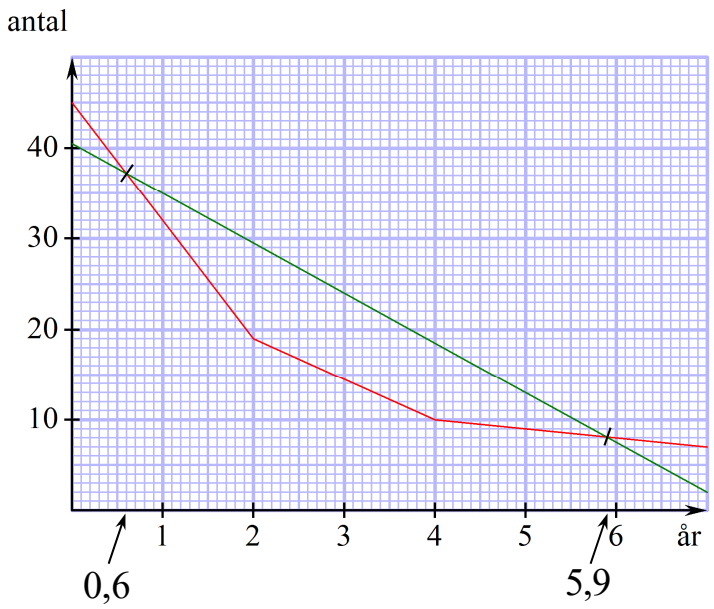
Start-mat

for stx og hf



2018 Karsten Juul

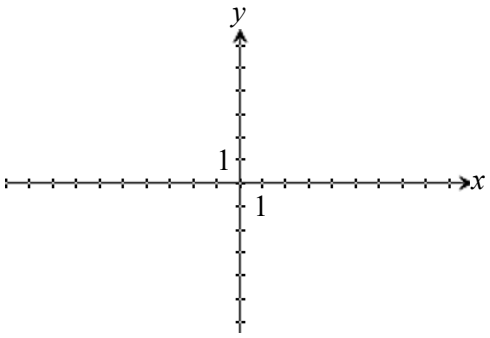
Start-mat for stx udgave 2 **© 2018 Karsten Juul** 20/8-2018
Nyeste version af dette hæfte kan downloades fra http://mat1.dk/noter.htm . Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren sender en e-mail til kj@mat1.dk som oplyser at dette hæfte benyttes og oplyser hold, niveau, lærer og skole.
Udgave 2 er væsentlig anderledes end udgave 1.
Link til udgave 1: http://mat1.dk/start_mat_for_stx_og_hf_udgave_1.pdf .

1 Koordinater 1
2 Funktion 3
3 Graf 6
4 Model 15
5 Skæring 16
6 Lineær funktion - løse ligning 17
7 Lineær funktion - intro 23
8 Lineær funktion - betydning af *a* og *b* 24
9 Lineær funktion - udregn *a* og *b* 28
10 Proportionale størrelser 30
11 Regression 32

1. Koordinater

1.01 Koordinatsystem

Figuren viser et koordinatsystem.



Koordinatsystemet består af to tallinjer:

Den vandrette tallinje kaldes x-aksen eller førsteaksen .

Den lodrette tallinje kaldes y-aksen eller andenaksen .

På hver af tallinjerne er der en pil:

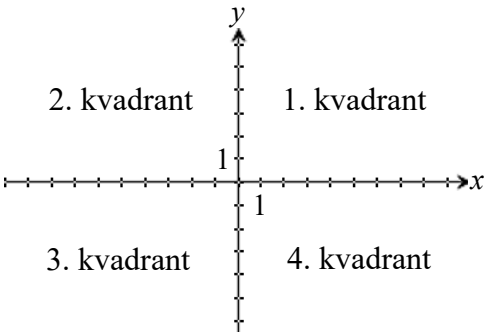
tallene bliver større i pilens retning.

Det er altså en fejl at sætte pil i den anden ende af tallinjen.

1.02 Kvadranter

De fire felter i koordinatsystemet hedder

1. kvadrant , 2. kvadrant , 3. kvarant og 4. kvadrant .



1.03 Koordinater

Hvert punkt i koordinatsystemet har et koordinatsæt .
Det røde punkt på figurerne nedenfor har koordinatsættet $(-7, 4)$.

Det første af tallene i koordinatsættet kaldes
x-koordinaten eller førstekoordinaten .

Det andet af tallene i koordinatsættet kaldes
y-koordinaten eller andenkoordinaten .

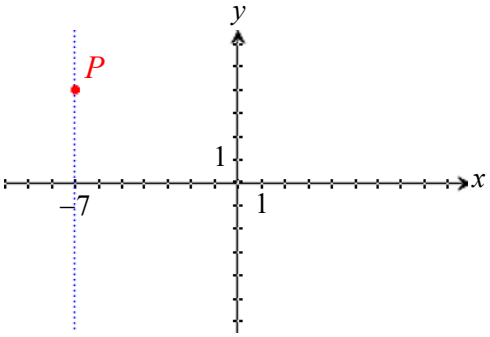
1.04 Aflæs x-koordinat til P .

x-koordnat

En lodret linje gennem punktet skærer x-aksen ved -7 .

Derfor:

P har x-koordinaten -7 .
P har 1.-koordinaten -7 .



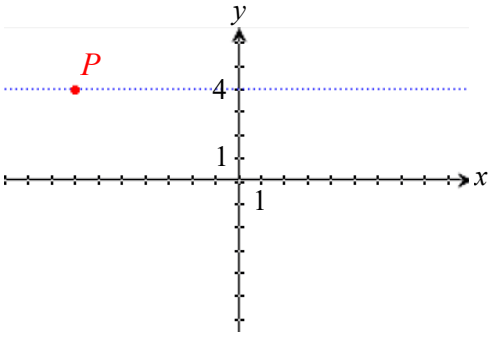
1.05 Aflæs y-koordinat til P .

y-koordnat

En vandret linje gennem punktet skærer y-aksen ved 4 .

Derfor:

P har y-koordinaten 4 .
P har 2.-koordinaten 4 .



1.06 Koordinatsæt for P .

Koordinat-sæt

P har koordinatsættet $(-7 , 4)$

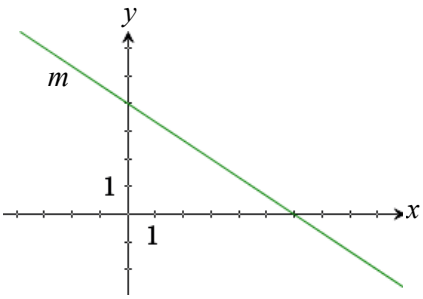
Tallet før kommaet er altid x-koordinaten (første-koordinaten)

Tallet efter kommaet er altid y-koordinaten (anden-koordinaten)

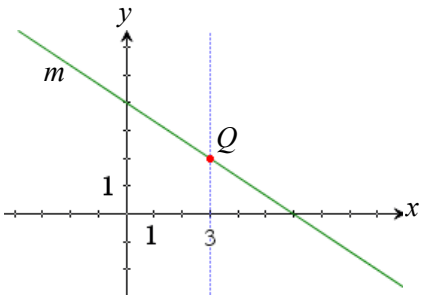
1.07 Tegn punkt med given x-koordinat på given linje.

Opgave

Punktet Q ligger på linjen m .
Q har x-koordinat 3 .
Tegn Q .



Svar



2. Funktion

2.01 Eksempel med to størrelser

Billedet til højre viser et rektangel på en computerskærm.

Når man trækker i det røde punkt,
så ændres bredde og højde
som det er vist på de to billeder nedenfor.

2.02 Variabel

En talstørrelse der ændres kaldes en variabel .

Bredden er er en variabel.
Højden er en variabel.

Man bruger ofte et bogstav som navn for en variabel:

b = bredde
h = højde

På et af billederne ovenfor ser vi:

Når $b = 5{,}5$ så er $h = 7{,}5$.

2.03 Funktion

Der gælder

højden er en funktion af bredden

fordi der gælder

til hver værdi af bredden er der én værdi af højden.

(Der gælder også: bredden er en funktion af højden).

2.04 Forskrift

På hvert af de tre billeder ovenfor ser vi at man får højden ved at lægge 2 til bredden. Det viser sig at dette altid gælder for denne figur:

$$h = b + 2 .$$

Udtrykket på ligningens højre side kaldes

en forskrift for funktionen

eller

en regneforskrift for funktionen.

Ofte er en forskrift mere indviklet, f.eks.:

$$y = 3 \cdot x^2 - x + 5 .$$

2.05 $f(x)$-skrivemåde

I stedet for

$$h = b + 2$$

skriver man ofte

$$h(b) = b + 2 .$$

Så gælder

$h(5)$ er højden når bredden er 5 .

Symbolet

$h(5)$

læses

h af 5 .

2.06 Bestem $h(5)$

2.07 At $h(5) = 7$ fortæller

$h(b) = b + 2$ så

$h(5) = 5 + 2$

$h(5) = 7$ dette fortæller at

når **bredde** er 5 , så er **højde** lig 7 .

(Når $\boldsymbol{x} = 5$, vil $\boldsymbol{y} = 7$).

Skrivemåden $h(\ )$ kaldes funktions-skrivemåde.

Her er endnu et eksempel på denne skrivemåde:

$$f(x) = 3 \cdot x^2 - x + 5$$
$$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 + 5$$
$$f(2) = 15$$

Vi siger: Funktionsværdien af 2 er 5 .

2.08 Opgave-besvarelser

Opgave

I en model kan antallet af dyr beskrives ved

$$f(x) = 121 \cdot 1{,}07^x$$

hvor $f(x)$ er antal dyr og x er tiden målt i uger efter oversvømmelsen.

a) Bestem antal dyr 5 uger efter oversvømmelsen,

b) Bestem hvornår antallet af dyr er 500.

Besvarelse

$f(x) = 121 \cdot 1.07^x$

$f(x)$ er antal dyr

x er tid i uger efter oversvømmelsen.

HUSK at skrive de oplysninger fra opgaveteksten som du bruger.

2.09 Der er spurgt om y (som kan hedde andet end y)

a) $f(5) = 121 \cdot (1.07)^5 = 169.709 \approx 170$

5 uger efter oversvømmelsen er antal dyr 170 .

Hvis f(5)= skrives i samme matematikfelt som $121 \cdot 1.07^5$, så kommer det ikke til at stå korrekt.

2.10 Der er spurgt om x (som kan hedde andet end x)

b) Nspire løser ligningen $500 = 121 \cdot 1.07^x$

mht. x og får $x=20.9702 \approx 21$

Over solve skrives hvad solve udfører, da solve ikke er normalt matematiksprog.

$\text{solve}\left(500=121 \cdot (1.07)^x, x\right) \blacktriangleright x=20.9702$

21 uger efter oversvømmelsen er antal dyr 500 .

HUSK at skrive konklusion til hvert spørgsmål, og markér facit i konklusionen.

2.11 C-, B- og A-niveau

Eksempel på C-niveau

På en skærm er der et rektangel som kan ændres.
$f(x) = 1{,}4 \cdot x + 0{,}8$ hvor x er bredden og $f(x)$ er højden.
Vi bestemmer rektanglets areal når bredden er $4{,}5$:

Når bredde $= 4{,}5$
er højde $= f(4{,}5) = 1{,}4 \cdot 4{,}5 + 0{,}8 = 7{,}1$.
Rektanglets areal er

$$\text{bredde} \cdot \text{højde} = 4{,}5 \cdot 7{,}1 = \underline{\underline{31{,}95}}$$

Eksempel på B-niveau

På en skærm er der et rektangel som kan ændres.
$f(x) = 1{,}4 \cdot x + 0{,}8$ hvor x er bredden og $f(x)$ er højden.
Vi bestemmer en forskrift for rektanglets areal $g(x)$ som funktion af bredden x .

Når bredde $= x$
er højde $= f(x) = 1{,}4 \cdot x + 0{,}8$.
Rektanglets areal er

$$\text{bredde} \cdot \text{højde} = x \cdot (1{,}4 \cdot x + 0{,}8) = 1{,}4 \cdot x^2 + 0{,}8 \cdot x$$

$$\underline{\underline{g(x) = 1{,}4 \cdot x^2 + 0{,}8 \cdot x}}$$

Eksempel på A-niveau

På en skærm er der et rektangel som kan ændres.
$f(x) = a \cdot x + b$ hvor x er bredden og $f(x)$ er højden.
Vi bestemmer en forskrift for rektanglets areal $g(x)$ som funktion af bredden x .

Når bredde $= x$
er højde $= f(x) = a \cdot x + b$.
Rektanglets areal $g(x)$ er

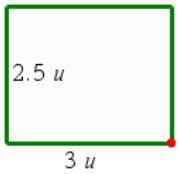
$$\text{bredde} \cdot \text{højde} = x \cdot (a \cdot x + b) = a \cdot x^2 + b \cdot x$$

$$\underline{\underline{g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x}}$$

3. Graf

3.01 Hvad er en graf?
Oplæg.

Billedet til højre viser et rektangel på en skærm.
Man kan ændre rektanglet ved at trække i det røde punkt. Ved at gøre dette kan man se at



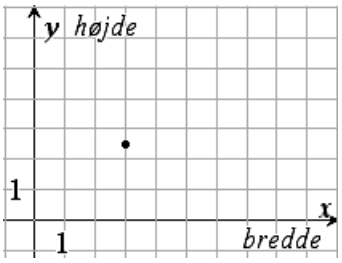
højden er en funktion af bredden

fordi der gælder

til hver værdi af bredden er der én værdi af højden.

På billedet ser vi at når bredden er 3 , så er højden 2,5 .

Denne oplysning afsætter vi som et punkt i koordinatsystemet.



En person der ser koordinatsystemet, kan se:

x-koordinat = 3 og y-koordinat = 2,5 .

Dette fortæller:

når bredde er 3, er højde 2,5 ,

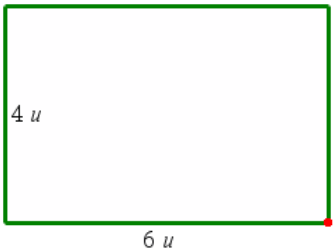
dvs.

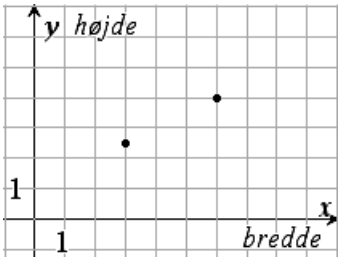
funktionsværdien af 3 er 2,5 .

Hvis funktionen kaldes f, kan dette skrives

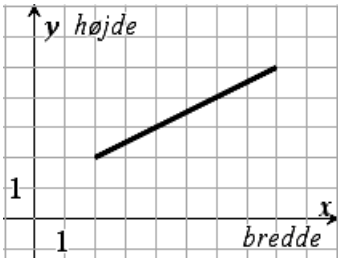
$f(3) = 2{,}5$.

Vi trækker i det røde punkt så bredde bliver 6. Vi ser at højde er 4.
Denne oplysning afsætter vi i koordinatsystemet.





Hvis der for hver bredde er et punkt i koordinatsystemet, så har vi funktionens **graf** :



3.02 Definition af graf

En **definition** er en forklaring på hvad et ord betyder.

Grafen for en funktion f består at de punkter (x,y) hvor

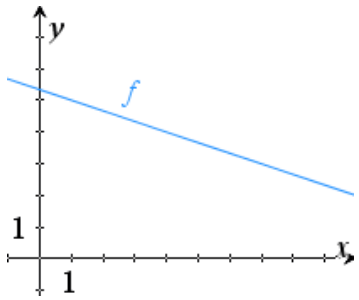
y er funktionsværdien af x ,

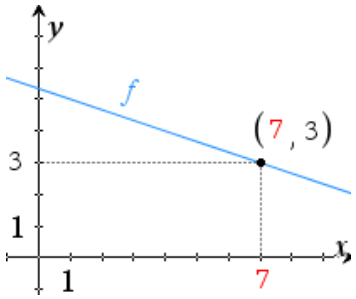
dvs.

$y = f(x)$.

Oversigt over forskellige formuleringer af en opgave hvor x er oplyst og y skal bestemmes .

Figuren er en nødvendig del af svaret på opgaverne 1 og 2





3.03 Ud fra graf: Bestem $f(7)$

Opgave 1
Figuren ovenfor viser grafen for en funktion f. Bestem $f(7)$.

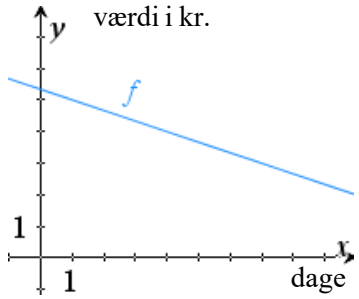
Svar på opgave 1
Figuren ovenfor viser hvordan jeg har aflæst at $f(7) = 3$.

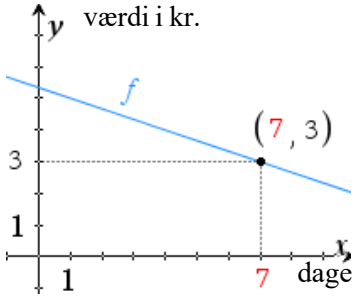
3.04 Ud fra graf: (7, k) er et punkt på grafen. Bestem k.

Opgave 2
Figuren ovenfor viser grafen for f .
Et punkt $(7 , k)$ ligger på grafen.
Bestem tallet k .

Svar på opgave 2
Et punkt $(7 , k)$ ligger på grafen
Figuren ovenfor viser hvordan jeg har aflæst at $k = 3$.

Figuren er en nødvendig del af svaret på opgaverne 3 .





3.05 Ud fra graf: Bestem værdi 7 dage efter køb

Opgave 3
Figuren viser grafen for f .
$f(x)$ er værdi i kr.
x er dage efter køb.
Bestem værdien 7 dage efter køb.

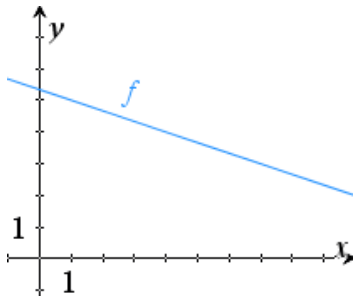
Svar på opgave 3
Figuren ovenfor viser hvordan jeg har aflæst at $f(7) = 3$.
7 dage efter køb er værdien 3 kr.

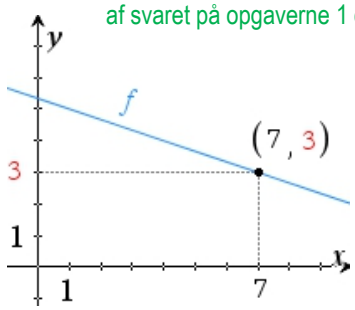
Oversigten fortsætter i næste ramme

3.06 Ud fra forskrift: Bestem $g(4)$	**Opgave 4** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ Bestem $g(4)$.	**Svar på opgave 4** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ $g(4) = 8 \cdot 4 + 25 = 57$.
3.07 Ud fra forskrift: Bestem y for grafpunkt med x=4	**Opgave 5** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ Bestem y-koordinat til det punkt på grafen hvis x-koordinat er 4 .	**Svar på opgave 5** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ $g(4) = 8 \cdot 4 + 25 = 57$. Grafpunkt med $x = 4$ har $y = 57$.
3.08 Ud fra forskrift: $(4, k)$ er et punkt på grafen. Bestem k.	**Opgave 6** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ Et punkt $(7 , k)$ ligger på grafen for g . Bestem tallet k .	**Svar på opgave 6** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ $(4 , k)$ ligger på grafen. $g(4) = 8 \cdot 4 + 25 = 57$ $k = 57$.
3.09 Ud fra forskrift: Ligger $P(4, 57)$ grafen?	**Opgave 7** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ Ligger punktet $P(4 , 57)$ på grafen for g .	**Svar på opgave 7** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ $P(4 , k)$ $g(4) = 8 \cdot 4 + 25 = 57$. Resultatet er P's y-koordinat 57,så P ligger på grafen for g.
3.10 Ud fra forskrift: Bestem højde 4 år efter køb.	**Opgave 8** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ $g(x)$ er højde i cm. x er år efter køb. Bestem højde 4 år efter køb.	**Svar på opgave 8** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ $g(x)$ er højde i cm x er år efter køb $g(4) = 8 \cdot 4 + 25 = 57$ 4 år efter køb er højden 57 cm .

Oversigt over forskellige formuleringer af en opgave hvor y er oplyst og x skal bestemmes .

Figuren er en nødvendig del af svaret på opgaverne 1 og 2





3.11 Ud fra graf: Løs $f(x) = 3$

Opgave 1 Figuren ovenfor viser grafen for en funktion f.
Løs ligningen $f(x) = 3$.

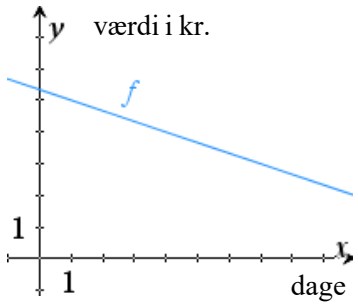
Svar på opgave 1
Figuren ovenfor viser hvordan jeg aflæst at ligningen $f(x) = 3$ har løsningen $x = 7$.

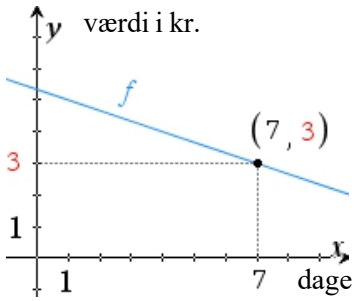
3.12 Ud fra graf: $(k , 3)$ er punkt på graf. Bestem k .

Opgave 2
Figuren ovenfor viser grafen for f.
Et punkt $(k, 3)$ ligger på grafen for f. Bestem tallet k .

Svar på opgave 2
Et punkt $(k, 3)$ ligger på grafen for f. Figuren ovenfor viser hvordan jeg har aflæst at $k = 7$.

Figuren er en nødvendig del af svaret på opgaverne 3 .





3.13 Ud fra graf: Bestem tidspunkt hvor værdi er 3 kr.

Opgave 3
Figuren viser grafen for f.
$f(x)$ er værdi i kr. ,
x er dage efter køb.
Hvornår er værdien 3 kr.?

Svar på opgave 3
Figuren ovenfor viser hvordan
Jeg har aflæst at 7 dage efter køb er værdien 3 kr.

3.14 Ud fra forskrift: Bestem x så $g(x)=3$

Opgave 4
$g(x) = 8 \cdot x + 25$
Bestem x så $g(x) = 57$.

Svar på opgave 4
$g(x) = 8 \cdot x + 25$
Nspire løser $8 \cdot x + 25 = 57$ mht. x.

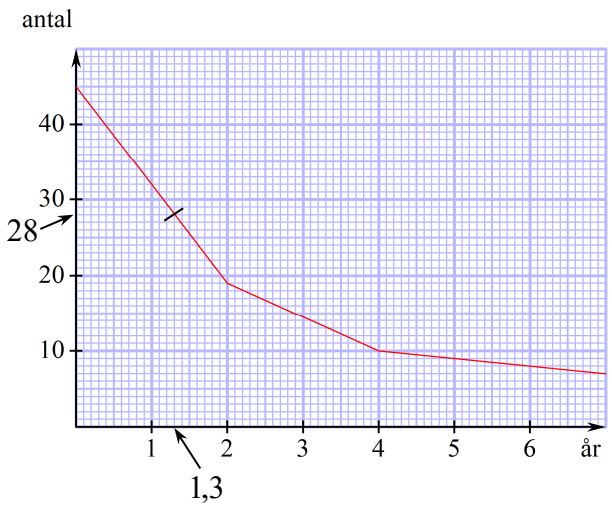
solve(8·x+25 = 57,x)▸x=4

Når $x = 4$ er $g(x) = 57$.

Oversigten fortsætter i næste ramme

3.15 Ud fra forskrift: Bestem x for grafpunkt med y=57	**Opgave 5** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ Bestem x-koordinat til det punkt på grafen hvis y-koordinat er 57 .	**Svar på opgave 5** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ Nspire løser $8 \cdot x + 25 = 57$ mht. x . solve(8·x+25 = 57,x)▸x=4 $x = 4$ for grafpunkt med $y = 57$.
3.16 Ud fra forskrift: (k , 57) er punkt på graf. Bestem k.	**Opgave 6** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ Et punkt (k , 57) ligger på grafen for g . Bestem tallet k .	**Svar på opgave 6** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ (k , 57) ligger på grafen. Nspire løser $8 \cdot k + 25 = 57$ mht. k . solve(8·k+25 = 57,k)▸k=4 $k = 4$.
3.17 Ud fra forskrift: Ligger P(4, 57) grafen?	**Opgave 7** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ Ligger punktet P(4 , 57) på grafen for g ?	**Svar på opgave 7** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ P(4 , 57) $8 \cdot 4 + 25 = 57$. Resultat er P's y-koordinat 57 så P ligger på grafen for g .
3.18 Ud fra forskrift: Bestem højde 4 år efter køb.	**Opgave 8** $g(x) = 8 \cdot x + 25$ $g(x)$ er højde i cm. x er år efter køb. Hvornår er højden 57 cm?	**Svar på opgave 8** $g(x) = 8 \cdot x + 25$, x er år efter køb. $g(x)$ er højde i cm. Nspire løser $8 \cdot x + 25 = 57$ mht. x . solve(8·x+25 = 57,x)▸x=4 4 år efter køb er højden 57 cm .

3.19 Aflæse antal til tiden 1,3



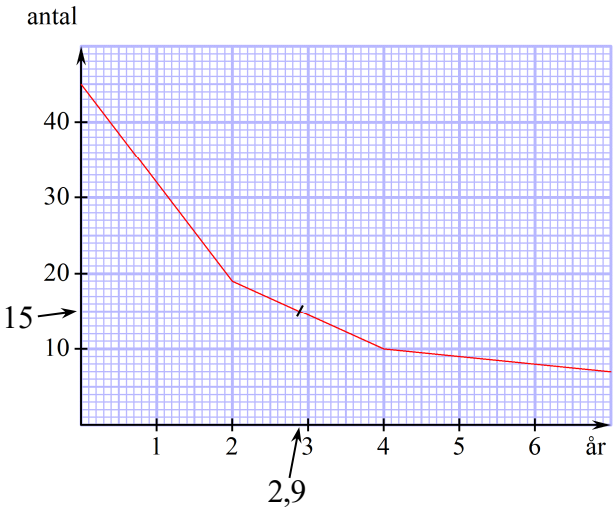
Grafen viser antal ansatte som funktion af tiden (år efter kontorets oprettelse).

Vi vil bestemme antal til tiden 1,3 år.

For at gøre dette, finder vi det punkt på grafen hvor x (tiden) er 1,3 . Vi ser at dette punkts y er 28 , og y er antal.

Til tiden 1,3 år er antal lig 28 .

3.20 Aflæse hvornår antal er 15

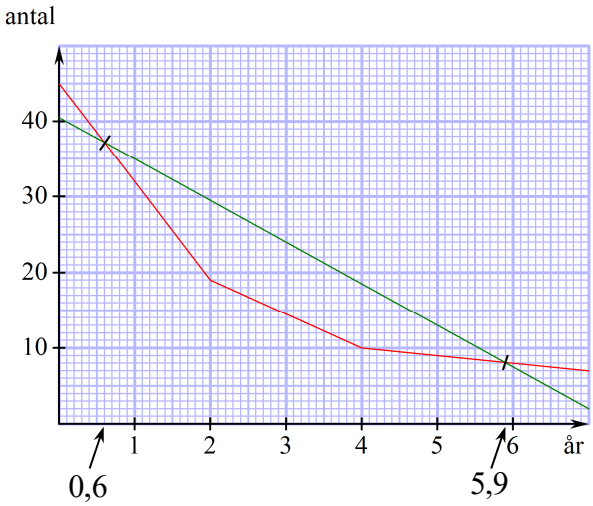


Vi vil bestemme hvornår antal er 15.

Vi finder det punkt på grafen hvor y (antal) er 15 . Vi ser at dette punkts x er 2,9 , og x er tid.

Antal er 15 til tiden 2,9 år.

3.21 Aflæse hvornår de to kontorer har samme antal



I koordinatsystemet er tilføjet grafen for et andet kontor.

Vi vil bestemme hvornår de to kontorer har samme antal.

Vi finder de x-værdier (tider) hvor de to grafer har samme y (antal). Vi ser at det er x-værdierne 0,6 og 5,9 .

De to kontorer har samme antal til tiderne 0,6 år og 5,9 år .

3.22 Elektronisk aflæsning

Hvis graferne er tegnet i Nspire,
så kan aflæsninger på grafen foretages elektronisk.

Ved elektronisk aflæsning udfører Nspire en udregning
der finder resultatet med stor nøjagtighed .

Sådan aflæses en graf elektronisk:

Skift til vindue med graf. Vælg i værktøjsmenu

Geometri / Punkter og linjer / Punkt på .

Klik på graf (ikke i skæring). Klik igen.
Så fremkommer et punkt på grafen.
Tryk på esc (så du kan foretage dig andet).

På nogle grafer fremkommer punktets koordinatsæt automatisk.
Hvis ikke, så højreklik på punktet og vælg

Koordinater og ligninger .

Dobbeltklik på den af koordinaterne som er kendt,
og ret den til den kendte værdi.

Så ændres den ukendte koordinat automatisk til den søgte værdi.

3.23 Tegne graf på papir

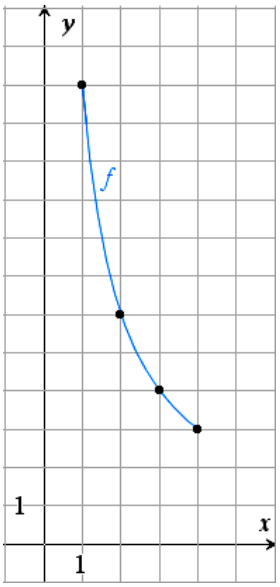
På papir vil vi tegne grafen for funktionen

$$f(x) = \frac{12}{x} \quad , \quad 1 \le x \le 4 \ .$$

Dette betyder at x kan være 1 eller 4 eller et tal mellem 1 og 4 . Tal mellem 1 og 4 er også et tal som f.eks. 1,37 .

For grafpunktet med x-koordinat 2 er y-koordinaten

$$f(2) = \frac{12}{2} = 6 \ .$$



På tilsvarende måde er de andre y-koordinater i tabellen udregnet:

x:	1	2	3	4
y:	12	6	4	3

Vi afsætter disse punkter i et koordinatsystem
og tegner en kurve gennem dem.

3.24 Tegne graf i Nspire

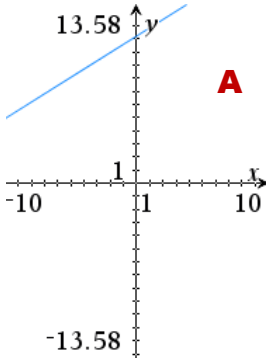
$f(x) = 0{,}63x+11{,}2$

Fra grafvinduet vælger vi i værktøjsmenuen

Grafindtastning/Rediger og Funktion,

og taster forskriften.

Vi ser at x-aksen går til 10. Se **A** .



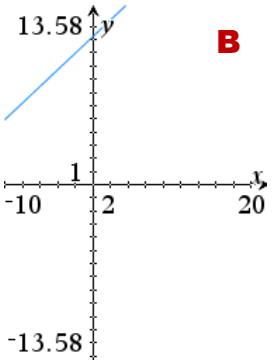
Da vi skal bruge x-værdi 16, lader vi x-akse gå til et tal noget større end 16, f.eks. 20.

Standardmetoden til dette er:

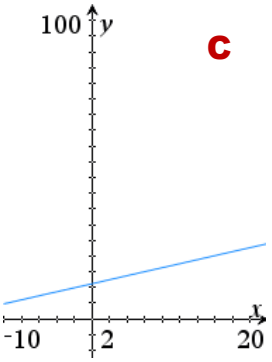
Vælg i Værktøjsmenuen

Vindue/Zoom og Indstillinger for vindue,

og sæt XMax til 20. Se **B** .

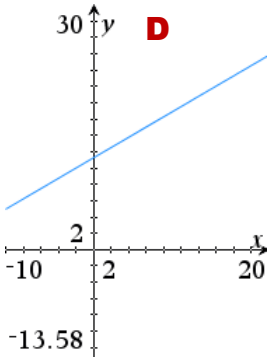


En væsentlig del af grafen ligger over vinduet.
Vi må vælge et meget større tal for YMax.
Vi kan prøve med 100. Se **C** .

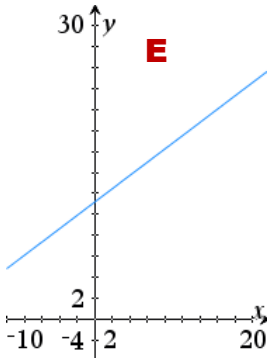


Det var for meget med 100.
Grafen skal fylde en større del af koordinatsystemet.

Vi prøver at sætte YMax til 30. Se **D** .



Den negative del af y-aksen er ikke relevant, så vi sætter YMin til et tal tættere på 0, f.eks. –4. Se **E** .

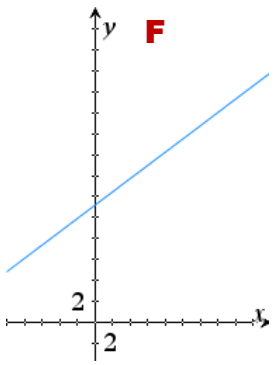


Rammen fortsætter på næste side!

For at pynte på figuren vælger vi i Værktøjsmenuen

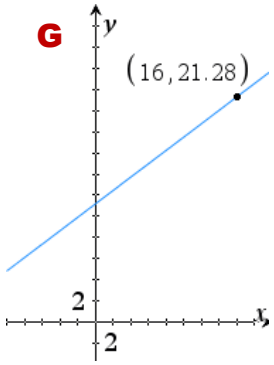
Vis og Skjul aksernes slutværdier.

Se **F** .



Nu kan vi aflæse grafen elektronisk. Se 3.22 .

Hvis koordinatsættet står oven på noget andet, så flytter vi det lidt. Se **G** .



3.25 Ligger punkt på graf?

Vi vil undersøge om punktet $P(2,15)$ ligger på grafen for $f(x) = 3 \cdot x + 8$.

Punktet ligger på grafen netop hvis

funktionsværdien af x-koordinaten 2 er lig y-koordinaten 15 .
ifølge 3.02

Vi udregner funktionsværdien af 2 :

$$f(2) = 3 \cdot 2 + 8 = 6 + 8 = 14 .$$

Funktionsværdien af 2 er altså 14 . Da den ikke er 15, gælder:

Punktet P ligger ikke på grafen for f .

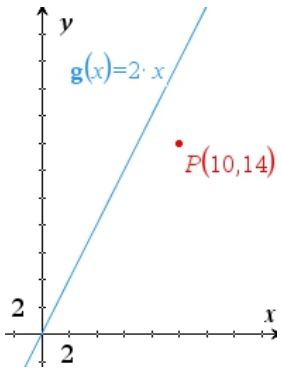
3.26 Bestem k så P ligger på graf

En funktion g har forskriften

$$g(x) = k \cdot x$$

hvor k er et tal.

Billedet viser grafen for g når $k = 2$.
Vi vil bestemme k så P ligger på grafen.



P ligger på grafen netop hvis

$$g(10) = 14$$ ifølge 3.02

dvs.

$$k \cdot 10 = 14$$

Vi løser denne ligning mht. k og får

$$k = 1{,}4$$

P ligger på grafen netop hvis $k = 1{,}4$.

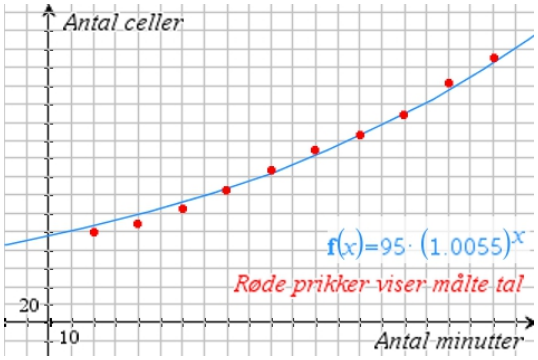
4. Model

4.01 Hvad er en model?

En **model** er noget matematik der ligner noget fra virkeligheden.

Følgende funktion er en model:

$f(x) = 95 \cdot 1{,}0055^x$
$f(x)$ er antal celler
x er antal minutter.



Den blå kurve er graf for f.
De røde prikker er målte tal.

På billedet ser vi f.eks.:

På tidspunktet 20 minutter:
målt antal er lidt mindre end models antal.

På tidspunktet 100 minutter:
målt antal er lidt større end models antal.

4.02 Model og målte tal

Vigtig egenskab ved en matematisk model:

Et målt tal er normalt ikke præcis lig modellens tal.

4.03 Afvigelse

Vi udregner antal dyr med en model. Det viser sig at

forskel på udregnet og målt tal er 200.

Passer model godt med målt tal?

For at svare på dette er det i dette eksempel nødvendigt at sammenligne afvigelsen med størrelsen af det udregnede antal.

Hvis det udregnede antal er 20 000:

Relativ afvigelse: $\frac{200}{20000} = 0{,}01 = 1\%$

Model passer godt med målt antal.

Hvis det udregnede antal er 300:

Relativ afvigelse: $\frac{200}{300} = 0{,}67 = 67\%$

Model passer ikke godt med målt antal.

4.04 Når x-værdi kun kan være helt tal

I mange opgaver er der en model der ligner følgende:

$f(t)$ = antallet (af et eller andet) t år efter 2003 .

I mange tilfælde er der kun ét antal hvert år (f.eks. antal mio. i et årsregnskab).
Så kan t kun være hele tal.

Hvis spørgsmålet er "hvornår er antallet 23",
og man får $t = 4{,}3$, så er svaret 2007 .

Hvis spørgsmålet er "hvornår overstiger antallet 23",
og man får $t = 4{,}3$, så er svaret 2008 .

Fordoblingstid og halveringstid kan godt angives som f.eks. 4,3 da disse er en angivelse af hvor langsomt antallet ændres.

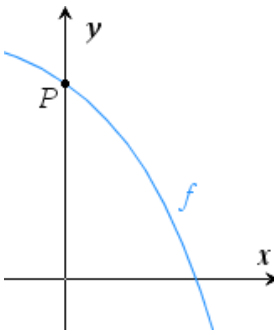
5. Skæring

5.01 Skæring mellem graf og y-akse

$P(x_1, y_1)$ er skæringspunkt mellem f-graf og y-akse.

Billedet viser grafen for funktionen

$$f(x) = 4 - 2^x$$



$P(x_1, y_1)$ ligger på y-aksen, så

$x_1 = 0$.

$P(0, y_1)$ ligger på f-grafen, så

$y_1 = 4 - 2^0$ ifølge 3.02 og $x_1 = 0$.

$y_1 = 3$ Kan udregnes i Nspire.
(I dette specielle tilfølde kan det også udregnes uden Nspire da et tal opløftet til 0 altid er lig 1 , f.eks. $2^0 = 1$).

$P = (0 , 3)$

5.02 Skæring mellem graf og x-akse

$Q(x_2, y_2)$ er skæringspunkt mellem f-graf og x-akse .

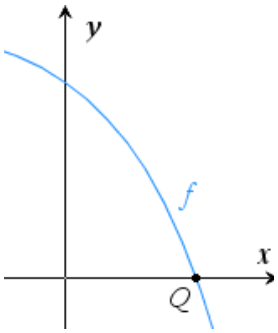
$Q(x_2, y_2)$ ligger på x-aksen, så

$y_2 = 0$

$Q(x_2, 0)$ ligger på f-grafen, så

$4 - 2^{x_2} = 0$ ifølge 3.02 og $y_2 = 0$.

$x_2 = 2$ Nspire kan finde løsningen.
(I dette specielle tilfølde kan vi kontrollere løsningen uden Nspire).



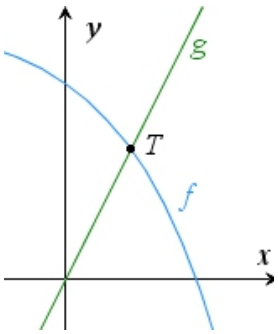
$Q = (2 , 0)$

5.03 Skæring mellem to grafer

$T(x_3, y_3)$ er skæringspunkt mellem f-graf og g-graf .

På billedet er tilføjet grafen for funktionen

$$g(x) = 2 \cdot x$$



T ligger på f-grafen, så

$y_3 = 4 - 2^{x_3}$ ifølge 3.02

T ligger på g-grafen, så

$y_3 = 2 \cdot x_3$ ifølge 3.02

$4 - 2^{x_3}$ og $2 \cdot x_3$ er altså begge lig y_3 , så

$4 - 2^{x_3} = 2 \cdot x_3$

$x_3 = 1$ Nspire kan finde løsningen.
(I dette specielle tilfølde kan vi kontrollere løsningen uden Nspire da et tal opløftet til 1 altid er lig tallet, f.eks. $2^1 = 2$) .

T ligger på g-grafen, så

$y_3 = 2 \cdot 1$ ifølge 3.02 og $x_3 = 1$.

$T = (1 , 2)$

6. Lineær funktion - løse ligning

6.01 Oplæg

For den lineære funktion $y = 3x + 5$ vil vi bestemme x når y er 17 :

$$17 = 3x + 5$$

$$12 = 3x$$ Vi har trukket 5 fra begge sider.

$$\frac{12}{3} = \frac{3x}{3}$$ Vi har divideret begge sider med 3.

$$4 = x$$ Vi har udregnet venstre side. Vi har forkortet højre side.

Vi løste ligningen ved at bruge regler for ligevægt.

I forbindelse med lineære funktioner bruger man nedenstående fire regler for ligevægt.

6.02 Regler for ligevægt

Regler for ligevægt

Vi må **lægge** samme tal **til** begge sider af lighedstegnet.

Vi må **trække** samme tal **fra** begge sider af lighedstegnet.

Vi må **gange** begge sider af lighedstegnet med samme tal hvis dette tal **ikke** er **nul**.

Vi må **dividere** begge sider af lighedstegnet med samme tal hvis dette tal **ikke** er **nul**.

6.03 Eksempel på fejl

Følgende omskrivning er **forkert**:

$$2x + 2 = 6$$

$$\frac{2x}{2} + 2 = \frac{6}{2}$$

Fejlen er at det kun er en del af venstre side der er divideret med 2 .
Det er meningen at du skal tænke på ligningen som en vægt:

Grøn klods vejer *x* kg. Gul klods vejer 1 kg.

Øverste billede er $2x + 2 = 6$.

På næste billede har vi halveret det på højre vægtskål.

Det er kun en del af det på venstre vægtskål der er halveret.

Derfor er der ikke mere ligevægt.

$$\frac{2x}{2} + 2 = \frac{6}{2}$$ FORKERT.

6.04 Modsat regning

Da vi løste $17 = 3x + 5$ startede vi med at trække 5 fra begge sider.

Begrundelsen for dette er:

Den modsatte regning til læg 5 til er træk 5 fra .

Andre eksempler:

Den modsatte regning til træk $6x$ fra er læg $6x$ til .

Den modsatte regning til gang med 4 er divider med 4 .

Den modsatte regning til divider med 2 er gang med 2 .

6.05 Eksempel på detaljeret løsning

Opgave: Gør rede for hvordan man kan løse ligningen

$$11x - 2 = 4x + 19$$

ved at bruge regler for ligevægt og modsat regning .

Redegørelse:

Der står ikke noget foran $4x$, så der er underforstået + , dvs. $4x$ lægges til.

$11x - 2 = 4x + 19$	Omvendt udregning til **lægge 4x til** er **trække 4x fra**
$11x - 2 - 4x = 4x + 19 - 4x$	**Trækker 4x fra** begge ligningens sider
$7x - 2 = 19$	Omvendt udregning til **trække 2 fra** er **lægge 2 til**
$7x - 2 + 2 = 19 + 2$	**Lægger 2 til** begge ligningens sider
$7x = 21$	Omvendt udregning til **gange med 7** er **dividere med 7**
$\frac{7x}{7} = \frac{21}{7}$	Begge ligningens sider **divideres med 7**
$x = 3$	7 kan forkortes væk da der står gange mellem 7 og x

6.06 Små-eksempler med regler for ligevægt

$x + 8 = 12$ $x + 8 - 8 = 12 - 8$ $x = 4$	Der er lagt 8 til x. Det modsatte er at trække 8 fra. Derfor trækker vi 8 fra begge sider.
$x + 5 = -14$ $x + 5 - 5 = -14 - 5$ $x = -19$	Der er lagt 5 til x. Det modsatte er at trække 5 fra. Derfor trækker vi 5 fra begge sider.
$x - 6 = 9$ $x - 6 + 6 = 9 + 6$ $x = 15$	Der er trukket 6 fra x. Det modsatte er at lægge 6 til. Derfor lægger vi 6 til begge sider.
$4 - x = 3$ $4 - x - 4 = 3 - 4$ $-x = -1$	Der står plus foran 4 (da der ikke står noget). Derfor trækker vi 4 fra begge sider. Nederst står hvordan vi fjerner minus så x står alene.
$-7 + x = 2$ $-7 + x + 7 = 2 + 7$ $x = 9$	Der er trukket 7 fra x. Det modsatte er at lægge 7 til. Derfor lægger vi 7 til begge sider.
$24 = -3 - x$ $24 + 3 = -3 - x + 3$ $27 = -x$	Der er trukket 3 fra $-x$. Det modsatte er at lægge 3 til. Derfor lægger vi 3 til begge sider. Nederst står hvordan vi fjerner minus så x står alene.
$-x = 9$ $-x \cdot (-1) = 9 \cdot (-1)$ $x = -9$	 Vi ganger begge sider med –1. Fordi minus gange minus er plus.

6.07 Forkorte

$\frac{4x}{4}$ kan forkortes til x fordi der står **gange** mellem 4 og x.

$\frac{x\cdot(-5)}{-5}$ kan forkortes til x fordi der står **gange**.

$\frac{x-5}{-5}$ og $\frac{3+x}{3}$ kan **ikke** forkortes til x fordi der **ikke** står **gange**.

6.08 Små-eksempler med regler for ligevægt

$3x = 12$ — x er ganget med 3. Det modsatte er at dividere med 3.

$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$ — Derfor dividerer vi begge sider med 3.

$x = 4$ — På venstre side kan 3 forkortes væk fordi der står gange mellem 3 og x.

$-2 = x\cdot 5$ — x er ganget med 5. Det modsatte er at dividere med 5.

$\frac{-2}{5} = \frac{x\cdot 5}{5}$ — Derfor dividerer vi begge sider med 5.

$-0{,}4 = x$ — På højre side kan 5 forkortes væk fordi der står gange mellem x og 5.

$-8x = 1$ — x er ganget med –8. Det modsatte er at dividere med –8.

$\frac{-8x}{-8} = \frac{1}{-8}$ — Derfor dividerer vi begge sider med –8.

$x = -0{,}125$ — –8 forkortes væk fordi der står gange mellem –8 og x.

Typer af omskrivninger

6.09 Samle led

For at skrive

$$6 - 5\cdot x + 7 + 2\cdot x$$

simplere (reducére den), skal vi:

1) Først gøre os klart hvilke **led** der er.
   Plus og minus skiller led, så der er følgende fire led:
   $16 \quad -5\cdot x \quad +7 \quad +2\cdot x$

2) Dernæst skal vi gøre os klart hvilke af leddene der af samme type:
   Led nr. 2 og 4 er af typen tal gange x, så de er samme type.
   Led nr. 1 og 3 er af typen tal uden bogstav, så de er af samme type.

3) Til sidst skal led af samme type slås sammen:
   $16 + 7 = 23$
   $-5\cdot x + 2\cdot x = -3x$
   Dvs.
   $6 - 5\cdot x + 7 + 2\cdot x = 23 - 3\cdot x$.

6.10 Gange ind i parentes

Der gælder

$$4\cdot(3+x) = 4\cdot 3 + 4\cdot x$$

Regel: Man ganger et tal ind i en parente ved at gange hvert led i parentesen med tallet.

6.11 Sætte uden for parentes

At de to udtryk er lig hinanden, kan også skrives sådan:

$$4\cdot 3 + 4\cdot x = 4\cdot(3+x)$$

Regel: En faktor der er i hvert led, kan sættes uden for en parentes.

Faktorer er noget der er ganget med hinanden.

6.12 Hæve minusparentes

Der gælder

$$p-(q-r) = p-q+r\,.$$

Regel:
Når man hæver en minusparentes, (dvs. fjerner parentes og minus foran) skal man ændre fortegn for hvert led i parentesen.

Eksempel:

$$7-(5-2\cdot x)$$
$$= 7-(+5-2\cdot x)$$
$$= 7 \quad -5+2\cdot x$$

6.13 Hæve plusparentes

Der gælder

$$p+(q-r) = p+q-r\,.$$

Regel:
Når man hæver en plusparentes, (dvs. fjerner parentes og plus foran) skal man IKKE ændre fortegn i parentesen.

Eksempel:

$$2\cdot x+(6-x)$$
$$= 2\cdot x+(+6-x)$$
$$= 2\cdot x \quad +6-x$$

6.14 Gange ind i minusparentes

Eksempel:

$$1-4\cdot(-2+a)$$
$$= 1-(-8+4\cdot a)$$ Først ganger vi ind i parentesen uden at hæve den.
$$= 1 \quad +8-4\cdot a$$

6.15 Forklar løsningen

Opgave

Nedenstående omskrivninger viser en korrekt løsning af ligningen

$$3(5-2x)=x+1\ .$$

Forklar linje for linje hvordan løsningen af ligningen fremkommer.

$3(5-2x)=x+1$	Ligningen opstilles
$15-6x=x+1$	
$15=7x+1$	
$14=7x$	
$2=x$	

Svar

$3(5-2x)=x+1$	Ligningen opstilles
$15-6x=x+1$	3 er ganget ind i parentesen
$15=7x+1$	$6x$ er lagt til begge sider
$14=7x$	1 er trukket fra begge sider
$2=x$	Begge sider er divideret med 7

Bemærkning

Når du skriver sådan en forklaring, så tænk på at hver linje er af en af følgende typer:

Ligningen opstilles

Minusparentesen er hævet

■ er ganget ind i parentesen

■ er lagt til begge sider

■ er trukket fra begge sider

Begge sider er ganget med ■

Begge sider er divideret med ■

6.16 Find og forklar fejlene

Opgave

Nedenstående omskrivninger viser et forsøg på at løse ligningen

$$2(2 + 5x) = x + 2 .$$

Det oplyses at omskrivningerne indeholder tre typer fejl.

Identificér og beskriv de tre typer af fejl.

$$2(2 + 5x) = x + 2 .$$
$$4 + 5x = x + 2$$
$$9x = x + 2$$
$$8x = 2$$
$$x = 4$$

Svar

$$2(2 + 5x) = x + 2 .$$

$4 + 5x = x + 2$	Kun første led i parentesen er ganget med 2. $5x$ skal også ganges med 2.
$9x = x + 2$	To led af forskellig type er lagt sammen. 4 er "tal uden x", og $5x$ er "tal gange x".
$8x = 2$	
$x = 4$	Der er udregnet 8 delt med 2 i stedet for 2 delt med 8.

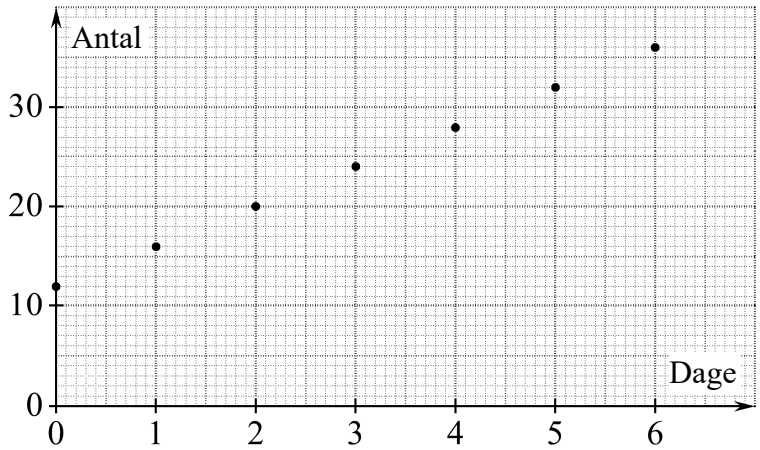
Andre eksempler på fejl

$12x = 2 - 4(3 + x)$	
$12x = -2(3 + x)$	4 kan ikke trækkes fra 2 da 4 er ganget med parentesen
$6x = 2x + 10$	
$8x = 10$	$2x$ skal trækkes fra begge sider, men er lagt til på venstre side.
$3x + 5 = 2$	
$3x = 3$	Der er udregnet $5 - 2$ i stedet for $2 - 5$.

7. Lineær funktion - intro

7.01 Oplæg til definition af lineær funktion

Hver dag stiger antal med 4 .
Vi kan tænke os til følgende:
Om 1 dag: antal $= 4 + 12$.
Om 2 dage: antal $= 4 + (4 + 12) = 4 + 4 + 12 = 4 \cdot 2 + 12$.
Om 3 dage: antal $= 4 + (4 \cdot 2 + 12) = 4 + 4 \cdot 2 + 12 = 4 \cdot 3 + 12$.
Om x dage: antal $= 4 \cdot x + 12$.
Forskriften er på formen $a \cdot x + b$.



7.02 Definition af lineær funktion

Hvis man om to variable x og y siger
y er en lineær funktion af x
så betyder det at
funktionen har en forskrift af typen $y = a \cdot x + b$
hvor konstanterne a og b kan være alle tal.
Konstanten a kaldes hældningskoefficienten .
Konstanten b kaldes konstantleddet .
At a og b er konstanter, betyder at deres talværdier ikke ændres når x ændres.
På x's plads kan indsættes alle tal (dvs. definitionsmængden er alle tal).

Eksempel: $y = 5{,}2 \cdot x - 12{,}6$ er en lineær funktion.
hældningskoefficient $= 5{,}2$.
konstantled $= -12{,}6$

Begrundelse: $y = a \cdot x + b$ vi sætter $a = 5{,}2$ og $b = -12{,}6$
$y = 5{,}2 \cdot x + (-12{,}6)$
$y = 5{,}2 \cdot x - 12{,}6$ dette er den givne forskrift

Eksempel: $y = 2 - x$ er en lineær funktion.
hældningskoefficient $= -1$. Det er tallet foran x der er a .
konstantled $= 2$

Begrundelse: $y = a \cdot x + b$ vi sætter $a = -1$ og $b = 2$
$y = (-1) \cdot x + 2$
$y = -x + 2$
$y = 2 - x$ dette er den givne forskrift

7.03 Graf for lineær funktion

At f er en lineær funktion,
er det samme som at grafen er en ret linje.

8. Lineær funktion – betydning af *a* og *b*

8.01 Oplæg til betydning af *a* og *b*

For funktionen $y = \mathbf{0{,}4} \cdot x + \mathbf{1{,}2}$ får vi

Når $x = -1$ er $y = 0{,}4 \cdot (-1) + 1{,}2 = 0{,}8$

Dette resultat står først i tabellen nedenfor.
De andre y-værdier i tabellen er udregnet på næsten samme måde.

x:	–1	0	1	2	3
y:	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4

I tabellen ser vi:

Hver gang vi lægger 1 til x-værdien,
så bliver der lagt **0,4** til y-værdien.

Når $x = 0$, er $y = \mathbf{1{,}2}$.

		+1	+1	+1	+1
x:	–1	0	1	2	3
y:	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
		+0,4	+0,4	+0,4	+0,4

8.02 Sætning om betydning af *a* og *b*

En **sætning** er en vigtig matematisk regel.

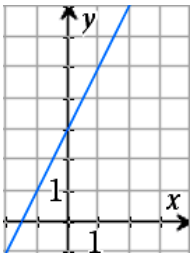
For en lineær funktion $y = a \cdot x + b$ gælder:

Hver gang vi lægger 1 til x-værdien,
så bliver der lagt a til y-værdien.

Når $x = 0$, er $y = b$.

8.03 Aflæse a og b på graf

Billederne viser grafen for en funktion f.



Grafen er en ret linje, så

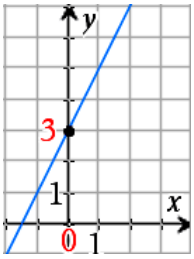
Forskrift er af typen $f(x) = a \cdot x + b$.

På graf aflæser vi at

når $x = 0$, så er $y = 3$,

så

$b = 3$.

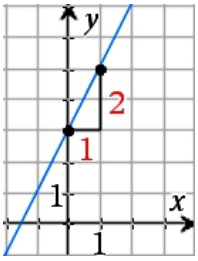


På graf ser vi at

når vi lægger 1 til x ,
så lægges 2 til y ,

så

$a = 2$.



Forskrift for f: $f(x) = 2 \cdot x + 3$.

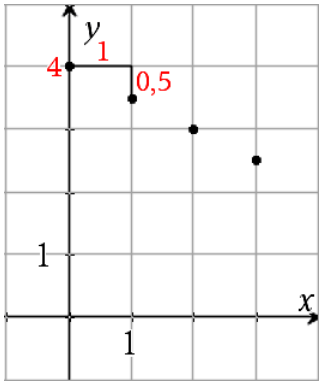
8.04 Bruge a og b til at afsætte grafpunkter

En funktion f har forskriften $f(x) = -0{,}5 \cdot x + 4$.
Forskriften er af typen $f(x) = a \cdot x + b$.

$b = 4$, så grafen skærer y-aksen ved 4 .
Dette bruger vi til at tegne et punkt på grafen (se figur).

$a = -0{,}5$, så når et punkt skubbes langs grafen så x bliver en større, så vil y blive 0,5 mindre .

Dette bruger vi til at tegne nogle flere punkter på grafen (se figur).



8.05 Graf og fortegn for *a*

På en lineær graf går vi en enhed mod højre.
Så bliver der lagt a til y-koordinaten.

Heraf følger:

Når a er positiv, går graf opad mod højre.
Når a er nul, er graf vandret.
Når a er negativ, går graf nedad mod højre.

8.06 Opgave: Hvad fortæller *a* og *b*?

Opgave

For en dåse er $y = 12 \cdot x + 35$
hvor y = pris i kr. og x = vægt i gram af dåsens indhold.

Hvad fortæller tallene 12 og 35 om varen?

Svar:

Forskriften er af typen $y = a \cdot x + b$ med $a = 12$

så når man lægger 1 til x så lægges a til y
dvs. når man lægger 1 til **vægt** så lægges **12** til **pris**

så tallet 12 fortæller:

Når vægten stiger med 1 gram, så stiger prisen med 12 kr.

Forskriften er af typen $y = a \cdot x + b$ med $b = 35$

så når $x = 0$ er $y = b$
dvs. når **vægt** = 0 er **pris** = 35

så tallet 35 fortæller:

Når dåsen er tom, er prisen 35 kr.

8.07 Opgave: Hvad fortæller *a* og *b*?

Opgave

I en by er $y = -40 \cdot x + 520$
hvor y = antal beboere og x = tid i år efter 2007.

Hvad fortæller tallene –40 og 520 om byen?

Svar:

Forskriften er af typen $y = a \cdot x + b$ med $a = -40$

så når man lægger 1 til x så lægges a til y
dvs. når man lægger 1 til **tid** så lægges **–40** til **antal**

så tallet –40 fortæller:

Når der går et år, så falder antal beboere med 40.

Forskriften er af typen $y = a \cdot x + b$ med $b = 520$

så når $x = 0$ er $y = b$
dvs. når **tid** = 0 er **antal** = 520

så tallet 520 fortæller:

I 2007 var antal beboere 520.

8.08 Opgave: Opstil model

Opgave

Ved køb var plantens højde 27 cm, og højden bliver 2,5 cm større på en uge.

Opstil en model der beskriver udviklingen i plantens højde.

Svar:

Vi indfører følgende variable:

y = højde (cm) og x = tid (uger efter køb)

Oplyst: y stiger samme antal enheder hver gang x stiger 1 enhed
så funktionen er lineær: $y = a \cdot x + b$.

Oplyst: Hver uge bliver højde 2,5 cm støre
dvs. når man lægger 1 til x (tid)
så lægges 2,5 til y (højde)
så $a = 2{,}5$

Oplyst: På tidspunkt for køb er højde 27 cm
dvs. når $x = 0$ så er $y = 27$
så $b = 27$

Vi kan nu opstille følgende model:

$y = 2{,}5 \cdot x + 27$, y = højde (cm), x = tid (uger efter køb)

8.09 Opgave: Opstil model

Opgave

Afstanden bliver 0,2 mm mindre for hver grad temperaturen stiger, og ved 0 °C er afstanden 8,4 mm.

Angiv en sammenhæng mellem afstanden og temperaturen.

Svar:

Vi indfører følgende variable:

y = afstand (mm) og x = temperatur (°C)

Oplyst: y falder samme antal enheder hver gang x stiger 1 enhed
så funktionen er lineær: $y = a \cdot x + b$.

Oplyst: For hver grad bliver afstand 0,2 mm mindre
dvs. når man lægger 1 til x (temperatur)
så lægges –0,2 til y (afstand)
så $a = -0{,}2$

Oplyst: Når temperaturen er 0 °C er afstand 8,4 mm
dvs. når $x = 0$ så er $y = 8{,}4$
så $b = 8{,}4$

Vi kan nu opstille følgende sammenhæng:

$y = -0{,}2 \cdot x + 8{,}4$, y = afstand (mm), x = temperatur (°C)

9. Lineær funktion – udregn *a* og *b*

9.01 Bestem *b* ud fra *a* og ét punkt

Opgave: Punktet $(4, 35)$ ligger på grafen for funktionen $y = 8 \cdot x + b$.
Find tallet b.

Svar: Punktet $(4, 35)$ ligger på grafen for funktionen $y = 8 \cdot x + b$

så
$$35 = 8 \cdot 4 + b$$
$$35 = 32 + b$$
$$3 = b$$

for når vi indsætter punktets x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi punktets y-koordinat.

Konklusion: $\underline{\underline{b = 3}}$.

9.02 Bestem *a* ud fra *b* og ét punkt

Opgave: Punktet $(5, 8)$ ligger på grafen for funktionen $y = a \cdot x + 18$.
Find tallet a .

Svar: Punktet $(5, 8)$ ligger på grafen for funktionen $y = a \cdot x + 18$

så
$$8 = a \cdot 5 + 18$$
$$-10 = a \cdot 5$$
$$-2 = a$$

for når vi indsætter punktets x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi punktets y-koordinat.

Konklusion: $\underline{\underline{a = -2}}$.

9.03 Bestem *a* og *b* ud fra to punkter uden brug af formel

Opgave: Punkterne $(-7, 1)$ og $(8, 4)$ ligger på grafen for funktionen
$$y = a \cdot x + b.$$
Find tallene a og b.

Svar: Da punkterne $(-7, 1)$ og $(8, 4)$ ligger på grafen for funktionen $y = a \cdot x + b$

gælder $1 = a \cdot (-7) + b$
og $4 = a \cdot 8 + b$

for når vi indsætter punktets x-koordinat i forskriften og regner ud, så får vi punktets y-koordinat.

Vi løser ligningssystemet
$$1 = a \cdot (-7) + b \quad \text{og} \quad 4 = a \cdot 8 + b$$
mht. a og b, og får $\underline{\underline{a = 0{,}2}}$ og $\underline{\underline{b = 2{,}4}}$.

Du skal vise hvordan du løser ligningssystemet.
I 9.04 er vist hvordan man løser ligningssystemet i Nspire.

9.04 Løs lignings-system med Nspire

Opgave: Løs ligningssystemet

$$1 = a \cdot (-7) + b \quad \text{og} \quad 4 = a \cdot 8 + b$$

mht. a og b .

Svar: Nspire løser ligningssystemet

$$1 = a \cdot (-7) + b \quad \text{og} \quad 4 = a \cdot 8 + b$$

mht. a og b og får $a = 0{,}2$ og $b = 2{,}4$:

solve(1=a· -7+b and 4=a· 8+b,a,b) ▸ a=0.2 and b=2.4

Konklusion: $\underline{\underline{a = 0{,}2}}$ og $\underline{\underline{b = 2{,}4}}$.

9.05 sammensat opgave

Opgave: Grafen for funktionen f er en ret linje der har hældningskoefficienten 1,5 og skærer andenaksen i punktet med andenkoordinat 2,5.

Bestem førstekoordinaten til det punkt på grafen hvis andenkoordinat er 10 .

Svar: Grafen for funktionen f er en ret linje der har hældningskoefficienten 1,5 og skærer andenaksen i punktet med andenkoordinat 2,5 .

Derfor er $f(x) = 1{,}5x + 2{,}5$.

Nspire løser ligningen $1{,}5x + 2{,}5 = 10$ mht. x og får $x = 5$.

solve(1.5· x+2.5=10,x) ▸ x=5.

Grafens punkt med andenkoordinat 10 har førstekoordinat 5 .

9.06 sammensat opgave

Opgave: Grafen for funktionen $f(x) = 3x + b$ går gennem punktet $(4, 5)$.

Bestem $f(-3)$.

Svar: Da grafen for funktionen $f(x) = 3x + b$ går gennem punktet $P(4, 5)$, fås

$$3 \cdot 4 + b = 5$$

$$b = 5 - 12$$

$$b = -7$$

Dvs. $f(x) = 3x - 7$ så

$$f(-3) = 3 \cdot (-3) - 7$$

$$f(-3) = -9 - 77$$

$$f(-3) = -16$$

10. Proportionale størrelser

10.01 Oplæg til definition af proportional

Et værksted bruger stænger af forskellig længde.
Man har målt længde og vægt af nogle af dem:

Længde (cm):	10	20	30	40
Vægt (gram):	26	52	78	104

For hver af stængerne dividerer vi vægt-tallet med længde-tallet .
I alle tilfælde får vi 2,6 .

Der gælder altså

$$m = 2{,}6 \cdot l$$

hvor m er vægten (gram) og l er længden (cm).

Man siger at vægten er proportional med længden og at proportionalitetskonstanten er 2,6 gram pr. cm .

Stængerne vejer altså 2,6 gram pr. cm.
Proportionalitetskonstanten er vægten pr. cm .

10.02 Definition af proportional

Hvis man om to variable x og y siger at

y er proportional med x

så mener man at

$$y = k \cdot x$$

hvor k er en konstant der ikke er 0.
Tallet k kaldes proportionalitetskonstanten.

At k er en konstant, betyder at k er samme tal for alle værdier af x .

Når man kender to sammenhørende værdier af x og y (dvs. (x,y) er et punkt på grafen), så kan k bestemmes ved at bruge følgende formel:

$$k = \frac{y}{x}$$

10.03 Opgave om proportional

Opgave De to variable x og y er proportionale.
Tabellen viser nogle sammenhørende værdier af x og y.

x	24	36	92
y	18	27	69

a) Hvad er y når x er 10?

b) Hvad er x når y er 15?

Svar

I opgaven står ikke at vi skal udregne k.
Vi skal selv vide at vi skal udregne k først.

Udregne k:

Da x og y er proportionale, er der et tal k så

(1) $y = k \cdot x$.

Hvor

(2) $k = \frac{y}{x}$

I tabellen ser vi at når $x = 24$ er $y = 18$.
Dette indsætter vi i **(2)**:

Hvis vi i stedet bruger 36 og 27 eller 92 og 69, så får vi den samme værdi af k.

$$k = \frac{18}{24} = 0,75$$

Dette tal indsætter vi i **(1)** og får ligningen for sammenhængen mellem x og y:

(3) $y = 0,75 \cdot x$

a) Udregne y:

For at finde y når x er 10, sætter vi x til 10 i **(3)**:

$$y = 0,75 \cdot 10$$

Heraf får vi $y = 7,5$ så

y er 7,5 når x er 10

b) Udregne x:

For at finde x når y er 15, sætter vi y til 15 i **(3)**:

$$15 = 0,75 \cdot x$$

Vi kan løse ligningen ved at dividere begge sider med 0,75 eller ved at bruge solve.

Vi løser denne ligning mht. x og får

$$20 = x$$

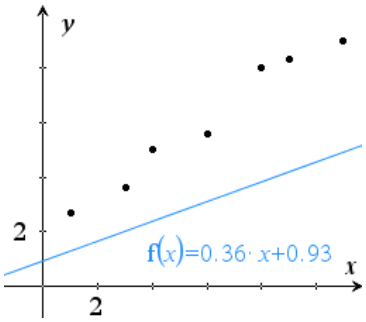
så

x er 20 når y er 15

11. Regression

11.01 Oplæg

Billedet viser Nspire-skærmen.
Den blå linje er graf for funktionen med den viste forskrift.



Med musen kan man flytte og dreje linjen.
Så ændres forskriften automatisk.

De sorte punkter viser målte værdier.

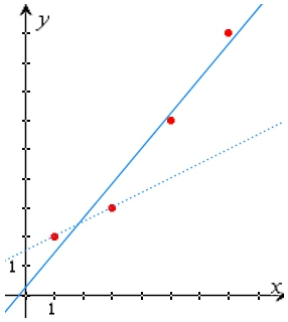
Hvis vi trækker i linjen så den passer godt med punkterne, så vil den viste forskrift være en model af den pågædende sammenhæng.

Vi kan få Nspire til at udføre lineær regression på punkterne.
Så får vi forskriften for den linje der passer bedst med punkterne.

11.02 Alle tal skal bruges

Tabel:

***x*:**	1	3	5	7
***y*:**	2	3	6	9



De fire punkter i tabellen er vist som røde prikker.

Hvis vi bruger alle punkter til at bestemme lineær graf, så får vi den fuldt optrukne linje.

Hvis vi kun bruger de to første punkter, så får vi den punkterede linje som passer dårligere med tabellen.

Man skal altså bruge alle tal i tabellen.

11.03 Opgavens formulering

Vi har målt længde og bredde for nogle plader:

længde i cm	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5
bredde i cm	5,1	5,3	5,9	6,1	6,6

For plader af denne type gælder med god tilnærmelse $y = ax+b$
hvor y er bredde i cm, og x er længde målt i cm.

a) Benyt tabellens data til at bestemme a og b.

b) Tegn et punktplot af tabellens data.

11.04 Brugsanvisning til regression i Nspire

Del siden op i to. Vælg Lister og Regneark i venstre vindue.
Se nedenfor hvordan du skal taste tal og søjlenavne.
Når du har tastet tabellen, så flyt markør til tomt felt.

Vælg i højre vindue Diagrammer og statistik .
Klik under x-aksen og vælg søjlen med x-værdier.
Klik til venstre for y-aksen og vælg søjlen med y-værdier.
Vælg i værktøjsmenuen Undersøg data / Regression / lineær .

Der er automatisk fremkommet et punktplot. Behold dette som illustration selv om der ikke i opgaven er krav om punktplot.

11.05 Besvarelsen

I Nspire kan besvarelsen se sådan ud:

Med tilnærmelse er $f(x) = a \cdot x + b$

hvor $f(x)$ er bredde (cm), og x er længde (cm).

a) Vi taster længde i x–søjle og bredde i y–søjle som vist i næste vindue.

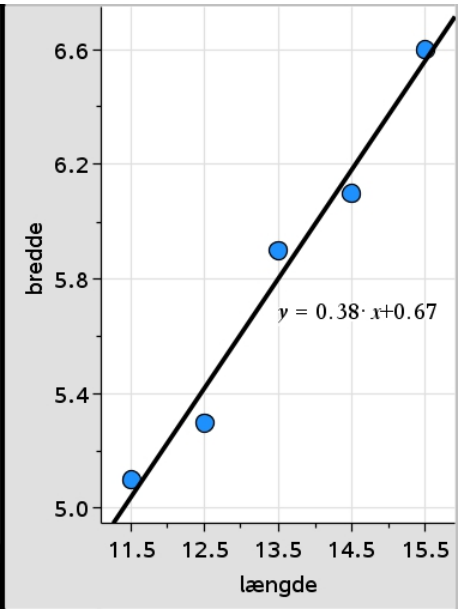
Nspire laver **lineær regression** og får $f(x) = 0{,}38 \cdot x + 0{,}67$.

Dvs. $a = 0{,}38$ og $b = 0{,}67$.

b) I næste vindue viser figuren til højre et punktplot af tabellens data.

	A längde	B bredde	C
=			
1	11.5	5.1	
2	12.5	5.3	
3	13.5	5.9	
4	14.5	6.1	
5	15.5	6.6	
6			
7			
8			
9			

D8



11.06 Krav til besvarelsen

Besvarelsen skriver du i note-vinduet.

Besvarelsen skal indeholde følgende oplysninger:

Hvilke tal du har tastet.
Hvilke af tallene du har tastet i x-søjlen.
Hvilke af tallene du har tastet i y-søjlen.
At du får Nspire til at udføre regression.
Hvilken type regression.

11.07 Når der står "Brug model"

For en type vare er y omsætning x dage efter annoncering.

Målte tal:

x:	6	12	18	24
y:	65	103	151	209

Model: $y = 8x + 12$

Brug model til at bestemme stigning i omsætning fra 6 til 10 dage efter annoncering.

Fejl at bruge tal fra tabel da vi skal besvare spørgsmål ved hjælp af model.

Forkert:
Af tabel: når $x = 6$ er $y = 65$
Af $y = 8x + 12$: når $x = 10$ er $y = 8 \cdot 10 + 12 = 92$
Stigning $92 - 65 = 27$

Rigtigt:
Af $y = 8x + 12$: når $x = 6$ er $y = 8 \cdot 6 + 12 = 60$
Af $y = 8x + 12$: når $x = 10$ er $y = 8 \cdot 10 + 12 = 92$
Stigning $92 - 60 = 32$

Fejl at bruge målt tal når vi skal bruge model.

11.08 Årstal

Tabellen viser antallet af boliger i et bestemt område.

Årstal	1998	2000	2002	2004	2006	2008
Antal boliger	133	170	186	218	232	247

Antallet af boliger kan med god tilnærmelse beskrives ved en ligning af typen $y = ax + b$ hvor y er antallet af boliger, og x er antal år efter 1998.

Bestem tallene a og b.

Vi taster IKKE årstal da x ikke er årstallet!

	A år	B antal
=		
1	0	133
2	2	170

Den tastede tabel hører med til besvarelsen.

På Nspire kan besvarelsen se sådan ud:

Se brugsanvisning i 11.04 .

Med tilnærmelse er $y = a \cdot x + b$

hvor y er antal boliger, og x er antal år efter 1998 .

Den oplyste tabel er vist i næste vindue.

a) Antal år efter 1998 er tastet i x–søjle og antal boliger i y–søjle som vist i næste vindue.

Nspire laver **lineær regression** og får $f(x) = 11{,}2571 \cdot x + 141{,}381$.

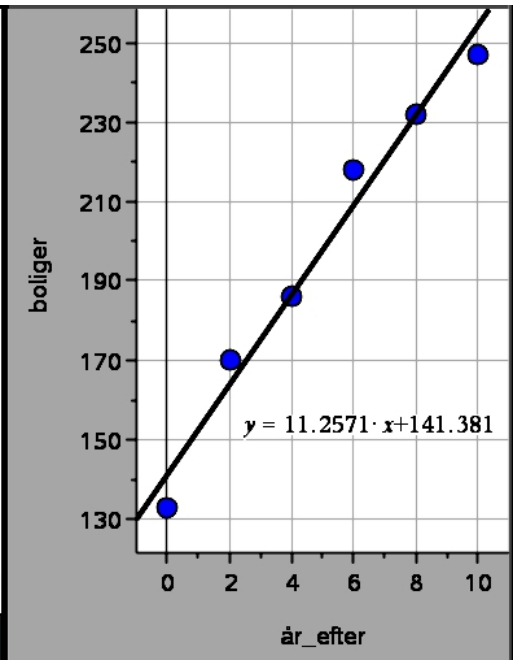
Dvs. $a = 11{,}26$ og $b = 141{,}4$.

Fortsættes i næste ramme!

11.09 regneark

	A år	B boliger	C år_efter
=			=år−1998
1	1998	133	0
2	2000	170	2
3	2002	186	4
4	2004	218	6
5	2006	232	8
6	2008	247	10
7			
8			
9			

E7



11.10 Residualer og største afvigelse

I de to øverste rækker i tabellen nedenfor står tallene fra 11.03 , dvs. anden række viser de målte y-værdier.

Vi fandt modellen $y = 0{,}38 \cdot x + 0{,}67$. I denne model gælder:
Når $x = 11{,}5$, så er $y = 0{,}38 \cdot 11{,}5 + 0{,}67 = 5{,}04$ (modellens y-værdi).
I tredje række står modellens y-værdier.

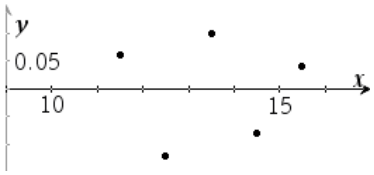
I fjerde række har vi trukket models y fra målt y .
Tallene i denne række kaldes **residualer** .

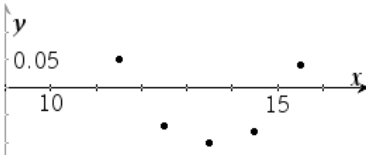
Længde i cm	x	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5
Bredde i cm	$y_{\text{målt}}$	5,1	5,3	5,9	6,1	6,6
Bredde i cm	y_{model}	5,04	5,42	5,8	6,18	6,56
Residual i cm	$y_{\text{målt}} - y_{\text{model}}$	0,06	–0,12	0,1	–0,08	0,04

Vi ser at den største afvigelse mellem målt værdi og modelværdi for bredden er 0,12 cm, og det er når længden er 12,5 cm.

11.11 Residualplots Brug til at vurdere model

I koordinatsystemet nedenfor til venstre er vist residualerne fra 11.10 .
Dette kaldes et **residualplot** .





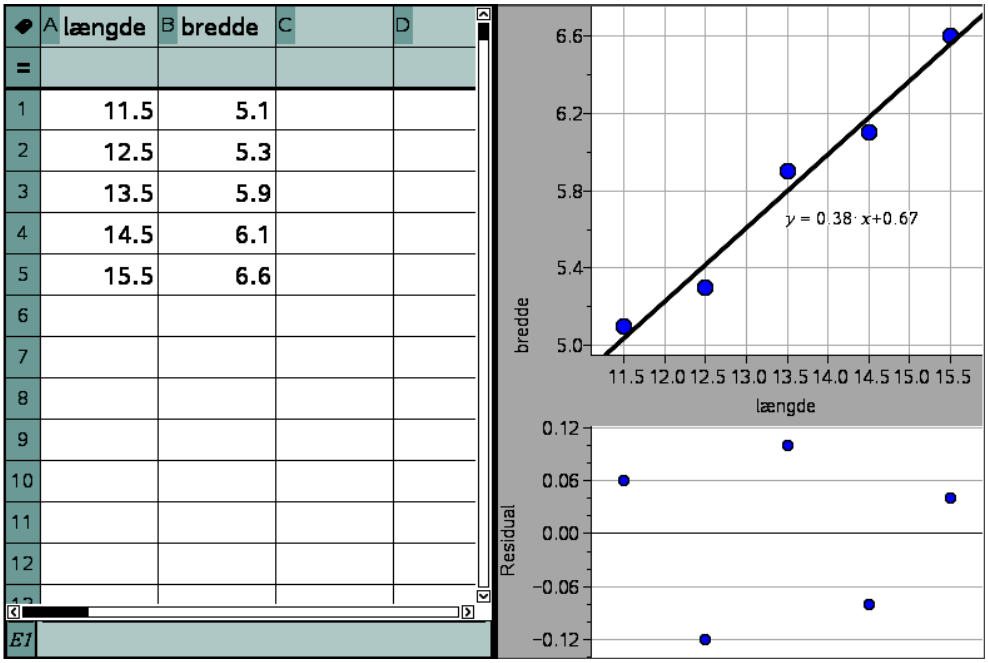
Afvigelserne virker tilfældige.
Dette tyder på at det er rimeligt at bruge en model af typen $y = a \cdot x + b$.

Hvis afvigelserne ligger på kæde som vist til højre, så tyder det på at det er bedre at bruge en anden type model.

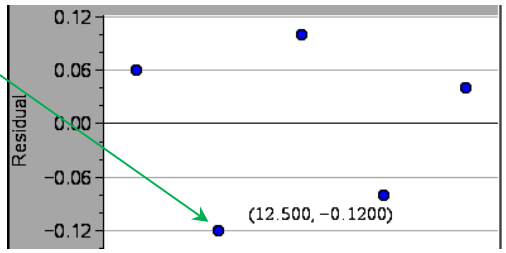
11.12 Brugsanvisning til residualplot i Nspire

På Nspire kan vi nemt få vist residualplottet:

Start på ny opgave.
Vælg et vindue af typen Lister og regneark .
Navngiv en søjle og tast x-værdier i den.
Navngiv en søjle og tast y-værdier i den.
Tilføj et vindue af typen Diagrammer og statistik .
Klik under x-aksen og vælg søjlen med x-værdier.
Klik til venstre for y-aksen og vælg søjlen med y-værdier.
Vælg i værktøjsmenuen Undersøg data / Regression / lineær .
Vælg i værktøjsmenuen Undersøg data / Residualer / Residualplot .



11.13 Aflæsning af residualplot i Nspire



På residualplottet finder vi punktet med størst afstand til x-aksen.
Når markøren føres hen til punktet, fremkommer koordinatsættet.

Vi ser at den største afvigelse mellem målt værdi og modelværdi for bredden er 0,12 cm, og det er når længden er 12,5 cm.