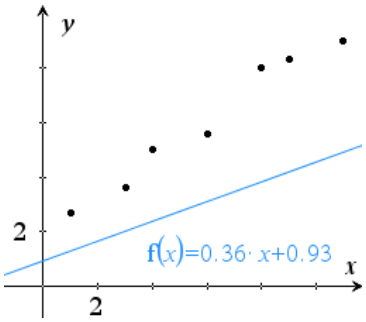
Hvis spørgsmålet er "hvornår overstiger antallet 23",
og man får $t = 4{,}3$, så er svaret 2008 .

Fordoblingstid og halveringstid kan godt angives som f.eks. 4,3 da disse er en angivelse af hvor langsomt antallet ændres.

5. Regression

5.01 Oplæg

Billedet viser Nspire-skærmen.
Den blå linje er graf for funktionen med den viste forskrift.



Med musen kan man flytte og dreje linjen.
Så ændres forskriften automatisk.

De sorte punkter viser målte værdier.

Hvis vi trækker i linjen så den passer godt med punkterne, så vil den viste forskrift være en model af den pågædende sammenhæng.

Vi kan få Nspire til at udføre lineær regression på punkterne.
Så får vi forskriften for den linje der passer bedst med punkterne.

5.02 Opgavens formulering

Vi har målt længde og bredde for nogle plader:

længde i cm	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5
bredde i cm	5,1	5,3	5,9	6,1	6,6

For plader af denne type gælder med god tilnærmelse $y = ax+b$
hvor y er bredde i cm, og x er længde målt i cm.

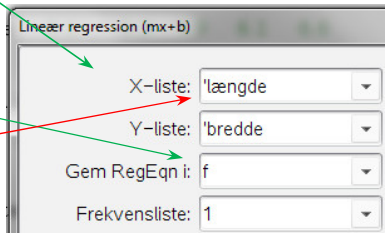
Find tallene a og b.

5.03 Brugsanvisning til regression i Nspire

Del siden op i to. Vælg Noter i venstre vindue.
Vælg Lister og Regneark i højre vindue.
Tast først tabellen.
Når du har tastet tabellen, så flyt markør til tomt felt.

	A	B
1	11.5	5.1
2	12.5	5.3
3	13.5	5.9
4	14.5	6.1
5	15.5	6.6

Vælg i værktøjsmenu:
Statistik / Statistiske beregninger / Lineær regression (mx+b)...
Det fremkomne vindue udfylder du sådan:



I et matematikfelt i notevinduet taster vi
f(x) (hvis vi har tastet f her).
Tryk på **enter** for at få resultatet.

Skal vælges.
IKKE tastes.

5.04 Krav til besvarelse

Besvarelsen skriver du i note-vinduet.

Besvarelsen skal indeholde følgende oplysninger:

Hvilke tal du har tastet.
Hvilke af tallene du har tastet i x-søjlen.
Hvilke af tallene du har tastet i y-søjlen.
At du får Nspire til at udføre regression.
Hvilken type regression.

5.05 Besvarelsen

I Nspire kan besvarelsen se sådan ud:

Længde:	11.5	12.5	13.5	14.5	15.5
Bredde:	5.1	5.3	5.9	6.1	6.6

Med tilnærmelse er $y=ax+b$

hvor x er længde i cm og y er bredde i cm .

Vi taster <u>længder i x–søjle</u> og <u>bredder i y–søjle</u>

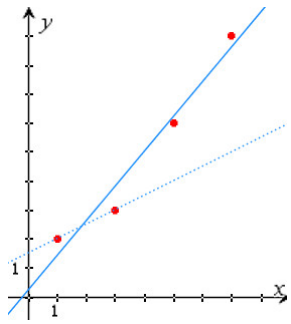
og vælger <u>lineær regression</u> og får $f(x) = 0.38 \cdot x+0.67$

Dvs. $a=0.38$ og $b=0.67$.

5.06 Alle tal skal bruges

Tabel:

***x*:**	1	3	5	7
***y*:**	2	3	6	9



De fire punkter i tabellen er vist som røde prikker.

Hvis vi bruger alle punkter til at bestemme lineær graf, så får vi den fuldt optrukne linje.

Hvis vi kun bruger de to første punkter, så får vi den punkterede linje som passer dårligere med tabellen.

Man skal altså bruge alle tal i tabellen.

5.07 Når der står "Brug model"

For en type vare er y omsætning x dage efter annoncering.

Målte tal:

***x*:**	6	12	18	24
***y*:**	65	103	151	209

Model: $y = 8x +12$

Brug model til at bestemme stigning i omsætning fra 6 til 10 dage efter annoncering.

Fejl at bruge tal fra tabel da vi skal besvare spørgsmål ved hjælp af model.

Forkert: Af tabel: når $x = 6$ er $y = 65$
Af $y = 8x +12$: når $x = 10$ er $y = 8 \cdot 10 + 12 = 92$
Stigning $92 - 65 = 27$

Rigtigt: Af $y = 8x +12$: når $x = 6$ er $y = 8 \cdot 6 + 12 = 60$
Af $y = 8x +12$: når $x = 10$ er $y = 8 \cdot 10 + 12 = 92$
Stigning $92 - 60 = 32$

Fejl at <u>bruge målt tal</u> når <u>vi skal bruge model</u>.

5.08 Årstal

Tabellen viser antallet af boliger i et bestemt område.

Årstal	1998	2000	2002	2004	2006	2008
Antal boliger	133	170	186	218	232	247

Antallet af boliger kan med god tilnærmelse beskrives ved en ligning af typen $y = ax + b$ hvor y er antallet af boliger, og x er antal år efter 1998.

Find tallene a og b.

Vi taster IKKE årstal da x ikke er årstallet!

	A år	B antal
=		
1	0	133
2	2	170

Den tastede tabel hører med til besvarelsen.

På Nspire kan besvarelsen se sådan ud: Se brugsanvisning i 5.03 .

Årstal:	1998	2000	2002	2004	2006	2008
Antal boliger:	133	170	186	218	232	247

Med tilnærmelse er $y = ax+b$ hvor

y er antal boliger og x er år efter 1998

Vi taster år efter 1998 i x–søjle og antal boliger i y–søjle

og vælger lineær regression og får $f(x) = 11.2571 \cdot x + 141.381$

Dvs. $a = 11.3$ og $b = 141.4$.

5.09 Residualer og største afvigelse

I de to øverste rækker i tabellen står tallene fra 5.02 ,
dvs. anden række viser de målte y-værdier.

Vi fandt modellen $y = 0{,}38 \cdot x + 0{,}67$. I denne model gælder:
Når $x = 11{,}5$, så er $y = 0{,}38 \cdot 11{,}5 + 0{,}67 = 5{,}04$.
I tredje række står modellens y-værdier.

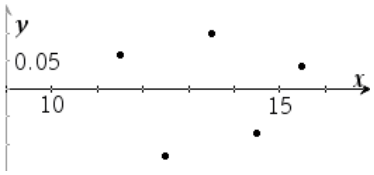
I fjerde række har vi trukket models y fra målt y .
Tallene i denne række kaldes **residualer** .

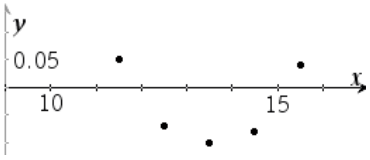
Længde i cm	x	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5
Bredde i cm	$y_{\text{målt}}$	5,1	5,3	5,9	6,1	6,6
Bredde i cm	y_{model}	5,04	5,42	5,8	6,18	6,56
Residual i cm	$y_{\text{målt}} - y_{\text{model}}$	0,06	–0,12	0,1	–0,08	0,04

Vi ser at den største afvigelse mellem målt værdi og modelværdi for bredden er 0,12 cm, og det er når længden er 12,5 cm.

5.10 Residualplot

I koordinatsystemet nedenfor til venstre er vist residualerne fra 5.09 .
Dette kaldes et **residualplot** .





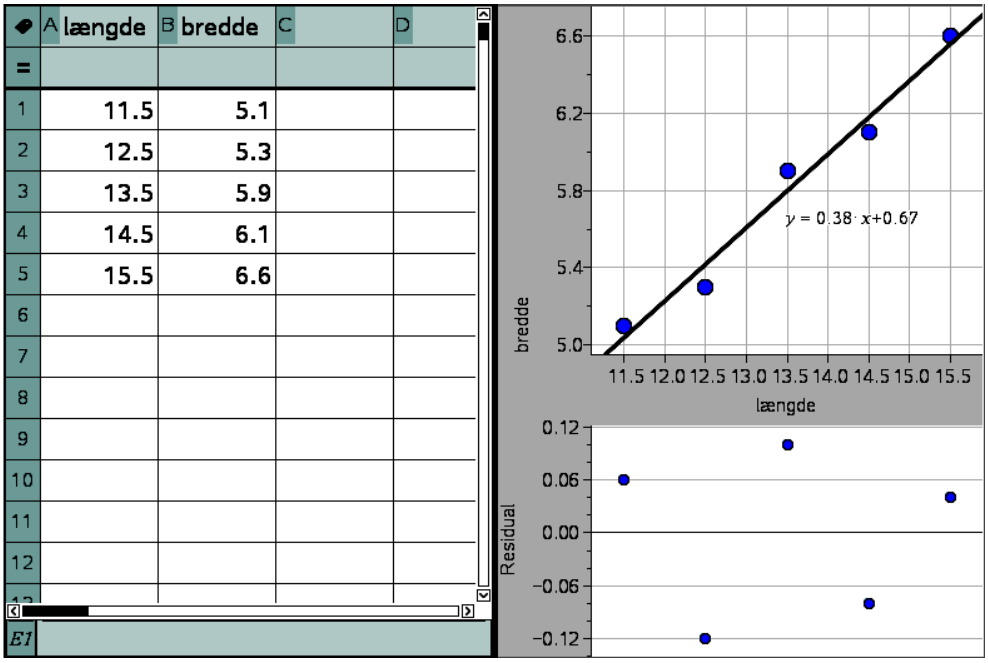
Afvigelserne virker tilfældige.
Dette tyder på at det er rimeligt at bruge en model af typen $y = a \cdot x + b$.

Hvis afvigelserne ligger på kæde som vist til højre, så tyder det på at det er bedre at bruge en anden type model.

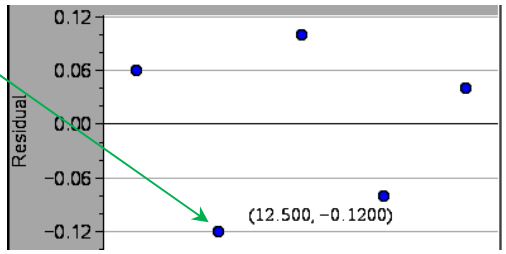
5.11 Brugsanvisning til Residualplot i Nspire

På Nspire kan vi nemt få vist residualplottet:

Start på ny opgave.
Vælg et vindue af typen Lister og regneark .
Navngiv en søjle og tast x-værdier i den.
Navngiv en søjle og tast y-værdier i den.
Tilføj et vindue af typen Diagrammer og statistik .
Klik under x-aksen og vælg søjlen med x-værdier.
Klik til venstre for y-aksen og vælg søjlen med y-værdier.
Vælg i værktøjsmenuen Undersøg data / Regression / lineær .
Vælg i værktøjsmenuen Undersøg data / Residualer / Residualplot .



På residualplottet finder vi punktet med størst afstand til x-aksen.
Når markøren føres hen til punktet, fremkommer koordinatsættet.



Vi ser at den største afvigelse mellem målt værdi og modelværdi for bredden er 0,12 cm, og det er når længden er 12,5 cm.

6. Skæring

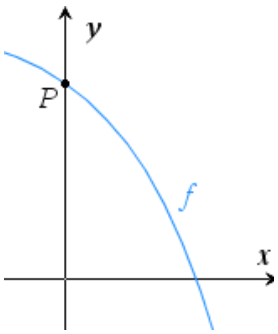
6.01 Skæring mellem graf og y-akse

Afsnit 6 kan gennemgås ved at løse opgaverne i start_mat_skaering.tns

$P(x_1, y_1)$ er skæringspunkt mellem f-graf og y-akse.

Billedet viser grafen for funktionen

$$f(x) = 4 - 2^x$$



P ligger på y-aksen, så

$$x_1 = 0 .$$

P ligger på f-grafen, så

$y_1 = 4 - 2^0$ ifølge 3.02 og $x_1 = 0$.

$y_1 = 3$ Kan udregnes i Nspire.
(I dette specielle tilfølde kan det også udregnes uden Nspire da et tal opløftet til 0 altid er lig 1 , f.eks. $2^0 = 1$).

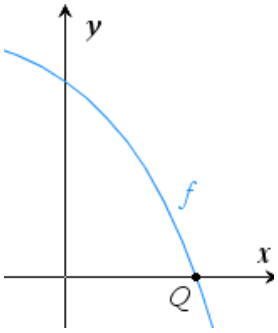
$P = (0 , 3)$

6.02 Skæring mellem graf og x-akse

$Q(x_2, y_2)$ er skæringspunkt mellem f-graf og x-akse .

Q ligger på x-aksen, så

$$y_2 = 0$$



Q ligger på f-grafen, så

$4 - 2^{x_2} = 0$ ifølge 3.02 og $y_2 = 0$.

$x_2 = 2$ Nspire kan finde løsningen.
(I dette specielle tilfølde kan vi kontrollere løsningen uden Nspire).

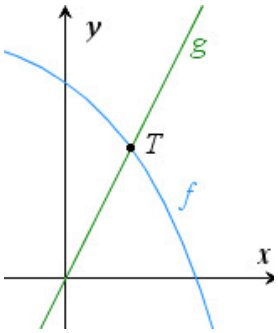
$Q = (2 , 0)$

6.03 Skæring mellem to grafer

$T(x_3, y_3)$ er skæringspunkt mellem f-graf og g-graf .

På billedet er tilføjet grafen for funktionen

$$g(x) = 2 \cdot x$$



T ligger på f-grafen, så

$y_3 = 4 - 2^{x_3}$ ifølge 3.02

T ligger på g-grafen, så

$y_3 = 2 \cdot x_3$ ifølge 3.02

$4 - 2^{x_3}$ og $2 \cdot x_3$ er altså begge lig y_3 , så

$$4 - 2^{x_3} = 2 \cdot x_3$$

$x_3 = 1$ Nspire kan finde løsningen.
(I dette specielle tilfølde kan vi kontrollere løsningen uden Nspire da et tal opløftet til 1 altid er lig tallet, f.eks. $2^1 = 2$) .

T ligger på g-grafen, så

$y_3 = 2 \cdot 1$ ifølge 3.02 og $x_3 = 1$.

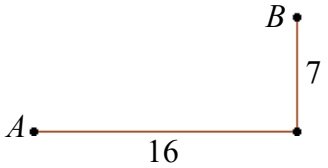
$T = (1 , 2)$

7. Opstil forskrift

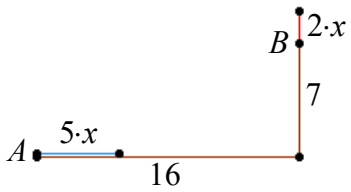
7.01 Opstil forskrift
Eksempel 1

Afsnit 7.01-7.02 kan gennemgås ved at løse opgaverne i start_mat_opstil_1.tns

I en park er en sti der går fra A til B.
På billedet ses stien ovenfra.
Enheden for tallene er km.



I begyndelsen af stien skal fjernes et stykke, og i slutningen skal tilføjes et stykke.



Af tekniske grunde skal bestyrelsen vælge et tal x, så det der fjernes, er $5 \cdot x$, og det der tilføjes er $2 \cdot x$.

For den nye sti gælder

længde er en funktion af x

fordi der gælder

til hver værdi af x er der én værdi af længden.

Vi kalder funktionen f.

Ud fra billedet ser vi at f har følgende forskrift:

$$f(x) = 16 - 5 \cdot x + 7 + 2 \cdot x .$$

7.02 Samle led

For at skrive forskriften simplere (reducére den), skal vi:

1) Først gøre os klart hvilke **led** der er.
   Plus og minus skiller led, så der er følgende fire led:
   $16 \qquad -5 \cdot x \qquad +7 \qquad +2 \cdot x$

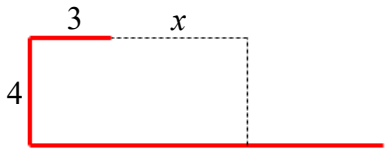
2) Dernæst skal vi gøre os klart hvilke af leddene der af samme type:
   Led nr. 2 og 4 er af typen tal gange x, så de er samme type.
   Led nr. 1 og 3 er af typen tal uden bogstav, så de er af samme type.

3) Til sidst skal led af samme type slås sammen:
   $16 + 7 = 23$
   $-5 \cdot x + 2 \cdot x = -3x$
   Dvs.
   $f(x) = 23 - 3 \cdot x .$

7.03 Opstil forskrift Eksempel 2

Afsnit 7.03-7.05 kan gennemgås ved at løse opgaverne i start_mat_opstil_2.tns

Billedet vser en indhegning set ovenfra. Tallenes enhed er meter. En del af hegnet udgøres af en eksisterende rød mur.



Indhegningen skal være x meter længere end den eksisterende mur på 3 meter.

For indhegningen gælder

areal er en funktion af x

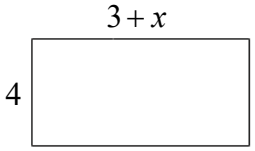
fordi der gælder

til hver værdi af x er der én værdi af arealet.

Vi kalder funktionen f.

Vi vil finde en forskrift for f:

Metode 1:



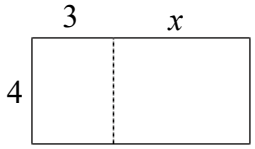
bredde = 4
længde = $3 + x$

areal = bredde·længde
areal = $4 \cdot (3 + x)$

$f(x) = 4 \cdot (3 + x)$

4 · 3 + x er forkert . I 4 · 3 + x står IKKE at 4 skal ganges med 3+x . Der står kun at 4 skal ganges med 3 .

Metode 2:



venstre areal = $4 \cdot 3$
højre areal = $4 \cdot x$

areal = $4 \cdot 3 + 4 \cdot x$

$f(x) = 12 + 4 \cdot x$

$4 \cdot (3 + x)$ og $4 \cdot 3 + 4 \cdot x$ er forskrift for samme funktion, så de er lig hinanden:

$$4 \cdot (3 + x) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot x$$

7.04 Gange ind i parentes

Regel: Man ganger et tal ind i en parente ved at gange hvert led i parentesen med tallet.

At de to forskrifter er lig hinanden, kan også skrives sådan:

$$4 \cdot 3 + 4 \cdot x = 4 \cdot (3 + x)$$

7.05 Sætte uden for parentes

Regel: En faktor der er i hvert led, kan sættes uden for en parentes.

Faktorer er noget der er ganget med hinanden.

7.06 Opstil forskrift Eksempel 3

Afsnit 7.06-7.07 kan gennemgås ved at løse opgaverne i start_mat_opstil_3.tns

Der er p mønter.
Først fjernes q mønter.
Så fjernes r mønter.

Antal mønter der er tilbage, kan udregnes på to måder.

Metode 1

Læg q og r sammen.
Træk resultatet fra p.
Dette kan skrives som følgende regneudtryk:

$$p-(q+r)$$

Metode 2

Træk q fra p.
Træk r fra resultatet.
Dette kan skrives som følgende regneudtryk:

$$p-q-r$$

7.07 Hæve parentes

Da $p-(q+r)$ og $p-q-r$ er samme antal, må gælde

$$p-(q+r) = p-q-r.$$

Regel:

Når man hæver en minusparentes, (dvs. fjerner parentes og minus foran)
skal man ændre fortegn for hvert led i parentesen.

Eksempel:

$$7-(5-2\cdot x)$$
$$= 7-(+5-2\cdot x)$$
$$= 7 \quad -5+2\cdot x$$

Regel:

Når man hæver en plusparentes, (dvs. fjerner parentes og plus foran)
skal man IKKE ændre fortegn i parentesen.

Eksempel:

$$2\cdot x+(6-x)$$
$$= 2\cdot x+(+6-x)$$
$$= 2\cdot x \quad +6-x$$

Eksempel:

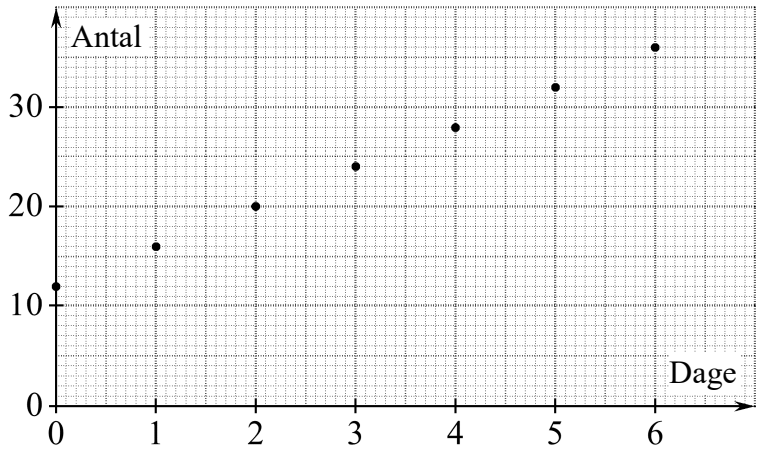
$$1-4\cdot(-2+a)$$
$$= 1-(-8+4\cdot a)$$ Først ganger vi ind i parentesen uden at hæve den.
$$= 1 \quad +8-4\cdot a$$

8. Lineær funktion - intro

8.01 Oplæg til definition af lineær funktion

Afsnit 8 kan gennemgås ved at løse opgaverne i start_mat_lineaer_intro.tns

I dag er antal 12 . Hver dag stiger antal med 4 .
Vi kan tænke os til følgende:
Om 1 dag: antal $= 4 + 12$.
Om 2 dage: antal $= 4 + (4 + 12) = 4 + 4 + 12 = 4 \cdot 2 + 12$.
Om 3 dage: antal $= 4 + (4 \cdot 2 + 12) = 4 + 4 \cdot 2 + 12 = 4 \cdot 3 + 12$.
Om x dage: antal $= 4 \cdot x + 12$.
Forskriften er på formen $a \cdot x + b$.



8.02 Definition af lineær funktion

Hvis man om to variable x og y siger

y er en lineær funktion af x

så betyder det at

funktionen har en forskrift af typen $y = a \cdot x + b$

hvor konstanterne a og b kan være alle tal.
Konstanten a kaldes hældningskoefficienten .
Konstanten b kaldes konstantleddet .
På x's plads kan indsættes alle tal (dvs. definitionsmængden er alle tal).

At a og b er konstanter, betyder at deres talværdier ikke ændres når x ændres.

Eksempel: $y = 5{,}2 \cdot x - 12{,}6$ er en lineær funktion.
hældningskoefficient $= 5{,}2$.
konstantled $= -12{,}6$

Begrundelse: $y = a \cdot x + b$ vi sætter $a = 5{,}2$ og $b = -12{,}6$
$y = 5{,}2 \cdot x + (-12{,}6)$
$y = 5{,}2 \cdot x - 12{,}6$ dette er den givne forskrift

Eksempel: $y = 2 - x$ er en lineær funktion.
hældningskoefficient $= -1$. Det er tallet foran x der er a .
konstantled $= 2$

Begrundelse: $y = a \cdot x + b$ vi sætter $a = -1$ og $b = 2$
$y = (-1) \cdot x + 2$
$y = -x + 2$
$y = 2 - x$ dette er den givne forskrift

8.03 Graf for lineær funktion

At f er en lineær funktion,
er det samme som at grafen er en ret linje.

9. Lineær funktion - løse ligning

9.01 Oplæg

Afsnit 9 kan gennemgås ved at løse opgaverne i start_mat_lineaer_loese.tns

For den lineære funktion $y = 3x + 5$ vil vi bestemme x når y er 17 :

$$17 = 3x + 5$$

$$12 = 3x$$ Vi har trukket 5 fra begge sider.

$$\frac{12}{3} = \frac{3x}{3}$$ Vi har divideret begge sider med 3.

$$4 = x$$ Vi har udregnet venstre side. Vi har forkortet højre side.

Vi løste ligningen ved at bruge regler for ligevægt.

I forbindelse med lineære funktioner bruger man nedenstående fire regler for ligevægt.

9.02 Regler for ligevægt

Regler for ligevægt

Vi må **lægge** samme tal **til** begge sider af lighedstegnet.

Vi må **trække** samme tal **fra** begge sider af lighedstegnet.

Vi må **gange** begge sider af lighedstegnet med samme tal hvis dette tal **ikke** er **nul**.

Vi må **dividere** begge sider af lighedstegnet med samme tal hvis dette tal **ikke** er **nul**.

9.03 Eksempel på fejl

Følgende omskrivning er **forkert**:

$$2x + 2 = 6$$

$$\frac{2x}{2} + 2 = \frac{6}{2}$$

Fejlen er at det kun er en del af venstre side der er divideret med 2 .
Det er meningen at du skal tænke på ligningen som en vægt:

Grøn klods vejer x kg. Gul klods vejer 1 kg.

Øverste billede er $2x + 2 = 6$.

På næste billede har vi halveret det på højre vægtskål.

Det er kun en del af det på venstre vægtskål der er halveret.

Derfor er der ikke mere ligevægt.

$$\frac{2x}{2} + 2 = \frac{6}{2}$$ FORKERT.

9.04 Modsat regning

Da vi løste $17 = 3x + 5$ startede vi med at trække 5 fra begge sider.

Begrundelsen for dette er:

Den modsatte regning til læg 5 til er træk 5 fra .

Andre eksempler:

Den modsatte regning til træk $6x$ fra er læg $6x$ til .

Den modsatte regning til gang med 4 er divider med 4 .

Den modsatte regning til divider med 2 er gang med 2 .

9.05 Eksempel på detaljeret løsning

Opgave: Gør rede for hvordan man kan løse ligningen

$$11x - 2 = 4x + 19$$

ved at bruge regler for ligevægt og modsat regning .

Redegørelse:

Der står ikke noget foran $4x$, så der er underforstået + , dvs. $4x$ lægges til.

$11x - 2 = 4x + 19$	Omvendt udregning til **lægge 4x til** er **trække 4x fra**
$11x - 2 \mathbf{-4x} = 4x+19 \mathbf{-4x}$	**Trækker 4x fra** begge ligningens sider
$7x - 2 = 19$	Omvendt udregning til **trække 2 fra** er **lægge 2 til**
$7x - 2 \mathbf{+2} = 19 \mathbf{+2}$	**Lægger 2 til** begge ligningens sider
$7x = 21$	Omvendt udregning til **gange med 7** er **dividere med 7**
$\frac{7x}{\mathbf{7}} = \frac{21}{\mathbf{7}}$	Begge ligningens sider **divideres med 7**
$x = 3$	7 kan forkortes væk da der står gange mellem 7 og x

9.06 Små-eksempler med regler for ligevægt

$x + 8 = 12$ $x + 8 \mathbf{-8} = 12 \mathbf{-8}$ $x = 4$	Der er lagt 8 til x. Det modsatte er at trække 8 fra. Derfor trækker vi 8 fra begge sider.
$x + 5 = -14$ $x + 5 \mathbf{-5} = -14 \mathbf{-5}$ $x = -19$	Der er lagt 5 til x. Det modsatte er at trække 5 fra. Derfor trækker vi 5 fra begge sider.
$x - 6 = 9$ $x - 6 \mathbf{+6} = 9 \mathbf{+6}$ $x = 15$	Der er trukket 6 fra x. Det modsatte er at lægge 6 til. Derfor lægger vi 6 til begge sider.
$4 - x = 3$ $4 - x \mathbf{-4} = 3 \mathbf{-4}$ $-x = -1$	Der står plus foran 4 (da der ikke står noget). Derfor trækker vi 4 fra begge sider. Nederst står hvordan vi fjerner minus så x står alene.
$-7 + x = 2$ $-7 + x \mathbf{+7} = 2 \mathbf{+7}$ $x = 9$	Der er trukket 7 fra x. Det modsatte er at lægge 7 til. Derfor lægger vi 7 til begge sider.
$24 = -3 - x$ $24 \mathbf{+3} = -3 - x \mathbf{+3}$ $27 = -x$	Der er trukket 3 fra $-x$. Det modsatte er at lægge 3 til. Derfor lægger vi 3 til begge sider. Nederst står hvordan vi fjerner minus så x står alene.
$-x = 9$ $-x \cdot \mathbf{(-1)} = 9 \cdot \mathbf{(-1)}$ $x = -9$	 Vi ganger begge sider med -1. Fordi minus gange minus er plus.

9.07 Forkorte

$\frac{4x}{4}$ kan forkortes til x fordi der står **gange** mellem 4 og x.

$\frac{x\cdot(-5)}{-5}$ kan forkortes til x fordi der står **gange**.

$\frac{x-5}{-5}$ og $\frac{3+x}{3}$ kan **ikke** forkortes til x fordi der **ikke** står **gange**.

9.08 Små-eksempler med regler for ligevægt

$3x = 12$ — x er ganget med 3. Det modsatte er at dividere med 3.

$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$ — Derfor dividerer vi begge sider med 3.

$x = 4$ — På venstre side kan 3 forkortes væk fordi der står gange mellem 3 og x.

$-2 = x\cdot 5$ — x er ganget med 5. Det modsatte er at dividere med 5.

$\frac{-2}{5} = \frac{x\cdot 5}{5}$ — Derfor dividerer vi begge sider med 5.

$-0{,}4 = x$ — På højre side kan 5 forkortes væk fordi der står gange mellem x og 5.

$-8x = 1$ — x er ganget med –8. Det modsatte er at dividere med –8.

$\frac{-8x}{-8} = \frac{1}{-8}$ — Derfor dividerer vi begge sider med –8.

$x = -0{,}125$ — –8 forkortes væk fordi der står gange mellem –8 og x.

10. Lineær funktion – betydning af *a* og *b*

10.01 Oplæg til betydning af *a* og *b*

Afsnit 10.1-10.10 kan gennemgås ved at løse opgaverne i start_mat_lineaer_tolk a b.tns

For funktionen $y = \mathbf{0{,}4}\cdot x + \mathbf{1{,}2}$ får vi

Når $x = -1$ er $y = 0{,}4\cdot(-1) + 1{,}2 = 0{,}8$

Dette resultat står først i tabellen nedenfor.
De andre y-værdier i tabellen er udregnet på næsten samme måde.

x:	–1	0	1	2	3
y:	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4

I tabellen ser vi:

Hver gang vi lægger 1 til x-værdien,
så bliver der lagt **0,4** til y-værdien.

Når $x = 0$, er $y = \mathbf{1{,}2}$.

		+1	+1	+1	+1
x:	–1	0	1	2	3
y:	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
		+0,4	+0,4	+0,4	+0,4

10.02 Sætning om betydning af *a* og *b*

En **sætning** er en vigtig matematisk regel.

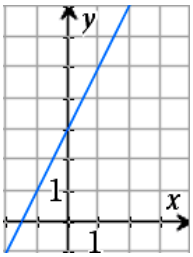
For en lineær funktion $y = a\cdot x + b$ gælder:

Hver gang vi lægger 1 til x-værdien,
så bliver der lagt a til y-værdien.

Når $x = 0$, er $y = b$.

10.03 Aflæse a og b på graf

Billederne viser grafen for en funktion f.



Grafen er en ret linje, så

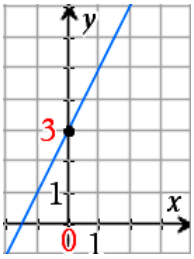
Forskrift er af typen $f(x) = a \cdot x + b$.

På graf aflæser vi at

når $x = 0$, så er $y = 3$,

så

$b = 3$.

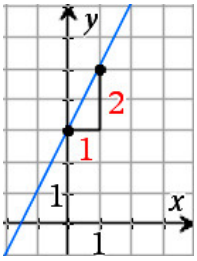


På graf ser vi at

når vi lægger 1 til x ,
så lægges 2 til y ,

så

$a = 2$.



Forskrift for f: $f(x) = 2 \cdot x + 3$.

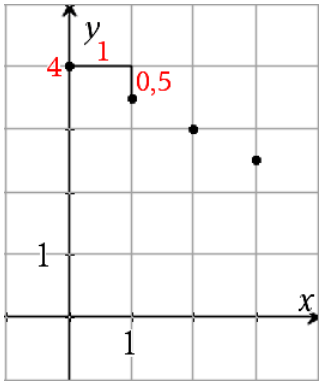
10.04 Bruge a og b til at afsætte grafpunkter

En funktion f har forskriften $f(x) = -0{,}5 \cdot x + 4$.
Forskriften er af typen $f(x) = a \cdot x + b$.

$b = 4$, så grafen skærer y-aksen ved 4 .
Dette bruger vi til at tegne et punkt på grafen (se figur).

$a = -0{,}5$, så når et punkt skubbes langs grafen så x bliver en større, så vil y blive 0,5 mindre .

Dette bruger vi til at tegne nogle flere punkter på grafen (se figur).



10.05 Graf og fortegn for *a*

Afsnit 10.02-10.05 kan repeteres ved at løse opgaverne i start_mat_lineaer_tolk_a_b_2.tns og start_mat_lineaer_tolk_a_b_3.tns

På en lineær graf går vi en enhed mod højre.
Så bliver der lagt a til y-koordinaten.

Heraf følger:

Når a er positiv, går graf opad mod højre.
Når a er nul, er graf vandret.
Når a er negativ, går graf nedad mod højre.

10.06 Opgave: Hvad fortæller *a* og *b*?

Opgave

For en dåse er $y = 12 \cdot x + 35$
hvor y = pris i kr. og x = vægt i gram af dåsens indhold.

Hvad fortæller tallene 12 og 35 om varen?

Svar:

Forskriften er af typen $y = a \cdot x + b$ med $a = 12$

så når man lægger 1 til x så lægges a til y
dvs. når man lægger 1 til **vægt** så lægges **12** til **pris**

så tallet 12 fortæller:

Når vægten stiger med 1 gram, så stiger prisen med 12 kr.

Forskriften er af typen $y = a \cdot x + b$ med $b = 35$

så når $x = 0$ er $y = b$
dvs. når **vægt** = 0 er **pris** = 35

så tallet 35 fortæller:

Når dåsen er tom, er prisen 35 kr.

10.07 Opgave: Hvad fortæller *a* og *b*?

Opgave

I en by er $y = -40 \cdot x + 520$
hvor y = antal beboere og x = tid i år efter 2007.

Hvad fortæller tallene –40 og 520 om byen?

Svar:

Forskriften er af typen $y = a \cdot x + b$ med $a = -40$

så når man lægger 1 til x så lægges a til y
dvs. når man lægger 1 til **tid** så lægges **–40** til **antal**

så tallet –40 fortæller:

Når der går et år, så falder antal beboere med –40.

Forskriften er af typen $y = a \cdot x + b$ med $b = 520$

så når $x = 0$ er $y = b$
dvs. når **tid** = 0 er **antal** = 520

så tallet 520 fortæller:

I 2007 var antal beboere 520.

10.08 Opgave: Opstil model

Opgave

Ved køb var plantens højde 27 cm, og højden bliver 2,5 cm større på en uge.

Opstil en model der beskriver udviklingen i plantens højde.

Svar:

Vi indfører følgende variable:

y = højde (cm) og x = tid (uger efter køb)

Oplyst: y stiger samme antal enheder hver gang x stiger 1 enhed
så funktionen er lineær: $y = a \cdot x + b$.

Oplyst: Hver uge bliver højde 2,5 cm støre
dvs. når man lægger 1 til x (tid)
så lægges 2,5 til y (højde)
så $a = 2{,}5$

Oplyst: På tidspunkt for køb er højde 27 cm
dvs. når $x = 0$ så er $y = 27$
så $b = 27$

Vi kan nu opstille følgende model:

$y = 2{,}5 \cdot x + 27$, y = højde (cm), x = tid (uger efter køb)

10.09 Opgave: Opstil model

Opgave

Afstanden bliver 0,2 mm mindre for hver grad temperaturen stiger, og ved 0 °C er afstanden 8,4 mm.

Angiv en sammenhæng mellem afstanden og temperaturen.

Svar:

Vi indfører følgende variable:

y = afstand (mm) og x = temperatur (°C)

Oplyst: y falder samme antal enheder hver gang x stiger 1 enhed
så funktionen er lineær: $y = a \cdot x + b$.

Oplyst: For hver grad bliver afstand 0,2 mm mindre
dvs. når man lægger 1 til x (temperatur)
så lægges –0,2 til y (afstand)
så $a = -0{,}2$

Oplyst: Når temperaturen er 0 °C er afstand 8,4 mm
dvs. når $x = 0$ så er $y = 8{,}4$
så $b = 8{,}4$

Vi kan nu opstille følgende sammenhæng:

$y = -0{,}2 \cdot x + 8{,}4$, y = afstand (mm), x = temperatur (°C)

10.10 Eksempel på argumentation

For funktionen $y = 2 \cdot x + 5$ vil vi bevise hvad der sker med y når x bliver 3 enheder større.

Vi starter med en vilkårlig x-værdi.
Vi kalder denne x-værdi for t.
Da t kan være ethvert tal, gælder vores argumentation for alle x-værdier.
Hvis vi skrev 8 i stedet for t, så ville vores argumentation kun gælde når første x-værdi er 8.

Næste x-værdi skal være 3 enheder større end t,
så den næste x-værdi er $t+3$:

x :	t	$t+3$
$y = 2 \cdot x + 5$:		

Ved hjælp af forskriften finder vi de y-værdier der svarer til de to x-værdier t og $t+3$:

Når x er t, så er $2 \cdot x + 5 = 2 \cdot t + 5$
Når x er $t+1$, så er $2 \cdot x + 5 = 2 \cdot (t+3) + 5$

x :	t	$t+3$
$y = 2 \cdot x + 5$:	$2 \cdot t + 5$	$2 \cdot (t+3) + 5$

Vi omskriver den anden y-værdi:

$$
\begin{aligned}
& 2 \cdot (t+3) + 5 & \\
= \; & 2 \cdot t + 2 \cdot 3 + 5 & \text{Vi har ganget 2 ind i parentesen.} \\
= \; & 2 \cdot t + 6 + 5 & \text{Vi har reduceret.} \\
= \; & 2 \cdot t + 5 + 6 & \text{Vi har byttet om på to af leddene.}
\end{aligned}
$$

+3

x :	t	$t+3$
$y = 2 \cdot x + 5$:	$2 \cdot t + 5$	$2 \cdot t + 5 + 6$

+6

Vi ser at man skal lægge 6 til den første y-værdi for at få den anden.
Vi har bevist følgende:

For funktionen $y = 2 \cdot x + 5$ gælder:
Når x bliver 3 enheder større,
vil y blive 6 enheder større.

10.11 Eksempel på argumentation

For funktionen $y = 2 \cdot x + 5$ vil vi bevise følgende:
Grafen skærer y-aksen i punktet med y-koordinat 5 .

Skæringspunktet ligger på y-aksen, så dets x-koordinat er 0 .
Skæringspunktet ligger på grafen så dets y-koordinat fås ved at sætte dets x-koordinat ind i forskriften:

$y = 2 \cdot 0 + 5 = 5$.

Det var dette vi skulle bevise.

10.12 Bevis for *a*-tallets betydning

For funktionen $y = a \cdot x + b$ vil vi bevise hvad der sker med y når x bliver 1 enhed større.

Vi starter med en vilkårlig x-værdi. Vi kalder denne x-værdi for t.

Næste x-værdi skal være 1 enhed større end t, så næste x-værdi er $t+1$:

x:	t	$t+1$
$a \cdot x + b$:		

Ved hjælp af forskriften finder vi de y-værdier der svarer til de to x-værdier t og $t+1$:

Når x er t, så er $a \cdot x + b = a \cdot t + b$

Når x er $t+1$, så er $a \cdot x + b = a \cdot (t+1) + b$

x:	t	$t+1$
$y = a \cdot x + b$:	$a \cdot t + b$	$a \cdot (t+1) + b$

Vi omskriver den anden y-værdi:

$$
\begin{aligned}
& a \cdot (t+1) + b \\
= \; & a \cdot t + a \cdot 1 + b && \text{Vi har ganget 2 ind i parentesen.} \\
= \; & a \cdot t + a + b && \text{Vi har reduceret.} \\
= \; & a \cdot t + b + a && \text{Vi har byttet om på to af leddene.}
\end{aligned}
$$

x:	t	$t+1$
$y = a \cdot x + b$:	$a \cdot t + b$	$a \cdot t + b + a$

$+1$

$+a$

Vi ser at man skal lægge a til den første y-værdi for at få den anden y-værdi.
Vi har bevist følgende:

For funktionen $y = a \cdot x + b$ gælder:
Når x bliver 1 enheder større,
vil y blive a enheder større.

10.13 Bevis for *b*-tallets betydning

For funktionen $y = a \cdot x + b$ vil vi bevise følgende:

b er y-værdien når x-værdien er 0.

Man kan finde y-værdien ved at sætte x-værdien ind i forskriften,
og her er x-værdien 0:

$$y = a \cdot 0 + b = 0 + b = b.$$

Det var dette vi skulle bevise.

11. Lineær funktion – udregn *a* og *b*

11.01 Bestem *b* ud fra *a* og ét punkt

Afsnit 11.01-11.03 og 11.05-11.07 kan gennemgås ved at løse opgaverne i start_mat_lineaer_udregn_a_b.tns

Opgave: Punktet $(4, 35)$ ligger på grafen for funktionen $y = 8 \cdot x + b$.
Find tallet b.

Svar: Punktet $(4, 35)$ ligger på grafen for funktionen $y = 8 \cdot x + b$

så $35 = 8 \cdot 4 + b$ ← for når vi indsætter punktets x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi punktets y-koordinat.

$35 = 32 + b$

$3 = b$

Konklusion: $\underline{\underline{b = 3}}$.

11.02 Bestem *a* ud fra *b* og ét punkt

Opgave: Punktet $(5, 8)$ ligger på grafen for funktionen $y = a \cdot x + 18$.
Find tallet a .

Svar: Punktet $(5, 8)$ ligger på grafen for funktionen $y = a \cdot x + 18$

så $8 = a \cdot 5 + 18$ ← for når vi indsætter punktets x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi punktets y-koordinat.

$-10 = a \cdot 5$

$-2 = a$

Konklusion: $\underline{\underline{a = -2}}$.

11.03 Bestem *a* og *b* ud fra to punkter uden brug af formel

Opgave: Punkterne $(-7, 1)$ og $(8, 4)$ ligger på grafen for funktionen

$y = a \cdot x + b$.

Find tallene a og b.

Svar: Da punkterne $(-7, 1)$ og $(8, 4)$ ligger på grafen for funktionen $y = a \cdot x + b$

gælder $1 = a \cdot (-7) + b$

og $4 = a \cdot 8 + b$

for når vi indsætter punktets x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi punktets y-koordinat.

Vi løser ligningssystemet

$$1 = a \cdot (-7) + b \quad \text{og} \quad 4 = a \cdot 8 + b$$

mht. a og b, og får $\underline{\underline{a = 0{,}2}}$ og $\underline{\underline{b = 2{,}4}}$.

Du skal vise hvordan du løser ligningssystemet.
I 11.04 er vist hvordan man løser ligningssystemet i Nspire.
I 11.05 er vist hvordan man løser ligningssystemet uden hjælpemidler.

11.04 Løs lignings-system med Nspire

Afsnit 11.04 og 11.08 kan gennemgås ved at løse opgaverne i start_mat_lineaer_udregn _a_b_2.tns

Opgave: Løs ligningssystemet

$$1 = a \cdot (-7) + b \quad \text{og} \quad 4 = a \cdot 8 + b$$

mht. a og b.

Svar: I næste linje løser Nspire ligningssystemet

$$1 = a \cdot (-7) + b \quad \text{og} \quad 4 = a \cdot 8 + b$$

mht. a og b og får $a = 0{,}2$ og $b = 2{,}4$:

solve(1=a· -7+b and 4=a· 8+b,a,b) ▸ a=0.2 and b=2.4

Konklusion: $\underline{\underline{a = 0{,}2}}$ og $\underline{\underline{b = 2{,}4}}$.

11.05 Løs ligningssystem uden hjælpemidler

Opgave: Løs ligningssystemet

$$1 = a \cdot (-7) + b \quad \text{og} \quad 4 = a \cdot 8 + b$$

mht. a og b.

Her hedder de ukendte a og b. Ofte hedder de x og y.

Svar: Vi løser følgende ligningssystem:

(1) $1 = a \cdot (-7) + b$

(2) $4 = a \cdot 8 + b$

Af (1) får vi

(3) $1 + 7a = b$

Vi starter med at isolere a eller b i en af ligningerne.

Her har vi valgt at isolere b i ligning (1).

Facit ville blive det samme hvis vi havde valgt en af de tre andre muligheder:

isolere a i ligning (1).
isolere b i ligning (2).
isolere a i ligning (2).

Vi indsætter dette i (2) og får

$$4 = 8a + (1 + 7a)$$

hvoraf

$$4 = 15a + 1$$

$$3 = 15a$$

$$\frac{3}{15} = \frac{15a}{15}$$

$$0{,}2 = a$$

Vi indsætter i ligning (2) fordi vi isolerede i ligning (1).

Hvis vi isolerer i ligning (2), så skal vi indsætte i ligning (1)

Dette indsætter vi i (3) og får

$$1 + 7 \cdot 0{,}2 = b$$

hvoraf

$$1 + 1{,}4 = b$$

$$2{,}4 = b$$

Konklusion: $\underline{\underline{a = 0{,}2}}$ og $\underline{\underline{b = 2{,}4}}$.

Den metode vi har brugt, hedder:

Løsning af ligningssystem ved **substitution**.

Ordet substitution betyder udskifte.

I besvarelsen **udskifter** vi b i (2) med 1+7a.

11.06 Kontrol af facit

Vi kan kontrollere facit ved at vi i

(1) $1 = a \cdot (-7) + b$

(2) $4 = a \cdot 8 + b$

indsætter 0,2 og 2,4 for a og b:

(1) $1 = 0{,}2 \cdot (-7) + 2{,}4$

(2) $4 = 0{,}2 \cdot 8 + 2{,}4$

Vi ser at begge ligninger passer.

11.07 Formler for a og b

Sætning

Når

$$(x_1, y_1) \quad \text{og} \quad (x_2, y_2)$$

er forskellige punkter på grafen for funktionen

$$f(x) = a \cdot x + b$$

så er

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = y_1 - a \cdot x_1$$

Bevis

Da punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) ligger på grafen for funktionen $y = a \cdot x + b$

gælder $y_1 = a \cdot x_1 + b$

og $y_2 = a \cdot x_2 + b$

for når vi indsætter punktets x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi punktets y-koordinat.

Vi løser følgende ligningssystem mht. a og b:

(1) $y_1 = a \cdot x_1 + b$

(2) $y_2 = a \cdot x_2 + b$

Af (1) får vi

(3) $y_1 - a \cdot x_1 = b$ Dette er den ene af de formler vi ville bevise.

Vi indsætter dette i (2) og får

$$y_2 = a \cdot x_2 + y_1 - a \cdot x_1$$

hvoraf

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 - a \cdot x_1$$

Den fælles faktor a sætter vi uden for parentes.

$$y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$$

Vi dividerer begge sider med tallet $x_2 - x_1$ som ikke er 0 da de to punkter er forskellige.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Dette er den anden af de formler vi ville bevise.

11.08 Brug af formlerne for a og b

Afsnit 11.04 og 11.08 kan gennemgås ved at løse opgaverne i start_mat_lineaer_udregn a b 2.tns

Opgave: Punkterne $(-7,\ 1)$ og $(8,\ 4)$ ligger på grafen for sammenhængen $y = a \cdot x + b$. Find tallene a og b.

Oplysningen om de to punkter er nogle gange skrevet sådan: $f(-7) = 1$ og $f(8) = 4$.

Svar: Vi indsætter i formler for a og b:

Af $(x_1, y_1) = (-7,\ 1)$ og $(x_2, y_2) = (8,\ 4)$ får vi

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{y_2 - y_1}}{\boldsymbol{x_2 - x_1}} = \frac{4-1}{8-(-7)} = \frac{3}{15} = 0{,}2$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y_1 - a \cdot x_1} = 1 - 0{,}2 \cdot (-7) = 2{,}4$$

12. Proportionale størrelser

12.01 Oplæg til definition af proportional

Afsnit 12 kan gennemgås ved at løse opgaverne i start_mat_proportional.tns

Et værksted bruger stænger af forskellig længde.
Man har målt længde og vægt af nogle af dem:

Længde (cm):	10	20	30	40
Vægt (gram):	26	52	78	104

For hver af stængerne dividerer vi vægt-tallet med længde-tallet.
I alle tilfælde får vi 2,6.

Der gælder altså

$$m = 2{,}6 \cdot l$$

hvor m er vægten (gram) og l er længden (cm).

Man siger at vægten er proportional med længden og at proportionalitetskonstanten er 2,6 gram pr. cm.

Stængerne vejer altså 2,6 gram pr. cm.
Proportionalitetskonstanten er vægten pr. cm.

12.02 Definition af proportional

Hvis man om to variable x og y siger at

y er proportional med x

så mener man at

$$y = k \cdot x$$

hvor k er en konstant der ikke er 0.
Tallet k kaldes proportionalitetskonstanten.

At k er en konstant, betyder at k er samme tal for alle værdier af x.

12.03 Opgave om proportional

Opgave De to variable x og y er proportionale.
Tabellen viser nogle sammenhørende værdier af x og y.

x	24	36	92
y	18	27	69

a) Hvad er y når x er 10?

b) Hvad er x når y er 15?

Svar

I opgaven står ikke at vi skal udregne k.
Vi skal selv vide at vi skal udregne k først.

Udregne k:

Da x og y er proportionale, er der et tal k så

(1) $y = k \cdot x$.

I tabellen ser vi at når $x = 24$ er $y = 18$.
Dette indsætter vi i **(1)**:

$$18 = k \cdot 24$$

Hvis vi i stedet bruger 36 og 27 eller 92 og 69, så får vi den samme værdi af k.

Vi kan løse ligningen ved at dividere begge sider med 24 eller ved at bruge solve.

Denne ligning løser vi mht. k og får

$$0{,}75 = k$$

Dette tal indsætter vi i **(1)** og får ligningen for sammenhængen mellem x og y:

(2) $y = 0{,}75 \cdot x$

a) Udregne y:

For at finde y når x er 10, sætter vi x til 10 i **(2)**:

$$y = 0{,}75 \cdot 10$$

Heraf får vi $y = 7{,}5$ så

y er 7,5 når x er 10

b) Udregne x:

For at finde x når y er 15, sætter vi y til 15 i **(2)**:

$$15 = 0{,}75 \cdot x$$

Vi kan løse ligningen ved at dividere begge sider med 0,75 eller ved at bruge solve.

Vi løser denne ligning mht. x og får

$$20 = x$$

så

x er 20 når y er 15

Man kan få ekstra øvelse ved at løse opgaverne i start_mat_skyder.tns

A-niveau 2.07 side 4
aflæse a og b på graf 10.03 side 24
aflæse graf elektronisk 3.08 side 8
aflæse *x*-værdi på graf 3.04 side 6
3.06 side 7
aflæse *y*-værdi på graf 3.03 side 6
3.05 side 7
aflæse *x* på grafer så *y* er ens 3.07 side 7
afvigelse 4.03 side 11
5.09 side 14
andenakse 1.01 side 1
andenkoordinat 1.02 side 1
a og *b*, formler for 11.07 side 31
argumentere 10.10 side 27
B-niveau 2.07 side 4
bestem *a* og *b* 11. side 29-32
bestem *a* og *b* ud fra to punkter 11.03 side 29
11.08 side 32
besvarelse 2.06 side 3
5.05 side 13
5.08 side 14
9.05 side 22
10.06-10.09 side 25-26
11.01-11.05 side 29-30
11.08 side 32
12.03 side 33
betydning af *a* og *b* 10.02 side 23
10. side 23-28
bevis 10.12-10.13 side 28
11.07 side 31
C-niveau 2.07 side 4
A-niveau 2.07 side 4
elektronisk aflæsning 3.08 side 8
f(*x*)-skrivemåde 2.05 side 3
fordoblingstid 4.04 side 11
forkorte 9.07 side 23
formler for *a* og *b* 11.07 side 31
forskrift 2.04 side 2
forskrift, opstil 7.01 side 17
7.03 side 18
7.06 side 19
fortolkning af *a* og *b* 10.02 side 23
10. side 23-28
fortæller 10.06 side 25
10.07 side 25
funktion 2.03 side 2
funktionsskrivemåde 2.05 side 3
funktionsværdi 2.05 side 3
førsteakse 1.01 side 1
førstekoordinat 1.02 side 1
gange ind i parentes 7.04 side 18

graf 3.01 side 5
3.02 side 5
3.11 side 10
3.12 side 10
10.04 side 24
graf for lineær funktion 8.03 side 20
graf i Nspire 3.10 side 9-10
graf på papir 3.09 side 8
halveringstid 4.04 side 11
helt tal 4.04 side 11
koordinatsystem 1.01 side 1
koordinatsæt 1.02 side 1
ligevægt 9.02 side 21
9.05 side 22
lineær funktion 8.02 side 20
lineær funktion, betydning af *a* og *b* 10.02 side 23
10. side 23-28
løse ligning 9. side 21-23
løse to ligninger med to ubekendte ubekendte 11.04 side 30
11.05 side 30
model 4.01 side 11
5.07 side 13
modsat regning 9.04 side 21
9.05 side 22
målt tal 4.02 side 11
nøjagtighed 3.08 side 8
omskrive 7.02 side 17
7.04 side 18
7.05 side 18
7.07 side 19
opstil model 10.08 side 26
10.09 side 26
parentes 7.04 side 18
7.05 side 18
7.07 side 19
proportional, definition 12.02 side 32
proportional, besvarelse 12.03 side 33
punkt på graf 3.01 side 5
3.02 side 5
3.11 side 10
3.12 side 10
10.04 side 24
reducere 7.02 side 17
7.04 side 18
7.05 side 18
7.07 side 19
9.07 side 23
regler for ligevægt 9.02 side 21
regneforskrift 2.04 side 2
regression 5.01-5.11 side 12-14
regression, brugsanvisning 5.03 side 12

regression, besvarelse 5.04-5.05 side 12-13
5.08 side 14
relativ afvigelse 4.03 side 13
residual 5.09 side 14
residualplot 5.10 side 15
residualplot, brugsanvisning 5.11 side 15
samle led 7.02 side 17
skyder i Nspire start_mat_skyder.tns
skæring, graf og *x*-akse 6.02 side 16
skæring, graf og *y*-akse 6.01 side 16
skæring, to grafer 6.03 side 16
solve 2.06 side 3
11.04 side 30
sætte uden for parentes 7.05 side 18
tegne graf i Nspire 3.10 side 9-10
tegne graf på papir 3.09 side 8
to ligninger med to ubekendte 11.04 side 30
11.05 side 30
udregne *a* og *b* 11. side 29-32
variabel 2.02 side 2
x-akse 1.01 side 1
x-koordinat 1.02 side 1
y-akse 1.01 side 1
y-koordinat 1.02 side 1
årstal 4.04 side 11
5.08 side 14