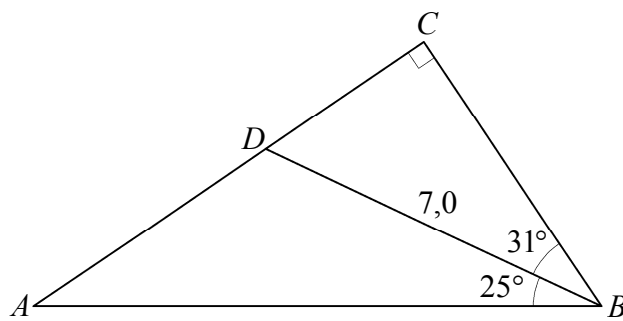


Trekants- beregning



Dette hæfte indeholder den del af trekantsberegningen som skal kunne på C-niveau i gymnasiet (stx) og hf.

Fremstillingen undgår at forudsætte en indsigt hos eleverne som de ikke kan forventes at have.

Indhold

1. Areal af trekant	3
2. Pythagoras' sætning	6
3. Ensvinklede trekanter	10
4. Cosinus	13
5. Sinus	20
6. Tangens.....	24
7. Beregning af sider og vinkler i retvinklet trekant.....	26
8. Opgaver	27

Nyere hæfter:

http://mat1.dk/oelvelser_til_haeftet_kortfattet_trekantsberegning_for_gymnasiet_og_hf.pdf
29/5-11

Bl.a. mange småopgaver der vænner eleverne til at behandle stoffet på en mere abstrakt måde så de får nemmere ved at lære matematikken.

http://mat1.dk/kortfattet_trekantsberegning_for_gymnasiet_og_hf.pdf 26/11-10

http://mat1.dk/trekantsberegning_udg2.pdf 1/1-10

Trekantsberegning

1. udgave 2009

© 2009 Karsten Juul

Dette hæfte kan downloades fra

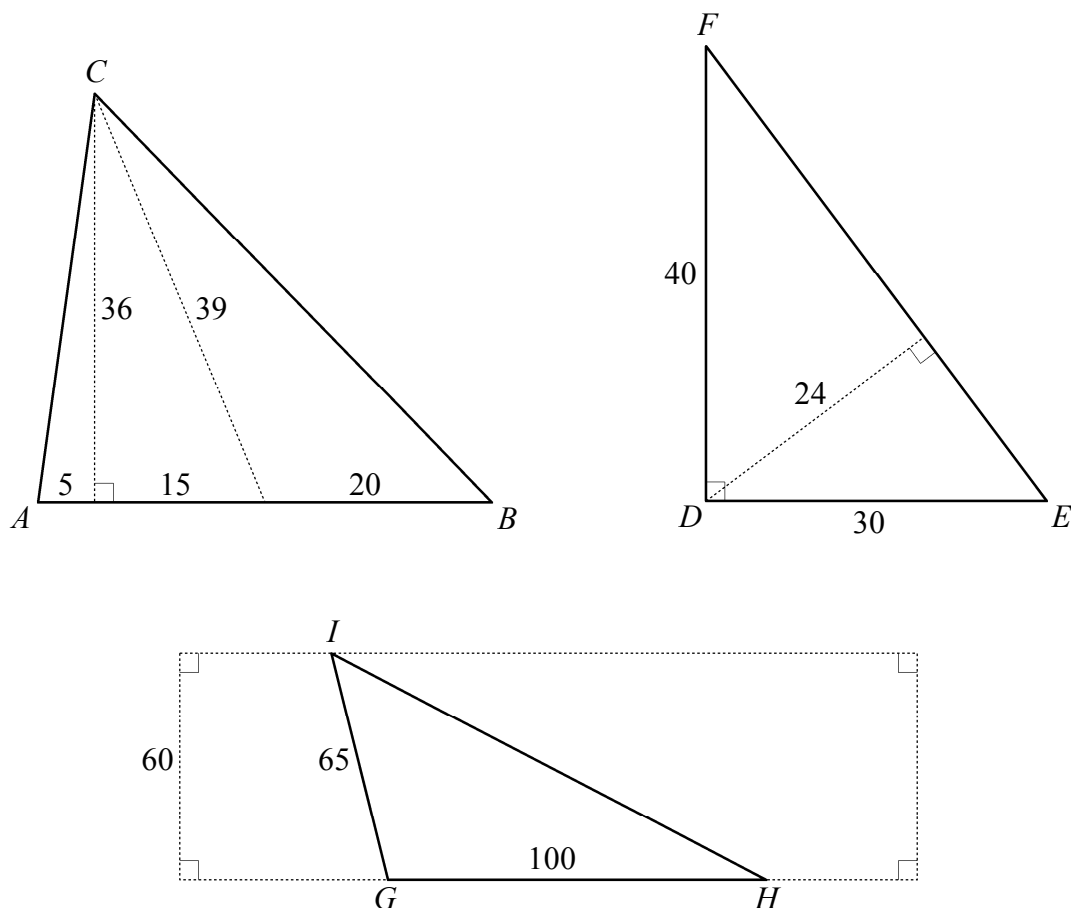
<http://www.mat1.dk>

Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til kj@mat1.dk som dels oplyser at dette hæfte benyttes, dels oplyser om klasse/hold, lærer og skole/kursus.

Afsnit 1. Areal af trekant.

Øvelse 1.1

Beregn arealet af hver af de tre trekanter ABC , DEF og GHI .



DEFINITION 1.2 Højde og grundlinje

En højde i en trekant er et linjestykke der går

fra en vinkelspids og vinkelret ned på den modstående side

eller

fra en vinkelspids og vinkelret ned på forlængelsen af den modstående side.

Der er tre højder i en trekant.

Vi kan selv bestemme hvilken af trekantens sider vi kalder grundlinjen.

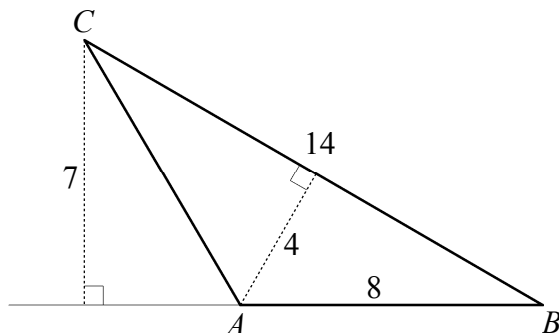
Når vi taler om trekantens højde, så er det den af højderne der er vinkelret på den side som vi har valgt at kalde grundlinje.

Eksempel 1.3

Figuren viser en trekant ABC .

Hvis vi vælger siden med længde 8 som grundlinje, så er højden 7.

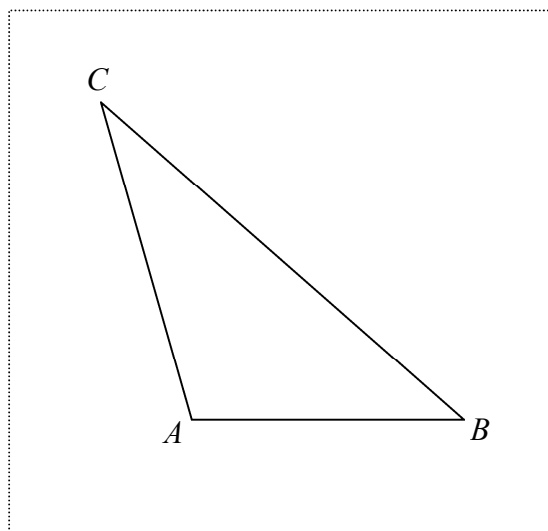
Hvis vi vælger siden med længde 14 som grundlinje, så er højden 4.



Øvelse 1.4

Tegn det linjestykke som er højde hvis vi vælger BC som grundlinje.

Tegn det linjestykke som er højde hvis vi vælger AC som grundlinje. (Se definition 1.2).



SÆTNING 1.5 *Areal af trekant*

Når

T = arealet af trekanten

g = grundlinjen (dvs. en side i trekanten)

h = højden (dvs. den af højderne der står vinkelret på den valgte grundlinje)

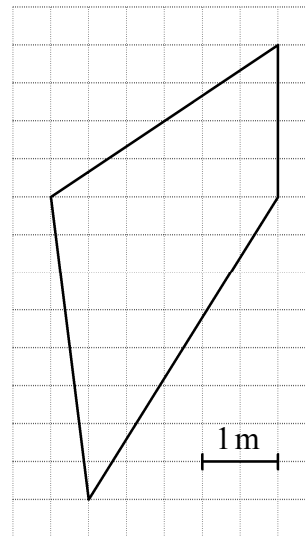
gælder

$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g .$$

Øvelse 1.6

Figuren viser et firkantet bur set fra oven.

Bestem burets areal på den nemmest mulige måde.

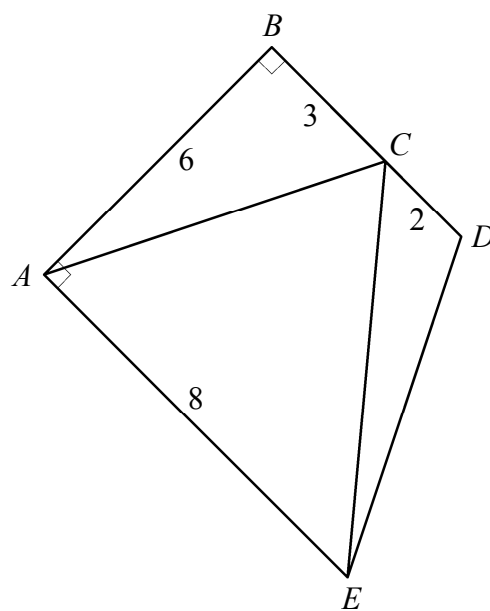


Øvelse 1.7

Bestem arealet af trekant ABC .

Bestem arealet af trekant ACE .

Bestem arealet af trekant CDE .



Afsnit 2. Pythagoras' sætning.

DEFINITION 2.1 *Katete og hypotenuse.*

Kateterne i en retvinklet trekant er de to sider der danner den rette vinkel.

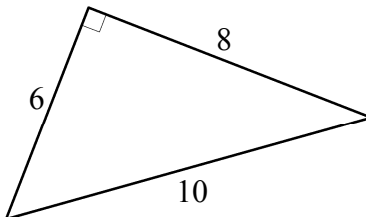
Hypotenusen i en retvinklet trekant er den side der ligger over for den rette vinkel.

Eksempel 2.2

Figuren viser en retvinklet trekant.

Kateterne er 6 og 8.

Hypotenusen er 10.



SÆTNING 2.3 *Pythagoras' sætning.*

For en retvinklet trekant gælder:

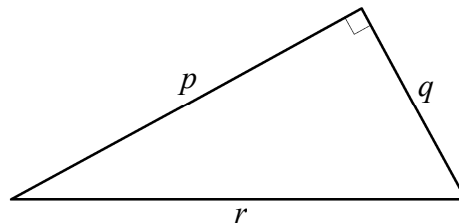
Hvis

p og q er kateterne, og

r er hypotenusen

så er

$$p^2 + q^2 = r^2.$$



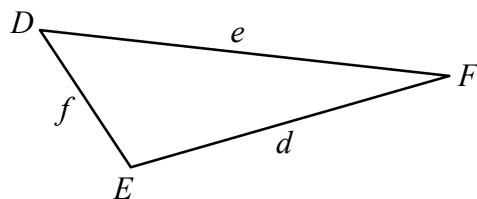
Bemærkning 2.4: *En sprogbrug*

Hvis der står

i trekant DEF er $f = 14$

gælder

det er siden over for vinkelspidsen F der er 14.



Sprogbrugen er nemlig sådan at når

et stort bogstav er en vinkelspids i en trekant,

gælder

det tilsvarende lille bogstav er siden over for vinkelspidsen,

hvis der ikke fremgår andet.

Denne sprogbrug er brugt her:

I en trekant ABC hvor vinkel C er ret, er $a^2 + b^2 = c^2$.

Bemærkning 2.4 om sprogbrug fortsætter på næste side.

Advarsel

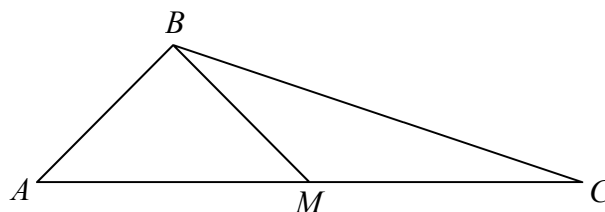
Se figuren til højre.

Her dur det ikke hvis du skriver $m = 2,6$.

Læseren kan ikke vide om det er AB
eller BC der er $2,6$.

Skriv m på den side du mener.

Du skal altid tegne en figur i en geometriopgave.



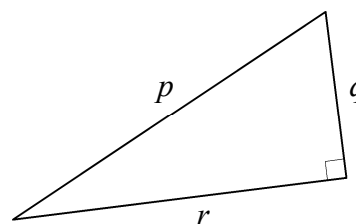
Øvelse 2.5

Afgør for hver ligning om den er korrekt.

(1) $p^2 + q^2 = r^2$

(2) $p^2 + r^2 = q^2$

(3) $r^2 + q^2 = p^2$



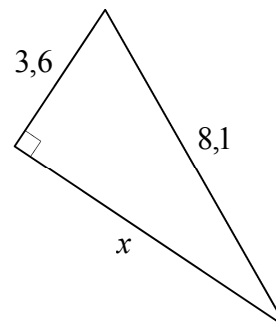
Øvelse 2.6

Afgør for hver ligning om den er korrekt.

(1) $3,6^2 + 8,1^2 = x^2$

(2) $3,6^2 + x^2 = 8,1^2$

(3) $x^2 + 8,1^2 = 3,6^2$



Øvelse 2.7

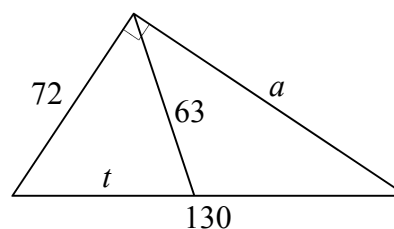
Afgør for hver ligning om den er korrekt.

(1) $72^2 + 63^2 = t^2$

(2) $t^2 + 63^2 = 72^2$

(3) $72^2 + a^2 = 130^2$

(4) $a^2 + 130^2 = 72^2$



Opgave 2.8: Udregne hypotenusen når kateterne er kendt.

I trekant CDE er vinkel D ret, længden af siden CD er 3,4 ,
og længden af siden DE er 2,1 .

Bestem længden af siden CE .

Svar: Først tegner vi en skitse af trekanten.

Af Pythagoras' sætning får vi at

$$d^2 = 3,4^2 + 2,1^2 .$$

Så må

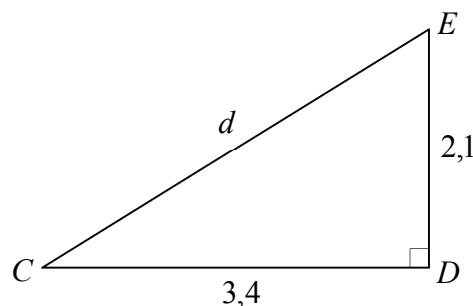
$$d = \sqrt{3,4^2 + 2,1^2} .$$

Vi udregner dette på lommeregner:

$$d = 3,99625 .$$

Konklusion:

Længden af siden CE er 4,0 .

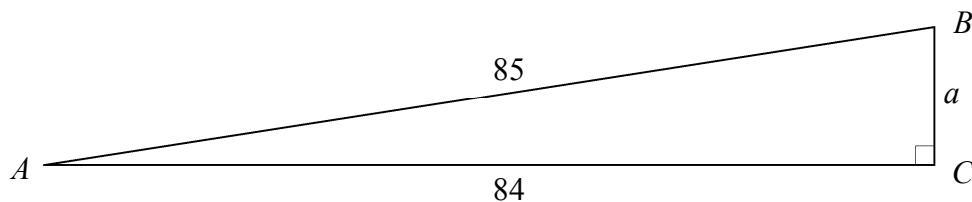


Opgave 2.9: Udregne en katete når hypotenusen og den anden katete er kendt.

I trekant ABC er vinkel C ret, længden af siden AC er 84 ,
og længden af siden AB er 85.

Bestem længden af siden BC .

Svar: Først tegner vi en skitse af trekanten.



Af Pythagoras' sætning får vi at

$$84^2 + a^2 = 85^2 .$$

Vi trækker 84^2 fra begge sider:

$$a^2 = 85^2 - 84^2 .$$

Heraf får vi at

$$a = \sqrt{85^2 - 84^2} .$$

Vi udregner dette på lommeregner:

$$a = 13 .$$

Konklusion:

Længden af siden BC er 13 .

Opgave 2.10: Udregne areal når kateterne er kendt.

I trekant ABC er vinkel C ret, længden af siden AC er 5, og længden af siden BC er 9.

Bestem arealet af trekant ABC .

Svar: Først tegner vi en skitse af trekanten.

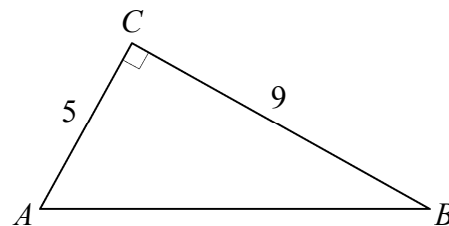
Vi vælger AC som grundlinje.
Så er BC højden.

Arealet er

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 9 = 22,5 .$$

Konklusion:

Arealet af trekant ABC er 22,5 .



Opgave 2.11: Udregne areal når hypotenusen og en af kateterne er kendt.

I trekant DEF er vinkel D ret, længden af siden EF er 11, og længden af siden DF er 5.

Bestem arealet af trekant DEF .

Svar: Først tegner vi en skitse af trekanten.

Vi vælger DE som grundlinje.
Så er DF højden.

Vi bestemmer grundlinjen:

Vi bruger Pythagoras' sætning:

$$f^2 + 5^2 = 11^2$$

Heraf får vi

$$f = \sqrt{11^2 - 5^2} .$$

Vi bestemmer arealet:

Arealet er

$$\frac{1}{2} \cdot f \cdot 5$$

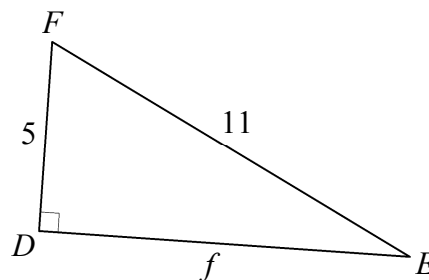
dvs.

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{11^2 - 5^2} \cdot 5 .$$

Vi udregner dette på lommeregner og får
24,4949 .

Konklusion:

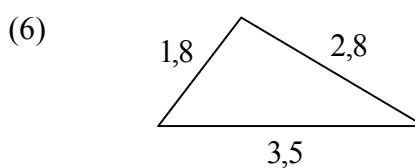
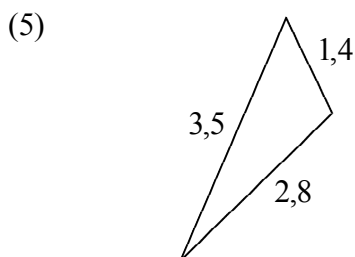
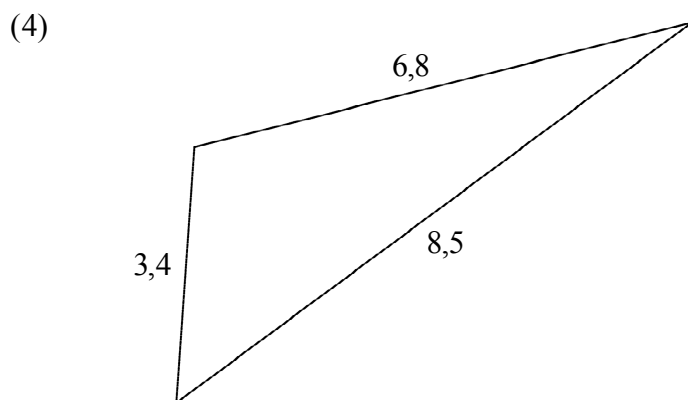
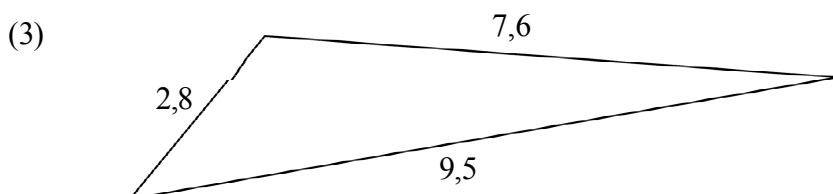
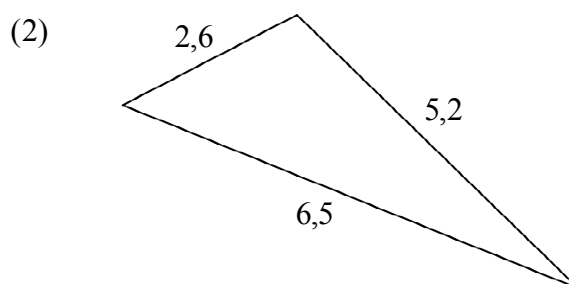
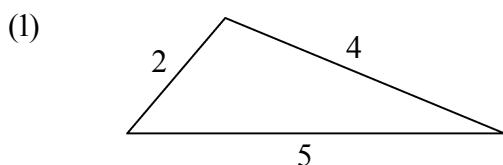
Arealet af trekant DEF er 24,5 .



Afsnit 3. Ensvinklede trekanter.

Øvelse 3.1

- (a) Hvilket tal skal vi gange siderne i trekant (1) med for at få siderne i trekant (2)?
Da alle sider skal ganges med samme tal, er (2) en forstørrelse eller en formindskelse af (1).
Det tal vi ganger med, er størrelsesforholdet og kaldes skalafaktoren.
- (b) For hver af trekanterne (3), (4), (5) og (6) skal du afgøre om der findes en skalafaktor som ganget med siderne i (1) giver siderne i den pågældende trekant. Angiv skalafaktoren hvis den eksisterer.



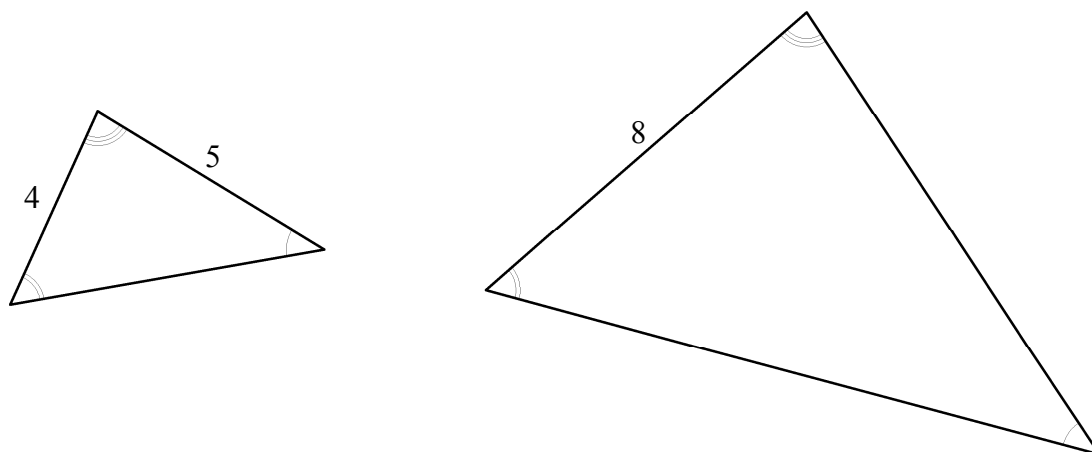
Eksempel 3.2

På figuren nedenfor bruger vi buer, dobbelte buer og tredobbelte buer til at vise hvilke vinkler der er lige store.

Trekanterne har samme vinkler, så de har samme form. Den store er altså en forstørrelse af den lille.

I den lille trekant er der en side med længde 4, og i den store trekant er der en side med længde 8. Disse to sider ligger over for vinkler der er lige store. Da vi skal gange den lille side med 2 for at få den store, er skalafaktoren 2.

Siden over for vinklen med dobbelt bue i den store trekant er altså 2 gange 5, dvs. 10.



Øvelse 3.3

Du får nu en ny oplysning om den store trekant fra eksempel 3.2: Siden over for vinklen med tredobbelt bue har længden 12.

Hvor lang er den side i den lille trekant som ligger over for vinklen med tredobbelt bue?

SÆTNING 3.4 *Ensvinklede trekanter*

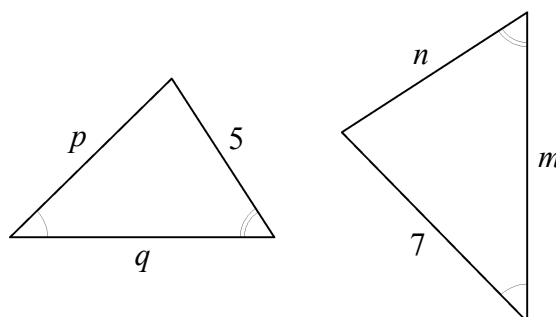
Når en trekant har samme vinkler som en anden trekant, så findes et tal k (skalafaktoren) så vi ved at gange siderne i den første trekant med k får siderne i den anden trekant.

Vi skal se på om en side i den første trekant og en side i den anden trekant ligger over for vinkler der er lige store. Hvis de gør det, vil k gange den første side være lig den anden side.

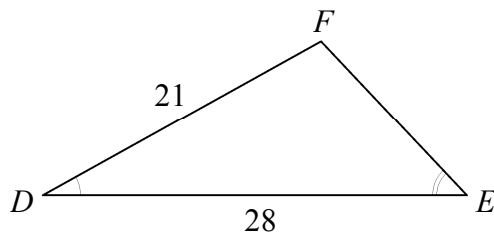
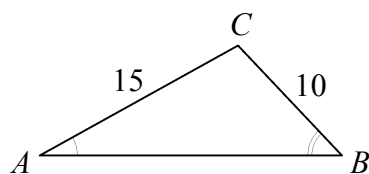
Øvelse 3.5

De to trekanter til højre er ensvinklede så der findes et tal k som ganget med siderne i første trekant giver siderne i anden trekant. Afgør for hver af følgende ligninger om den er gyldig:

- (1) $5 \cdot k = 7$
- (2) $p \cdot k = n$
- (3) $p \cdot k = 7$
- (4) $m \cdot k = q$
- (5) $q \cdot k = m$



Opgave 3.6: Udregne sider i ensvinklede trekanter.

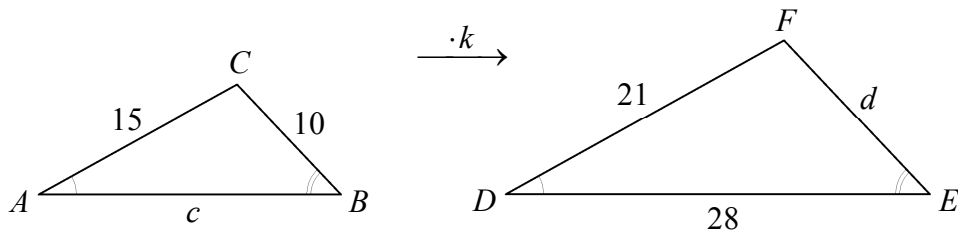


Figuren viser to ensvinklede trekanter ABC og DEF .

Bestem længderne af siderne EF og AB .

Svar:

Da trekanterne er ensvinklede, findes der en skalafaktor k :



Skalafaktoren:

Siden med længde 15 fra den første trekant og siden med længde 21 fra den anden ligger over for vinkler som er lige store. Derfor gælder

$$15 \cdot k = 21 .$$

Heraf får vi

$$k = \frac{21}{15}$$

dvs.

$$\underline{k = 1,4} .$$

Siden EF :

Siden med længde 10 i den første trekant og siden med længde d i den anden ligger over for vinkler der er lige store. Derfor gælder

$$10 \cdot 1,4 = d$$

dvs.

$$\underline{d = 14} .$$

Siden AB :

Siden med længde c i den første trekant og siden med længde 28 i den anden ligger over for vinkler der er lige store. Derfor gælder

$$c \cdot 1,4 = 28 .$$

Heraf får vi

$$c = \frac{28}{1,4}$$

dvs.

$$\underline{c = 20} .$$

Konklusioner:

Længden af siden EF er 14 og længden af siden AB er 20.

Afsnit 4. Cosinus.

DEFINITION 4.1 *Hosliggende katete*

Forestil dig at du sidder i den spidse vinkel u og holder i de to vinkelben.

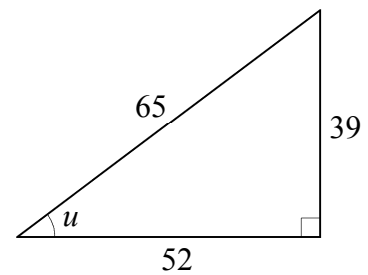
En af de sider du holder i, er en katete.

Denne side kaldes vinklens hosliggende katete.

Vinklen kaldes katetens hosliggende spidse vinkel.

I den viste trekant gælder altså:

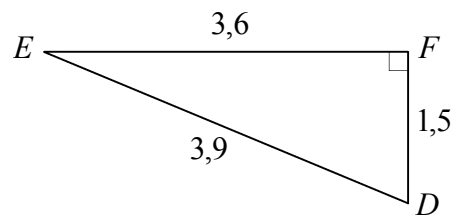
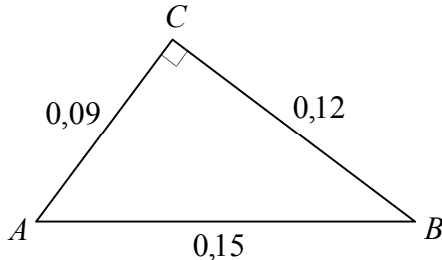
Vinkel u 's hosliggende katete har længden 52.



Øvelse 4.2

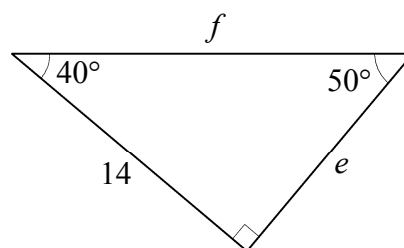
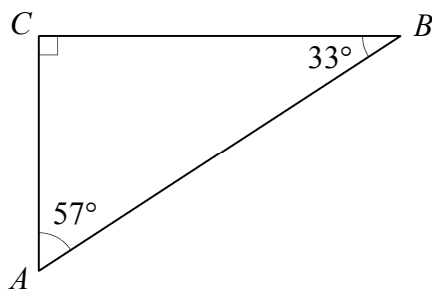
Brug metoden fra definition 4.1 til at finde svarene på følgende spørgsmål:

- (1) Hvor lang er vinkel A 's hosliggende katete?
- (2) Hvor lang er vinkel D 's hosliggende katete?
- (3) Hvor lang er vinkel B 's hosliggende katete?
- (4) Hvor lang er vinkel E 's hosliggende katete?



Øvelse 4.3

- (1) Hvor mange grader er kateten AC 's hosliggende spidse vinkel?
- (2) Hvor mange grader er den spidse vinkel der er hosliggende til siden med længde e ?
- (3) Hvor mange grader er kateten BC 's hosliggende spidse vinkel?
- (4) Hvor mange grader er den spidse vinkel der er hosliggende til siden med længde 14?



DEFINITION 4.4 *Cosinus*

På *lommeregner* kan vi udregne cosinus og omvendt cosinus .

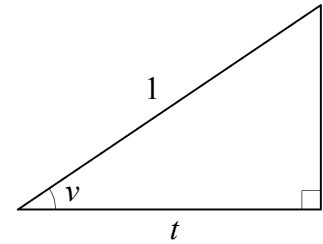
Figuren viser en retvinklet trekant hvor hypotenusen er 1.

Hvis vi udregner: cosinus til gradtallet for en af de spidse vinkler,
så får vi: længden af denne vinkels hosliggende katete .

Vi skriver: $\cos(v) = t$.

Hvis vi udregner: omvendt cosinus til længden af en af kateterne,
så får vi: gradtallet for katetens hosliggende spidse vinkel .

Vi skriver: $\cos^{-1}(t) = v$.



Symbolet \cos^{-1} er ikke en sædvanlig potens. Det hævdede -1 betyder "omvendt".

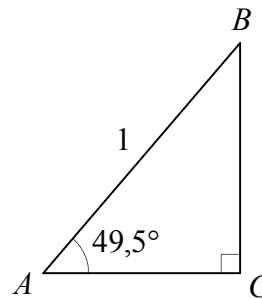
Eksempel 4.5

På *lommeregner* udregner vi at

$$\cos(49,5^\circ) = 0,649448 \text{ .}$$

Dette betyder at

længden af siden AC er 0,649 .

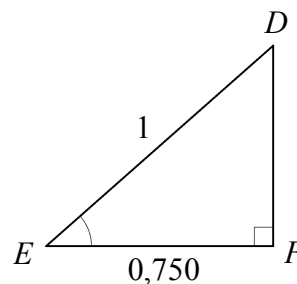


På *lommeregner* udregner vi at

$$\cos^{-1}(0,750) = 41,4096^\circ \text{ .}$$

Dette betyder at

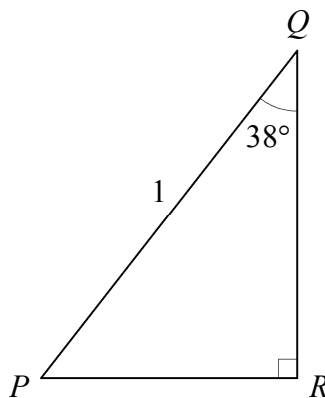
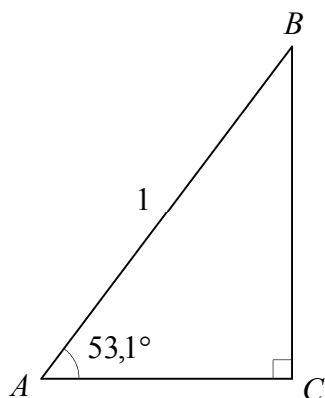
vinklen E er 41,4° .



Øvelse 4.6

Nedenfor er vist to trekanter

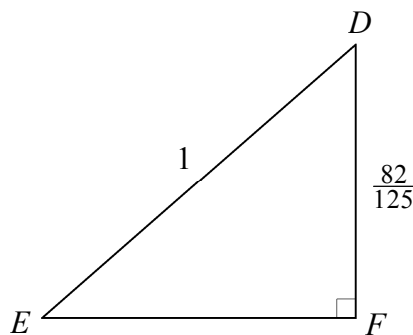
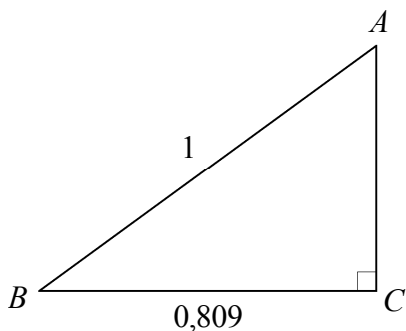
Brug cosinus på lommeregneren til at udregne længden af hver af siderne AC og QR .



Øvelse 4.7

Nedenfor er vist to trekanter.

Brug omvendt cosinus til at udregne vinklerne B og D .



Øvelse 4.8

I trekant ABC er vinkel C ret, vinkel A er $33,9^\circ$, længden af siden AB er 1, og længden af siden AC er $\frac{q}{2}$, hvor q er et tal der ikke er oplyst.

Skitsér trekanten.

Bestem tallet q .

Øvelse 4.9

I trekant DEF er vinkel F ret, vinkel D er $36,9^\circ$, længden af siden DE er 1, og længden af siden DF er $\frac{4}{p}$, hvor p er et tal der ikke er oplyst.

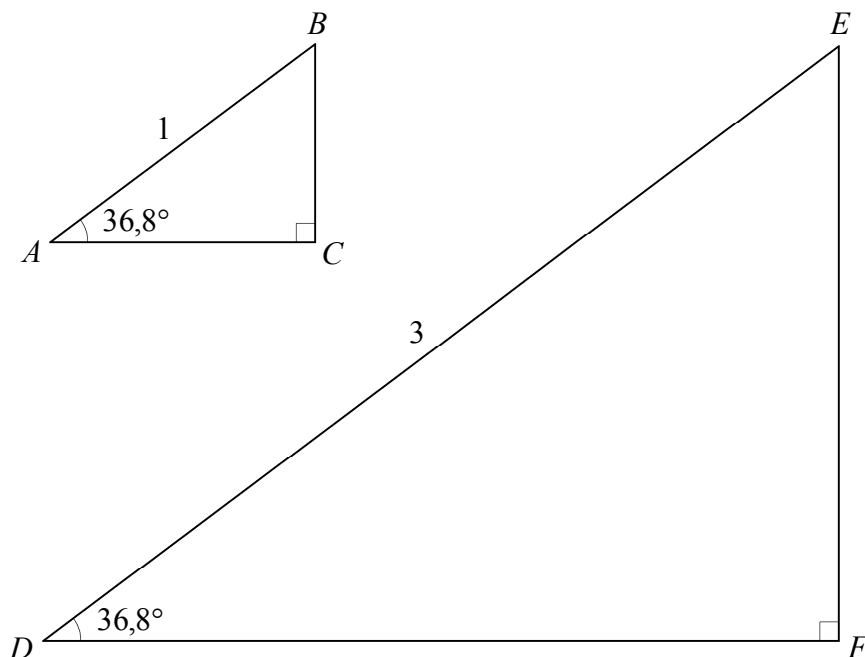
Skitsér trekanten

Bestem tallet p .

Øvelse 4.10 Oplæg til 4.11 .

Nedenfor er vist to trekanter.

- (1) Brug cosinus på lommeregneren til at udregne længden af siden AC
- (2) Brug svaret på (1) til at udregne længden af siden DF .
- (3) Hvilken sætning fra dette hæfte skal bruges i (2)?



SÆTNING 4.11 *cosinus*

Om en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:

$$\cos(\text{vinklen}) = \frac{\text{vinklens hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{\text{vinklens hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}\right) = \text{vinklen} .$$

Bemærkning til 4.11

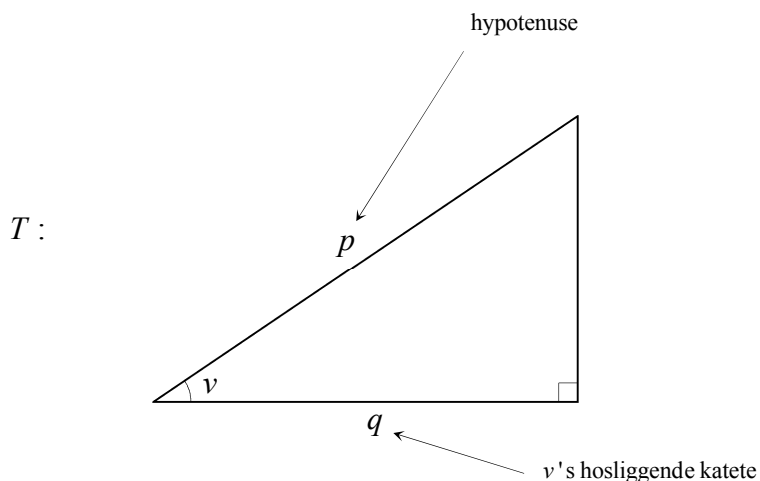
Sætning 4.11 kan også formuleres sådan:

I en trekant ABC hvor vinkel C er ret, er

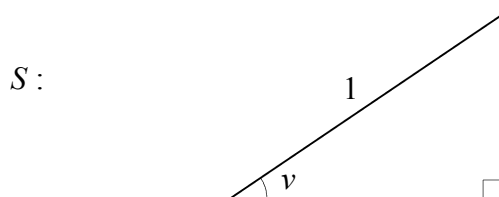
$$\cos(A) = \frac{b}{c} .$$

Bevis for 4.11

Vi tegner en retvinklet trekant T :

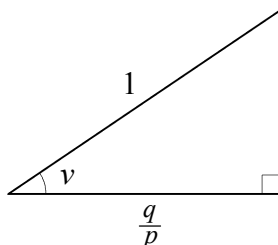


Vi tegner en ny trekant S med samme vinkler. Hypotenusen er 1 :



Trekantene er ensvinklede. Skalafaktoren er p da hypotenusen i S skal ganges med p for at få hypotenusen i T .

v 's hosliggende katete i S kan vi udregne ved at dividere q med skalafaktoren:



Af definitionen på cosinus får vi

$$\cos(v) = \frac{q}{p}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{q}{p}\right) = v$$

I disse to ligninger erstatter vi v , p og q med ord. Så får vi:

$$\cos(\text{vinklen}) = \frac{\text{vinklens hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{\text{vinklens hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}\right) = \text{vinklen} .$$

Dette er de to ligninger vi skulle bevise.

Opgave 4.12: En vinkel og hypotenusen er kendt. Udregn vinklens hosliggende katete.

I trekant ABC er vinkel C ret, vinkel A er 51° ,
og længden af siden AB er $6,2$.

Bestem længden af siden AC .

Svar: Først tegner vi en skitse af trekanten.

Da trekanten er retvinklet og vinkel A er spids, er

$$\cos(A) = \frac{A's \text{ hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

dvs.

$$\cos(51^\circ) = \frac{b}{6,2}.$$

Ved at gange begge sider med $6,2$ får vi

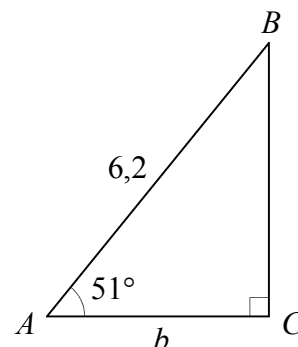
$$6,2 \cdot \cos(51^\circ) = b.$$

Vi udregner venstre side på lommeregner og får

$$3,90176 = b$$

dvs.

længden af AC er 3,9.



Opgave 4.13: En vinkel og dens hosliggende katete er kendt. Udregn hypotenusen.

I trekant DEF er vinkel F ret, vinkel E er 50° ,
og længden af siden EF er $3,6$.

Bestem længden af siden DE .

Svar: Først tegner vi en skitse af trekanten.

Da trekanten er retvinklet og vinkel E er spids, er

$$\cos(E) = \frac{E's \text{ hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

dvs.

$$\cos(50^\circ) = \frac{3,6}{f}.$$

På begge sider ganger vi med f og dividerer med $\cos(50^\circ)$. Vi får

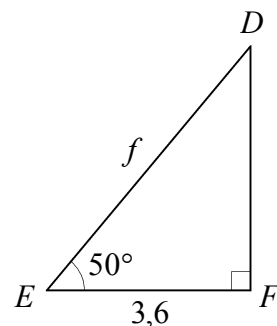
$$f = \frac{3,6}{\cos(50^\circ)}.$$

Vi udregner højre side på lommeregner og får

$$f = 5,60061$$

dvs.

længden af siden DE er 5,6.



Opgave 4.14: En katete og hypotenusen er kendt. Udregn katetens hosliggende spidse vinkel.

I trekant PQR er vinkel R ret, længden af siden PQ er 6,5, og længden af siden PR er 4,0.

Bestem vinkel P .

Svar:

Først tegner vi en skitse af trekanten.

Da trekanten er retvinklet og vinkel P er spids, er

$$\cos^{-1}\left(\frac{P's\text{ hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}\right) = P$$

dvs.

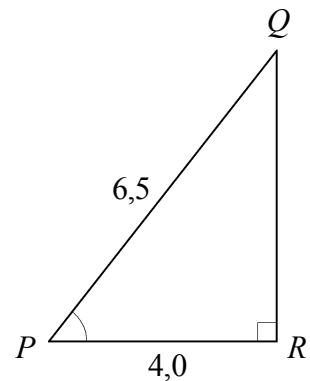
$$\cos^{-1}\left(\frac{4,0}{6,5}\right) = P .$$

Vi udregner venstre side på lommeregner og får

$$52,0201^\circ = P$$

dvs.

vinkel P er 52°.



Afsnit 5. Sinus.

DEFINITION 5.1 *Modstående katete*

Forestil dig at du sidder i den spidse vinkel u og holder i de to vinkelben.

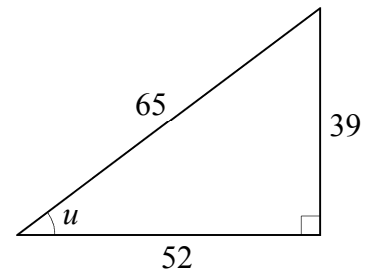
Der er én side tilbage som du ikke holder i.

Denne side kaldes vinklens modstående katete.

Vinklen kaldes katetens modstående vinkel.

I den viste trekant gælder altså:

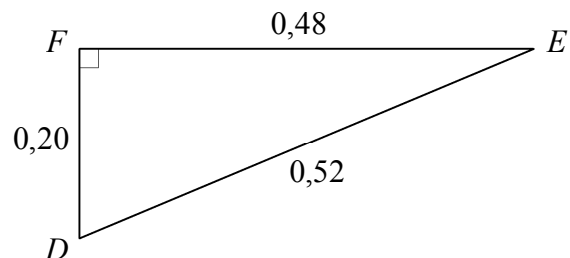
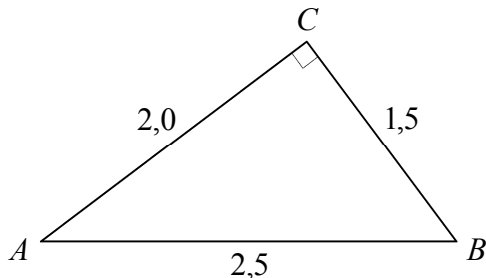
Vinkel u 's modstående katete har længden 39.



Øvelse 5.2

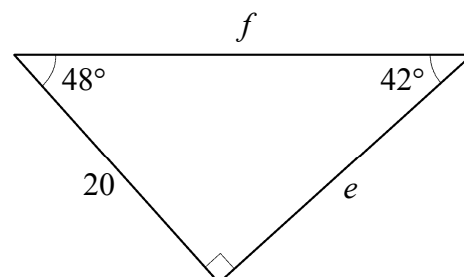
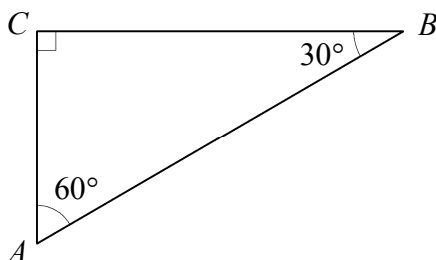
Brug metoden fra definition 5.1 til at finde svarene på følgende spørgsmål:

- (1) Hvor lang er vinkel A 's modstående katete?
- (2) Hvor lang er vinkel D 's modstående katete?
- (3) Hvor lang er vinkel B 's modstående katete?
- (4) Hvor lang er vinkel E 's modstående katete?



Øvelse 5.3

- (1) Hvor mange grader er kateten AC 's modstående vinkel?
- (2) Hvor mange grader er den vinkel der er modstående til siden med længde e ?
- (3) Hvor mange grader er kateten BC 's modstående vinkel?
- (4) Hvor mange grader er den vinkel der er modstående til siden med længde 20?



DEFINITION 5.4 Sinus

På lommeregner kan vi udregne sinus og omvendt sinus .

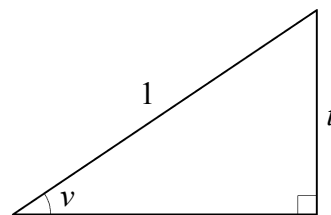
Figuren viser en retvinklet trekant hvor hypotenusen er 1.

Hvis vi udregner: sinus til gradtallet for en af de spidse vinkler,
så får vi: længden af denne vinkels modstående katete .

Vi skriver: $\sin(v) = t$.

Hvis vi udregner: omvendt sinus til længden af en af kateterne,
så får vi: gradtallet for katetens modstående vinkel .

Vi skriver: $\sin^{-1}(t) = v$.



Symbolet \sin^{-1} er ikke en sædvanlig potens. Det hævdede -1 betyder "omvendt".

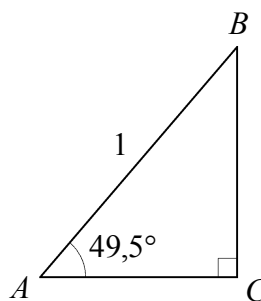
Eksempel 5.5

På lommeregner udregner vi at

$$\sin(49,5^\circ) = 0,760406 .$$

Dette betyder at

længden af siden BC er 0,760 .

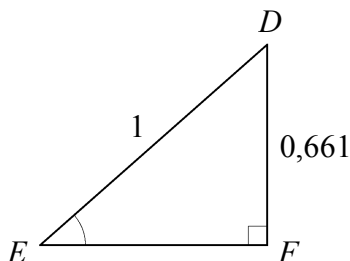


På lommeregner udregner vi at

$$\sin^{-1}(0,661) = 41,3762^\circ .$$

Dette betyder at

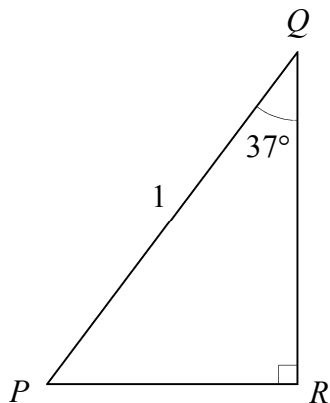
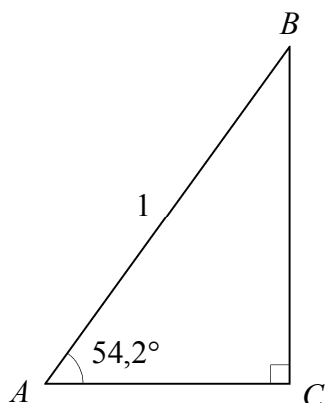
vinklen E er 41,4° .



Øvelse 5.6

Nedenfor er vist to trekanter

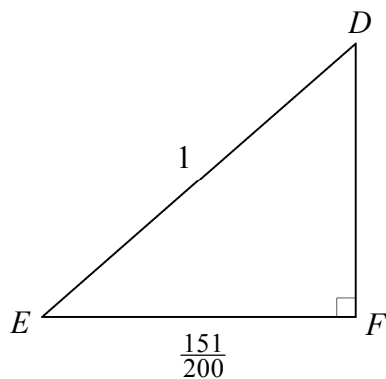
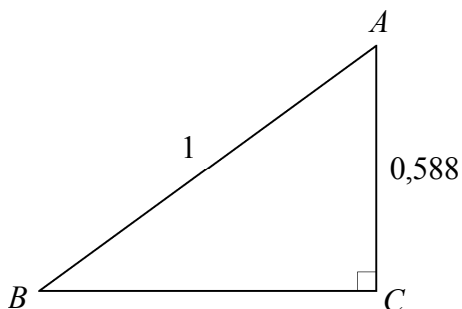
Brug sinus på lommeregneren til at udregne længden af hver af siderne BC og PR .



Øvelse 5.7

Nedenfor er vist to trekanter.

Brug omvendt sinus til at udregne vinklerne B og D .



Øvelse 5.8

I trekant ABC er vinkel C ret, vinkel A er $33,6^\circ$, længden af AB er 1, og længden af siden BC er $\frac{q}{3}$, hvor q er et tal der ikke er oplyst.

Skitsér trekanten.

Bestem tallet q .

Øvelse 5.9

I trekant DEF er vinkel F ret, vinkel D er $34,4^\circ$, længden af DE er 1, og længden af siden EF er $\frac{5}{p}$, hvor p er et tal der ikke er oplyst.

Skitsér trekanten

Bestem tallet p .

SÆTNING 5.10 *sinus*

Om en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:

$$\sin(\text{vinklen}) = \frac{\text{vinklens modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{\text{vinklens modstående katete}}{\text{hypotenusen}}\right) = \text{vinklen} .$$

Bemærkning til 5.10

Sætning 5.10 kan også formuleres sådan:

I en trekant ABC hvor vinkel C er ret, er

$$\sin(A) = \frac{a}{c} .$$

Øvelse 5.11 *Bevis for 5.10*

- (1) Tegn en retvinklet trekant T hvor du i en af de spidse vinkler skriver v . Ved denne vinkels modstående katete skal du skrive q , og ved hypotenusen skal du skrive p .
- (2) Tegn en ny trekant S med samme vinkler som T og med hypotenusen 1 (skriv dette tal ved hypotenusen).
- (3) Hvordan kan vi vide at i trekant S har vinklen v 's modstående katete længden $\frac{q}{p}$?
- (4) Hvordan kan vi vide at $\sin(v) = \frac{q}{p}$?

Opgave 5.12: I trekant ABC er vinkel C ret, vinkel A er 52° , og længden af siden AB er 3,3.

Bestem længden af siden BC .

Svar: Først tegner vi en skitse af trekanten.

Da trekanten er retvinklet og vinkel A er spids, er

$$\sin(A) = \frac{A's \text{ modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

dvs.

$$\sin(52^\circ) = \frac{a}{3,3} .$$

Ved at gange begge sider med 3,3 får vi

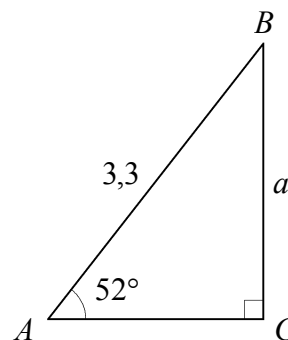
$$3,3 \cdot \sin(52^\circ) = a .$$

Vi udregner venstre side på lommeregner og får

$$2,60044 = a$$

dvs.

$$\text{længden af } BC \text{ er } \underline{\underline{2,6}} .$$



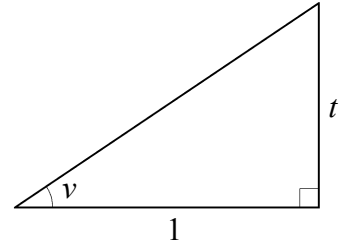
Afsnit 6. Tangens.

DEFINITION 6.1 *Tangens*

På lommeregner kan vi udregne tangens og omvendt tangens .

Figuren viser en retvinklet trekant hvor v 's hosliggende katete er 1.

Hvis vi udregner: tangens til gradtallet v ,
så får vi: længden af v 's modstående katete .
Vi skriver: $\tan(v) = t$.



Hvis vi udregner: omvendt tangens til længden af v 's modstående katete,
så får vi: gradtallet v .
Vi skriver: $\tan^{-1}(t) = v$.

Symbolet \tan^{-1} er ikke en sædvanlig potens. Det hævdede -1 betyder "omvendt" .

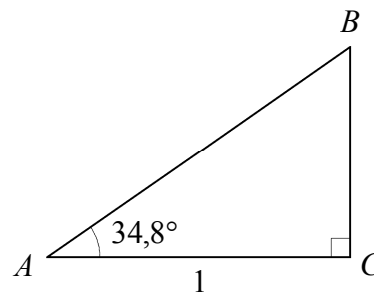
Eksempel 6.2

På lommeregner udregner vi at

$$\tan(34,8^\circ) = 0,695018 \text{ .}$$

Dette betyder at

længden af siden BC er 0,695 .

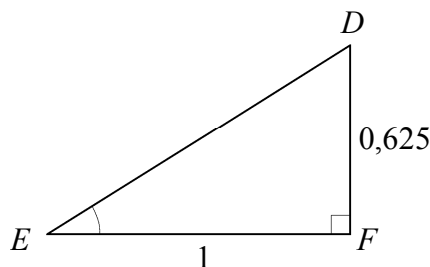


På lommeregner udregner vi at

$$\tan^{-1}(0,625) = 32,0054^\circ \text{ .}$$

Dette betyder at

vinklen E er 32,0° .



Øvelse 6.3

I trekant ABC er vinkel C ret, vinkel A er $28,6^\circ$, længden af AC er 1, og længden af siden BC er $\frac{6}{p}$, hvor p er et tal der ikke er oplyst.

Skitsér trekanten.

Bestem tallet p .

SÆTNING 6.4 *tangens*

Om en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:

$$\tan(\text{vinklen}) = \frac{\text{vinklens modstående katete}}{\text{vinklens hosliggende katete}}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\text{vinklens modstående katete}}{\text{vinklens hosliggende katete}}\right) = \text{vinklen} .$$

Bemærkning til 6.4

Sætning 6.4 kan også formuleres sådan:

I en trekant ABC hvor vinkel C er ret, er

$$\tan(A) = \frac{a}{b} .$$

Øvelse 6.5 *Bevis for 6.4*

- (1) Tegn en retvinklet trekant T hvor du i en af de spidse vinkler skriver v . Ved v 's modstående katete skal du skrive q , og ved v 's hosliggende katete skal du skrive p .
- (2) Tegn en ny trekant S hvor vinklerne er de samme som i T og hvor v 's hosliggende katete er 1 (skriv dette tal ved kateten).
- (3) Hvordan kan vi vide at i trekant S har vinklen v 's modstående katete længden $\frac{q}{p}$?
- (4) Hvordan kan vi vide at $\tan(v) = \frac{q}{p}$?

Opgave 6.6: *En vinkels modstående og hosliggende katete er kendt. Udregn vinklen.*

I trekant PQR er vinkel R ret, længden af siden PR er 3,7, og længden af siden QR er 5,1.

Bestem vinkel P .

Svar: Først tegner vi en skitse af trekanten.

Da trekanten er retvinklet og vinkel P er spids, er

$$\tan^{-1}\left(\frac{P's \text{ modstående katete}}{P's \text{ hosliggende katete}}\right) = \text{vinklen}$$

dvs.

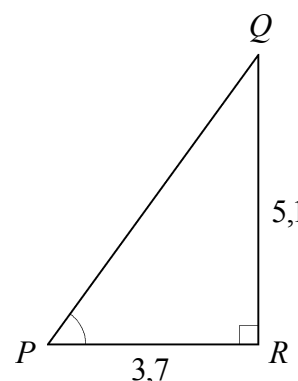
$$\tan^{-1}\left(\frac{5,1}{3,7}\right) = P .$$

Vi udregner venstre side på lommeregner og får

$$54,0395^\circ = P$$

dvs.

$$\text{vinkel } P \text{ er } \underline{\underline{54^\circ}} .$$



Afsnit 7. Beregning af sider og vinkler i retvinklet trekant.

Øversigt 7.1 Formler til beregning af sider og vinkler i retvinklet trekant

I en retvinklet trekant gælder

$$p^2 + q^2 = r^2, \quad p \text{ og } q \text{ er kateterne, } r \text{ er hypotenusen.}$$

For en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:

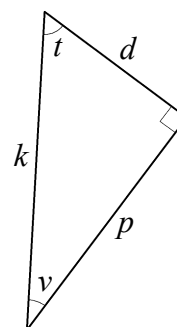
$$\cos(\text{vinklen}) = \frac{\text{vinklens hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}} \quad \cos^{-1}\left(\frac{\text{vinklens hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}\right) = \text{vinklen}$$

$$\sin(\text{vinklen}) = \frac{\text{vinklens modstående katete}}{\text{hypotenusen}} \quad \sin^{-1}\left(\frac{\text{vinklens modstående katete}}{\text{hypotenusen}}\right) = \text{vinklen}$$

$$\tan(\text{vinklen}) = \frac{\text{vinklens modstående katete}}{\text{vinklens hosliggende katete}} \quad \tan^{-1}\left(\frac{\text{vinklens modstående katete}}{\text{vinklens hosliggende katete}}\right) = \text{vinklen}.$$

Øvelse 7.2 Formler til beregning af sider og vinkler i retvinklet trekant.

- Forestil dig at du sidder i vinkel v og holder i de to vinkelben.
Hvilke af siderne d , k og p holder du i?
- Hvilke af siderne d , k og p er hosliggende til vinkel v ?
- Hvilke to af siderne d , k og p danner en ret vinkel?
- Hvilke af siderne d , k og p er kateter?
- Hvilken af siderne d , k og p er hosliggende katete til v ?
- Hvilken af siderne d , k og p er modstående katete til v ?
- Hvilken af siderne d , k og p er hypotenusen?
- Hvilken af siderne d , k og p er hosliggende katete til t ?
- Hvilken af siderne d , k og p er modstående katete til t ?
- Når vi siger at tre størrelser indgår i en opgave om retvinklet trekant, så mener vi at vi skal finde én af dem og kender de to andre.



Angiv i hvert af følgende tilfælde om der skal bruges cos, sin, tan eller pyth.:

- (1) Der indgår en spids vinkel og denne vinkels modstående katete samt hypotenusen.
- (2) Der indgår hypotenusen og de to kateter.
- (3) Der indgår en spids vinkel og de to kateter.
- (4) Der indgår en spids vinkel og denne vinkels hosliggende katete samt hypotenusen.

k. Angiv i hvert af følgende tilfælde om der skal bruges cos, sin, tan eller pyth.:

- | | |
|--|---|
| (5) Vi skal finde d og kender k og t . | (10) Vi skal finde p og kender d og v . |
| (6) Vi skal finde d og kender k og v . | (11) Vi skal finde v og kender p og d . |
| (7) Vi skal finde d og kender k og p . | (12) Vi skal finde v og kender k og p . |
| (8) Vi skal finde d og kender p og t . | (13) Vi skal finde t og kender k og p . |
| (9) Vi skal finde d og kender p og v . | (14) Vi skal finde v og kender k og d . |

Afsnit 8. Opgaver.

Opgave 8.1

I trekant ABC er $\angle C = 90^\circ$, $|BC| = 6$ og $|AB| = 6,5$.

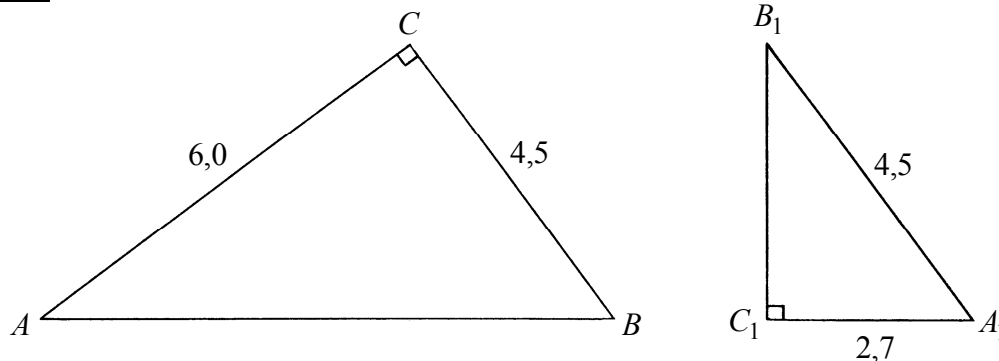
a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem $|AC|$.

Opgave 8.2

I trekant DEF er $\angle F = 90^\circ$, $|EF| = 4,8$ og $|DF| = 2$.

a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem $|DE|$.

Opgave 8.3



Trekantene ABC og $A_1B_1C_1$ er retvinklede.

a) Bestem arealet af trekant ABC .

b) Bestem arealet af trekant $A_1B_1C_1$.

Opgave 8.4

I trekant GHI er $\angle I = 90^\circ$, $|GI| = 2$ og $|HI| = 1,5$.

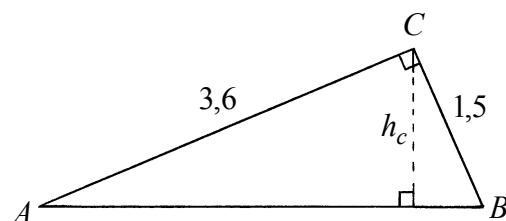
a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem arealet.

Opgave 8.5

I trekant JKL er $\angle L = 90^\circ$, $|JK| = 3$ og $|KL| = 1,8$.

a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem arealet.

Opgave 8.6

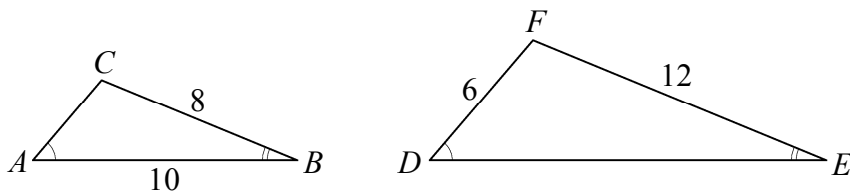


Figuren viser trekant ABC hvor vinkel C er ret, samt højden h_c fra C på siden AB .

a) Bestem $|AB|$.

b) Bestem arealet af trekant ABC , og bestem derefter længden af h_c .

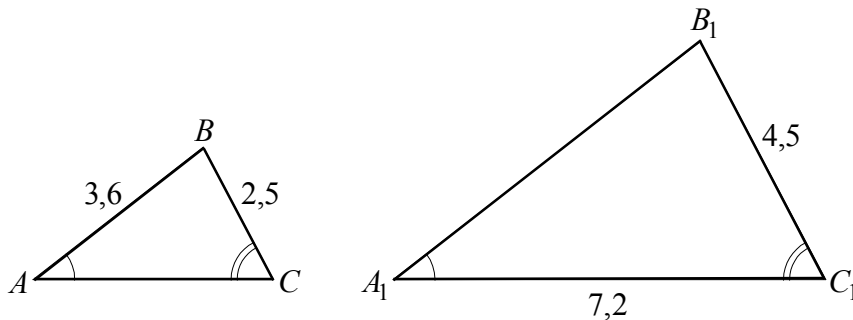
Opgave 8.7



Figuren viser to ensvinklede trekanter ABC og DEF .

- a) Bestem længden af hver af siderne DE og AC .

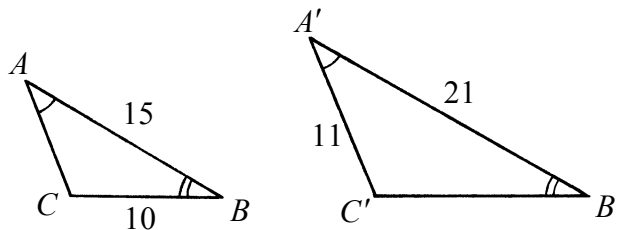
Opgave 8.8



Trekanterne ABC og $A_1B_1C_1$ er ensvinklede. Nogle af trekanternes mål fremgår af figuren.

- a) Bestem længden af siden A_1B_1 og længden af siden AC .

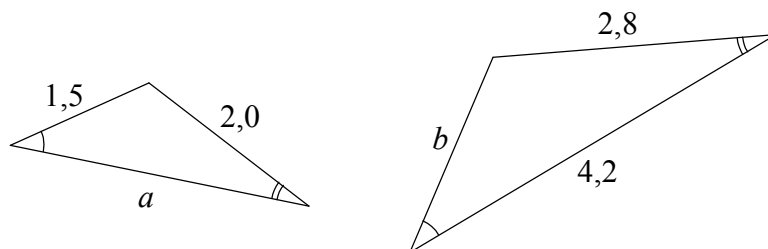
Opgave 8.9



Trekanterne ABC og $A'B'C'$ er ensvinklede. Nogle af trekanternes mål fremgår af figuren.

- a) Bestem længden af siden $B'C'$ og længden af siden AC .

Opgave 8.10



På billedet ses to ensvinklede trekanter.

- a) Beregn a og b .

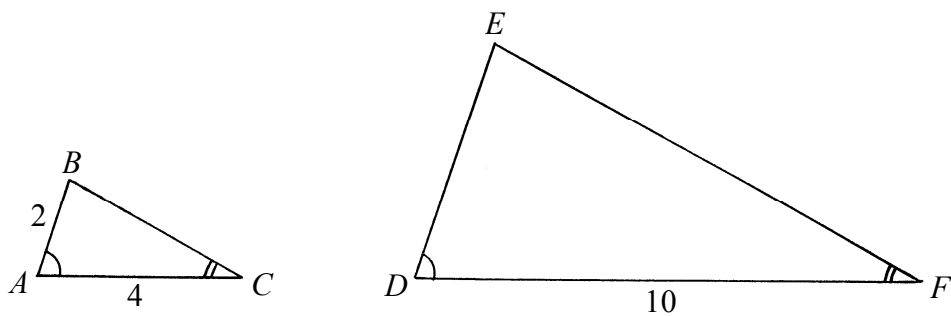
Opgave 8.11

I de ensvinklede trekanter ABC og $A'B'C'$ er $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ og $\angle C = \angle C'$.

Desuden er $|AB| = 36$, $|BC| = 24$, $|A'B'| = 45$ og $|A'C'| = 65$.

- a) Tegn en skitse af trekanterne, og bestem $|B'C'|$ og $|AC|$.

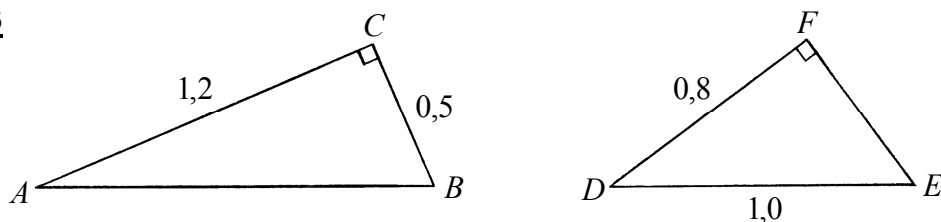
Opgave 8.12



Trekantene ABC og DEF er ensvinklede.

- a) Bestem længden af siden DE .

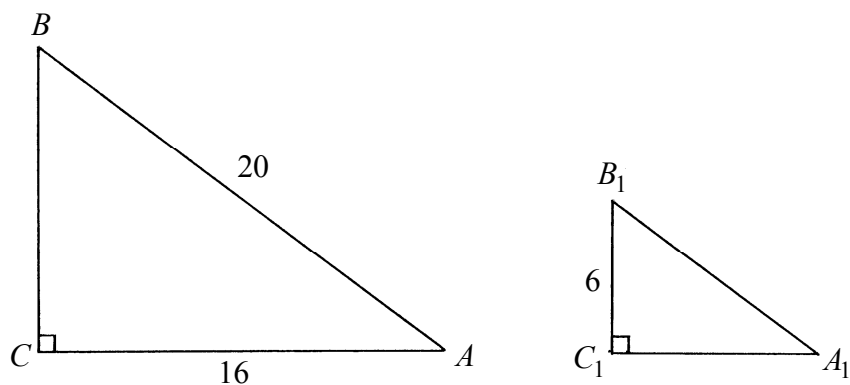
Opgave 8.13



Trekantene ABC og DEF er retvinklede.

- a) Bestem længden af siden AB .
b) Bestem længden af siden EF .

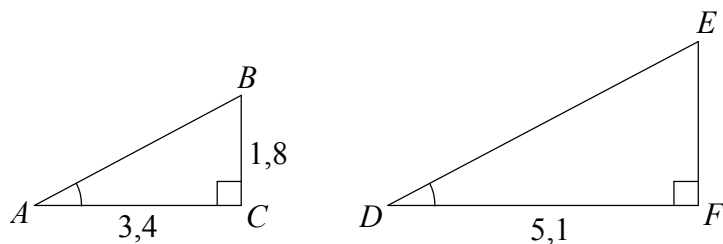
Opgave 8.14



Trekantene ABC og $A_1B_1C_1$ er retvinklede og ensvinklede.

- a) Bestem $|BC|$.
b) Bestem $|A_1B_1|$.

Opgave 8.15



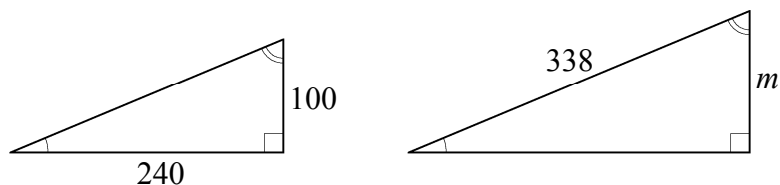
De to retvinklede trekanter ABC og DEF er ensvinklede.

- a) Bestem $|AB|$ og $|EF|$.

Opgave 8.16

Trekantene er ensvinklede og retvinklede.

- a) Bestem siden m .



Opgave 8.17

I en retvinklet trekant ABC er vinkel C ret, længden af siden a er 6, og længden af siden c er 7.

- a) Tegn en skitse af trekant ABC , og bestem vinkel B .

Opgave 8.18

I trekant ABC er vinkel C ret, længden af siden AC er 15,2, og vinkel A er $47,5^\circ$.

- a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem længden af siden AB .

Opgave 8.19

I trekant ABC er vinkel C ret. Vinkel B er $39,5^\circ$, og længden af BC er 14,2.

- a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem længden af AB .

Opgave 8.20

I trekant QRS er $\angle S = 90^\circ$, $|QR| = 62$ og $|QS| = 15$.

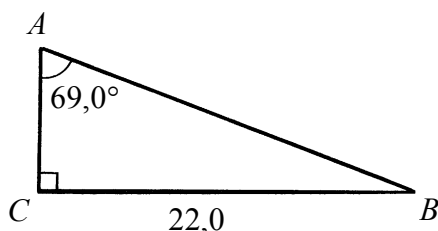
- a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem $\angle Q$.

Opgave 8.21

I en retvinklet trekant ABC er vinkel C ret, længden af siden c er 8,25, og vinkel B er $22,3^\circ$.

- a) Tegn en skitse af trekant ABC , og bestem længden af siden b .

Opgave 8.22



Figuren viser en trekant ABC hvor vinklen C er ret.

- a) Bestem $|AB|$.

Opgave 8.23

I en retvinklet trekant ABC er vinkel C ret, længden af siden BC er 348 og vinkel A er $63,6^\circ$.

- a) Tegn en skitse af trekant ABC , og bestem længden af hypotenusen AB .

Opgave 8.24

I trekant JKL er $\angle L = 90^\circ$, $\angle J = 49^\circ$ og $|KL| = 4$.

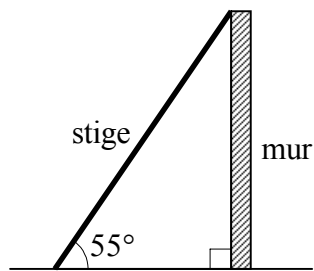
- a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem $|JK|$.

Opgave 8.25

I trekant MNP er $\angle P = 90^\circ$, $\angle M = 55^\circ$ og $|MN| = 11$.

- a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem $|NP|$.

Opgave 8.26

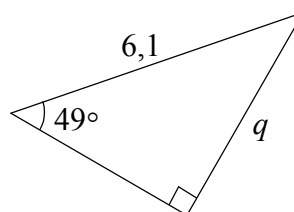
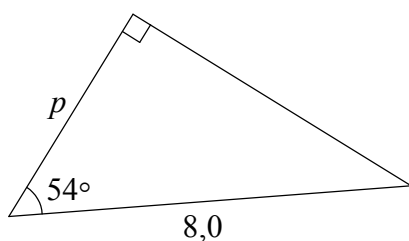


Figuren viser en stige der når op til toppen af en 3 m høj mur. Stigen danner en vinkel på 55° med jordoverfladen.

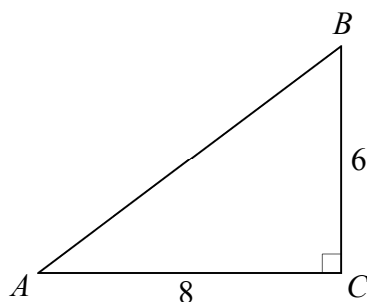
- a) Bestem længden af stigen.

Opgave 8.27

- a) Beregn siderne p og q i de viste trekanter.



Opgave 8.28



Figuren viser en retvinklet trekant.

- a) Bestem længden af siden AB , og bestem vinkel A .

Opgave 8.29

I en retvinklet trekant PQR er vinkel Q ret, længden af siden p er 15, og længden af siden r er 10.

- a) Tegn en skitse af trekant PQR , og bestem vinkel P .

Opgave 8.30

I en retvinklet trekant PQR er vinkel Q ret, længden af siden p er 12, og vinkel P er 55° .

- a) Tegn en skitse af trekant PQR , og bestem længden af siden r .

Opgave 8.31

I trekant ABC er $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 31^\circ$ og $|AC| = 5$.

- a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem $|BC|$.

Opgave 8.32

I trekant DEF er $\angle F = 90^\circ$, $\angle D = 81^\circ$ og $|EF| = 12$.

a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem $|DF|$.

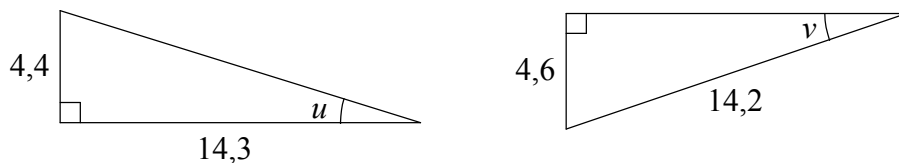
Opgave 8.33

I trekant GHI er $\angle I = 90^\circ$, $|GI| = 14$ og $|HI| = 20$.

a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem $\angle G$.

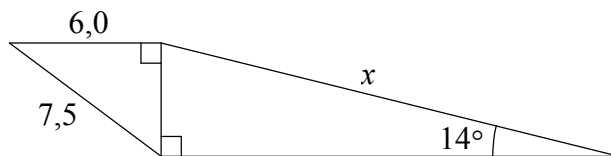
Opgave 8.34

a) Beregn vinklerne u og v i de viste trekanter.

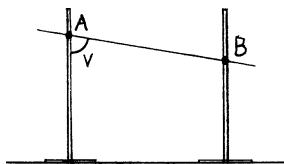


Opgave 8.35

a) Beregn x på den viste figur.



Opgave 8.36

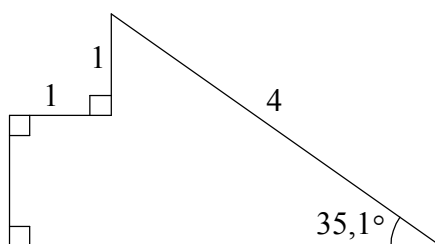


Figuren viser to lodrette stolper og en skrå liste. Listen er fastgjort til stolperne i punkterne A og B . Punktet A er 1,5 meter over gulvet, og punkt B er 1,2 meter over gulvet. Afstanden mellem stolperne er 1,8 meter.

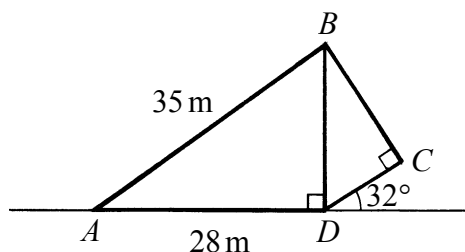
a) Bestem vinklen v mellem den venstre stolpe og den skrå liste.

Opgave 8.37

a) Beregn arealet af den viste figur.



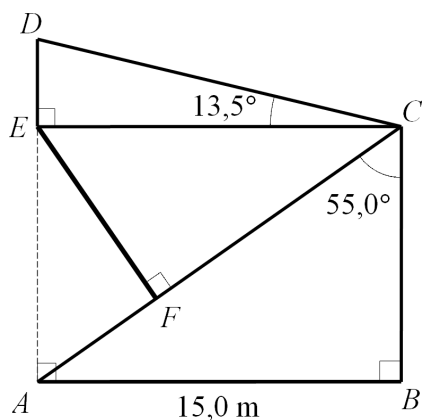
Opgave 8.38



Figuren viser tværsnittet af et kunstmuseum. Tværsnittet er en firkant $ABCD$ hvor vinkel C er ret, og diagonalen BD står vinkelret på siden AD .

- Bestem længden af BD , og bestem vinkel A .
- Bestem længden af DC .

Opgave 8.39



Figuren viser en tribune i tværsnit. Stangen EF holder taget. En person har målt de tal der står på figuren.

- Bestem $|BC|$.
- Bestem $|DE|$.
- Bestem $|EF|$.

Opgave 8.40

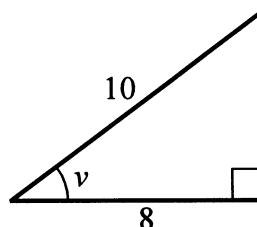
I en retvinklet trekant ABC er vinkel C ret, længden af siden b er 4, og trekantens areal er 10.

- Bestem vinkel A .

Opgave 8.41

Vinklen v er fastlagt ved figuren.

- Bestem uden hjælpemidler $\cos v$ og $\tan v$.

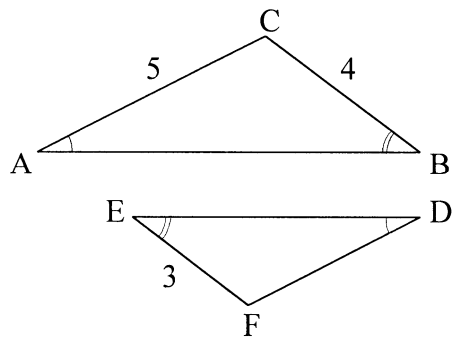


Opgave 8.42

I trekanterne ABC og $A'B'C'$ er $\angle A = \angle A'$ og $\angle B = \angle B'$. Endvidere er $|AC| = 3$ og $|A'C'| = 12$. I trekant ABC er længden af højden fra vinkel B lig 2.

- Bestem arealet af trekant $A'B'C'$.

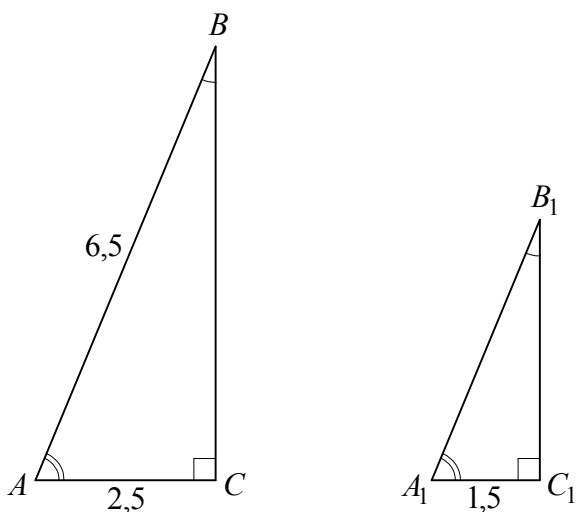
Opgave 8.43



Figuren viser to ensvinklede trekanter ABC og DEF . Nogle af sidelængderne er givet på figuren.

- a) Bestem $|DF|$.

Opgave 8.44

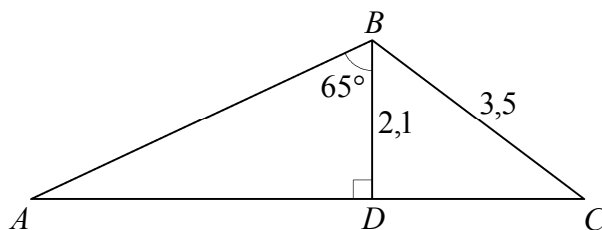


Trekantene ABC og $A_1B_1C_1$ er retvinklede og ensvinklede.

- a) Bestem $|A_1B_1|$.
b) Bestem arealet af trekant ABC .
c) Bestem vinkel B_1 .

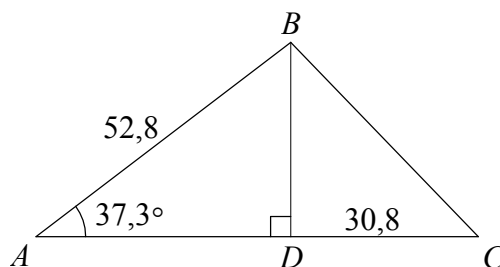
Opgave 8.45

- a) Bestem $|AC|$.



Opgave 8.46

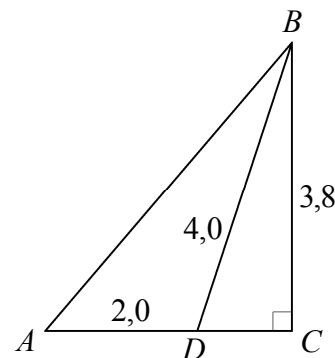
- a) Bestem længden af BD .
b) Bestem arealet af trekant ABC .



Opgave 8.47

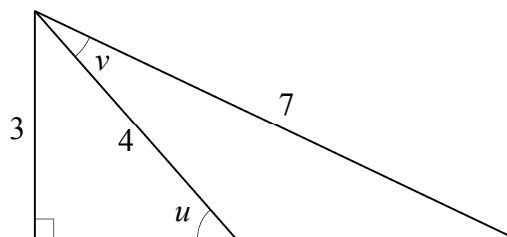
I trekant ABC er $\angle C$ ret. På siden AC ligger et punkt D .
Det er oplyst at $|AD| = 2,0$, $|BC| = 3,8$ og $|BD| = 4,0$.

- a) Bestem $|CD|$.
Bestem $\angle B$ i trekant ABC .



Opgave 8.48

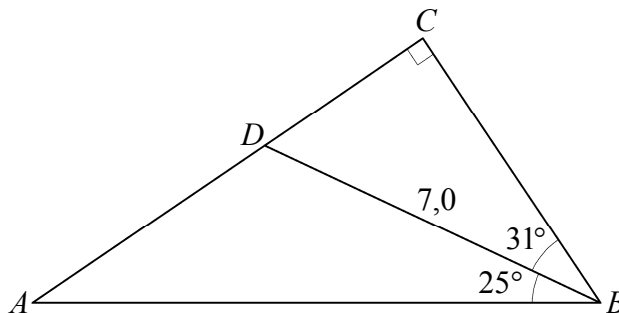
- a) Bestem vinkel u på den viste figur.
b) Bestem vinkel v på den viste figur.



Opgave 8.49

På figuren er angivet nogle af målene.

- a) Bestem længden af AC .



Opgave 8.50

I trekant PQR er $\angle R = 90^\circ$, $\angle P = 33^\circ$ og $|PQ| = 1,4$. Midtpunktet af PR hedder T .

- a) Tegn en skitse, og bestem $\angle T$ i trekant QRT .

Opgave 8.51

I firkant $ABCD$ står diagonalen BD vinkelret på både AB og DC . Diagonalen BD har længden 48, siden AB har længden 36, og siden BC har længden 52.

- a) Tegn en skitse af firkanten, og bestem vinklerne A og C .
b) Bestem firkantens omkreds.