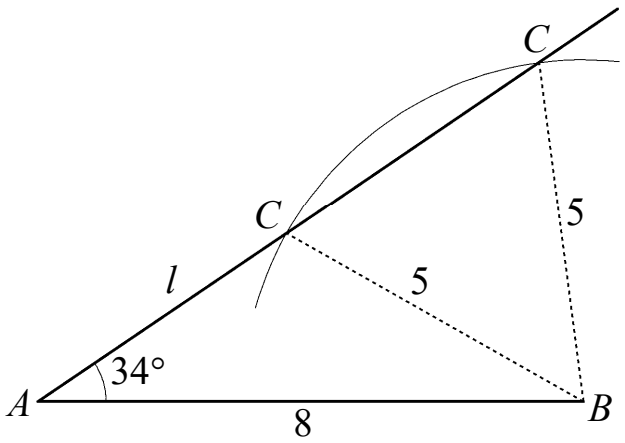
Trekants-beregning for hf



2018 Karsten Juul

Indhold

1. Vinkler **1**
- **1.1** Regler for vinkler. 1

2. Omkreds, areal, højde **2**
- **2.1** Omkreds. 2
- **2.2** Rektangel 2
- **2.3** Kvadrat 2
- **2.4** Højde. 2
- **2.5** Højde-grundlinje-formel for trekants areal 3
- **2.6** Eksempel hvor areal og grundlinje er kendt 3
- **2.7** Eksempel hvor areal og højde er kendt. 4
- **2.8** Eksempel hvor areal og grundlinje er kendt 5
- **2.9** Højde der ikke er tegnet. 5

3. Pythagoras sætning **6**
- **3.1** Katete og hypotenuse. 6
- **3.2** Pythagoras' sætning 6
- **3.3a** Bestem katete med Pythagoras' sætning - brug af multiplikationstabel. 6
- **3.3b** Bestem katete med Pythagoras' sætning - brug af multiplikationstabel. 7
- **3.4** Bestem katete med Pythagoras' sætning 7
- **3.5a** Bestem hypotenuse med Pythagoras' sætning - brug af multiplikationstabel. . 8
- **3.5b** Bestem hypotenuse med Pythagoras' sætning - brug af multiplikationstabel. . 8
- **3.6** Bestem hypotenuse med Pythagoras' sætning. 9
- **3.7a** Sammensat opgave med Pythagoras' sætning 9
- **3.7b** Sammensat opgave med Pythagoras' sætning 10

4. Sprogbrug **11**
- **4.1** Modstående vinkel eller side 11
- **4.2** Betegnelse for modstående vinkel eller side 11
- **4.3** Ord for siderne i en retvinklet trekant. 12

5. Ensvinklede trekanter **13**
- **5.1** Ord og metoder i opgaver om ensvinklede trekanter 13
- **5.2** Simpel opgave om ensvinklede trekanter 14
- **5.3a** Ensvinklede trekanter - brug af multiplikationstabel 14
- **5.3b** Ensvinklede trekanter - brug af multiplikationstabel 15
- **5.4** Sammensat opgave om ensvinklede trekanter 16
- **5.5** Sammensat opgave om ensvinklede trekanter 16

6. Cosinus, sinus, tangens og Nspire **18**

7. Cosinus, sinus og tangens i retvinklet trekant **19**
- **7.1** De tre regler for cosinus, sinus og tangens i retvinklet trekant. 19
- **7.2** Eksempel på udregning i retvinklet trekant 20
- **7.3** Eksempel på udregning i retvinklet trekant 20
- **7.4** Eksempel på udregning i retvinklet trekant 21
- **7.5** Eksempel på udregning i retvinklet trekant 21
- **7.6** Eksempel på udregning i retvinklet trekant 22
- **7.7** Eksempel på udregning i retvinklet trekant 23

8. Sinusformlen for areal af trekant **24**
8.1 Sinusformlen for areal af trekant 24
8.2 Bevis for sinusformlen for areal af trekant 24
8.3 Eksempler på brug af sinusformlen for areal af trekant 24

9. Sinusrelationen **25**
9.1 Sinusrelationen 25
9.2 Bevis for sinusrelationen 25
9.3 Bestem vinkel med sinusrelationen 26
9.4 Bestem side med sinusrelationen 26
9.5 Opgave med to løsninger 27

10. Cosinusrelationen **28**
10.1 Cosinusrelationen 28
10.2 Bevis for cosinusrelationen 28
10.3 Bemærkninger til beviset for cosinusrelationen 29
10.4 Bestem vinkel med cosinusrelationen 29
10.5 Bestem side med cosinusrelationen 30

11. Sammensatte opgaver om vilkårlig trekant **30**
11.1 Sammensat opgave om vilkårlig trekant 30
11.2 Svar på opgaven i 11.1 31
11.3 Eksempel hvor vi bruger cosinusrelationen og sinusrelationen til at udregne en afstand 32
11.4 Løsning af opgaven i 11.3 33

12. Nogle begreber **34**
12.1 Højde 34
12.2 Median 34
12.3 Vinkelhalveringslinje 34
12.4 Nogle betegnelser 35

13. Sammensat opgave **35**

De 11 opgavetyper med sider og vinkler i <u>retvinklet</u> trekant **36**

De 4 formler til udregning af sider og vinkler i <u>retvinklet</u> trekant **37**
De 4 opgavetyper vi løser ved hjælp af cosinusrelationen eller sinusrelationen **38**
De 3 opgavetyper med sinusformlen for trekants areal **39**
De 3 formler for <u>vilkårlig</u> trekant **39**

Retvinklet – hvilken regel? **40**

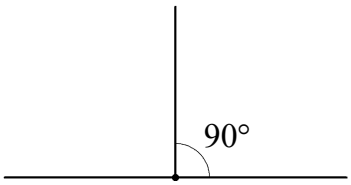
REFORM 2017
Pensum i trekantsberegning er det samme for C-niveau og B-niveau i hf.
Dette pensum dækkes af nærværende hæfte der har adressen
http://mat1.dk/trekantsberegning_for_hf.pdf
sammen med hæftet der har adressen
http://mat1.dk/konstruktion_i_geometri_for_hf.pdf .

Trekantsberegning for hf © 2018 Karsten Juul. Nyeste version af dette hæfte kan downloades fra http://mat1.dk/noter.htm . Hæftet må benyttes i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til kj@mat1.dk som oplyser at dette hæfte benyttes, og oplyser hold, niveau, lærer og skole.

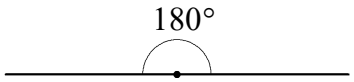
1. Vinkler.

1.1 Regler for vinkler.

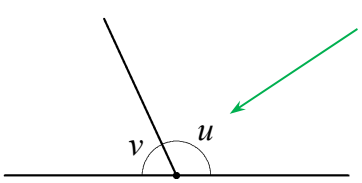
1.1 *a*



1.1 b

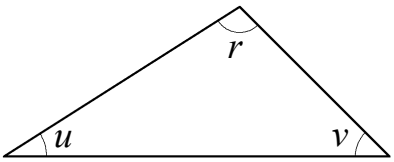


1.1 c



$u + v = 180°$
$v = 180° - u$

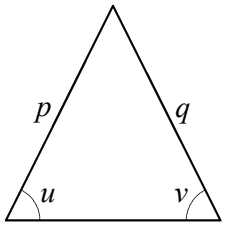
1.1 d



I en trekant er de tre vinkler altid 180° tilsammen:

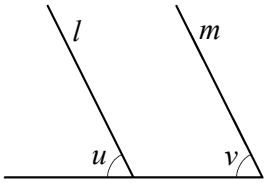
$u + v + r = 180°$
$r = 180° - u - v$

1.1 e



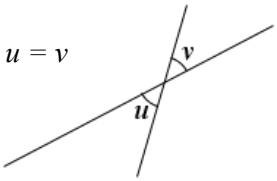
I ligebenet trekant er vinkler ved grundlinje lige store, dvs.
når $p = q$ er $u = v$.

1.1 f



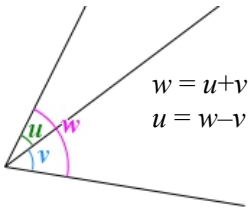
Hvis l og m er parallelle, er
$u = v$.

1.1 g



Topvinkler er lige store

1.1 h



$w = u + v$
$u = w - v$

1.1 i

<u>En vinkel i en trekant er</u>

spids hvis den er under 90°

ret hvis den er 90°

stump hvis den er over 90° .

2. Omkreds, areal, højde.

2.1 Omkreds.

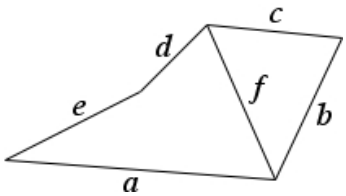
Udregn omkreds sådan:

Læg siderne sammen.

Dvs.

Omkreds = $a+b+c+d+e$

BEMÆRK: f er ikke med i omkredsen.
Et linjestykke inden i figuren er ikke en side og hører ikke med til omkredsen.



2.2 Rektangel.

Udregn rektangels omkreds sådan:

Læg siderne sammen.

Dvs.

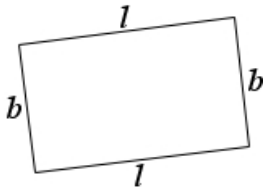
Omkreds = $l+b+l+b = 2l+2b$

Udregn rektangels areal sådan:

Længde gange bredde.

Dvs.

Areal = $l \cdot b$



2.3 Kvadrat.

Udregn kvadrats omkreds sådan:

Læg siderne sammen.

Dvs.

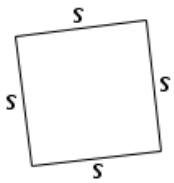
Omkreds = $s+s+s+s = 4s$

Udregn kvadrats areal sådan:

Side gange side.

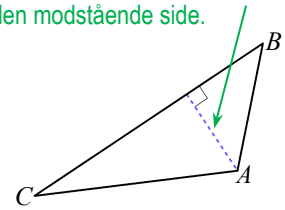
Dvs.

Areal = $s \cdot s = s^2$

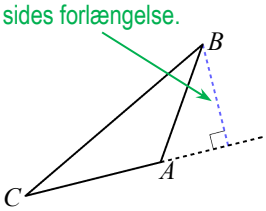


2.4 Højde.

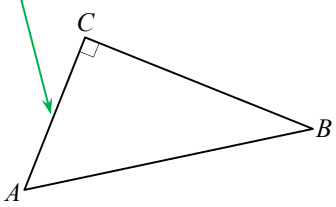
Højden fra A er det linjestykke der går fra A og vinkelret ind på den modstående side.



Højden fra B går vinkelret ind på den modstående sides forlængelse.



Siden AC er højden fra A .



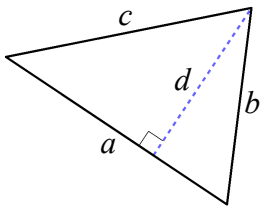
2.5 Højde-grundlinje-formel for trekants areal.

For trekanter gælder: $areal = \frac{1}{2} \cdot højde \cdot grundlinje$

$Trekants\ areal = \frac{1}{2} \cdot d \cdot a$

En af højderne i trekanten.

Grundlinje, dvs. den af siderne der er vinkelret på den valgte højde.



Formlen bruges ikke kun til at bestemme areal:

Hvis vi kender to af tallene areal , højde og grundlinje , så kan vi bestemme det sidste af tallene. Se de næste rammer.

2.6 Eksempel hvor areal og grundlinje er kendt - brug af multiplikationstabel .

Opgave: En trekant med areal 98 har grunlinjen 28.
Bestem højden.

Svar: En trekant med areal 98 har grundlinjen 28.
Der gælder

$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g \qquad \text{hvor } T = \text{areal},\ h = \text{højde},\ g = \text{grundlinje}$$

$$98 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 28$$

Løsning af ligningen uden hjælpemidler:

$$98 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 28$$

$$98 = h \cdot 14$$

$$\frac{98}{14} = \frac{h \cdot 14}{14}$$

$$7 = h$$

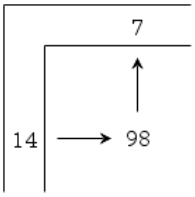
Løsning af ligningen med formelsamlingens **multiplikationstabel**
(for elever der er begyndt i hf august 2017 eller senere):

$$98 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 28$$

$$98 = h \cdot 14$$

I multiplikationstabellen finder vi 14 i venstre søjle.
I denne række går vi ind til vi finder 98.
Så går vi lodret op til øverste række. Her står 7.

$$7 = h$$



Løsning af ligningen med Nspire:

Nspire løser $98 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 28$ mht. h

$$\text{solve}\left(98 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 28, h\right) \blacktriangleright h = 7$$

Konklusion Højden er 7 .

2.7 Eksempel hvor areal og højde er kendt - brug af multiplikationstabel .

Opgave: En trekant med areal 136 har grunlinjen 16.
Bestem højden.

Svar: En trekant med areal 136 har grundlinjen 16.
Der gælder

$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g \qquad \text{hvor } T = \text{areal},\ h = \text{højde},\ g = \text{grundlinje}$$

$$136 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot g$$

Løsning af ligningen uden hjælpemidler:

$$136 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot g$$

$$136 = 8 \cdot g$$

$$\frac{136}{8} = \frac{8 \cdot g}{8}$$

$$17 = g$$

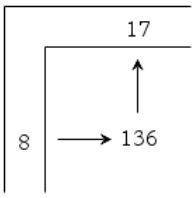
Løsning af ligningen med formelsamlingens **multiplikationstabel**
(for elever der er begyndt i hf august 2017 eller senere):

$$136 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot g$$

$$136 = 8 \cdot g$$

I multiplikationstabellen finder vi 8 i venstre søjle.
I denne række går vi ind til vi finder 136.
Så går vi lodret op til øverste række. Her står 17.

$$17 = g$$



Løsning af ligningen med Nspire:

Nspire løser $136 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot g$ mht. g

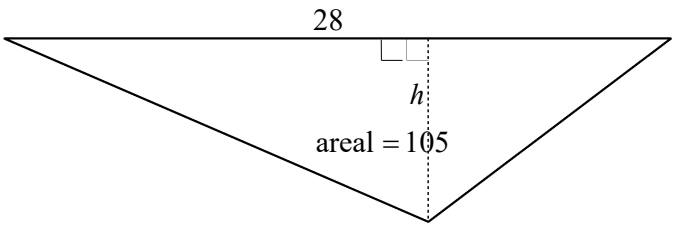
$$\text{solve}\left(136 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot g, g\right) \blacktriangleright g = 17$$

Konklusion Grundlinjen er 17 .

2.8 Eksempel hvor areal og grundlinje er kendt.

$$Areal = \tfrac{1}{2} \cdot \text{højde} \cdot \text{grundlinje}$$

$$105 = \tfrac{1}{2} \cdot h \cdot 28$$



Løsning af ligningen uden hjælpemidler:

$$105 = \tfrac{1}{2} \cdot h \cdot 28$$
$$105 = h \cdot 14$$
$$\frac{105}{14} = \frac{h \cdot 14}{14}$$
$$7{,}5 = h$$
$$h = \underline{\underline{7{,}5}}$$

Løsning af ligningen med hjælpemidler:

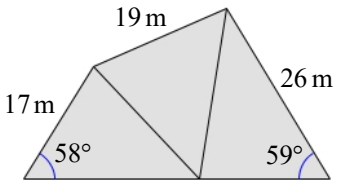
Nspire løser ligningen $105=\frac{1}{2}\cdot h\cdot 28$ mht. h og får $h=7.5$.

$$\text{solve}\left(105=\frac{1}{2}\cdot h\cdot 28, h\right) \blacktriangleright h=7.5$$

$h = 7{,}5$

2.9 Højde der ikke er tegnet.

Opgave: Figuren viser en gavl.
Bestem højden af gavlen.



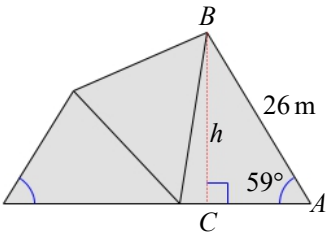
Svar: Vi tegner den viste højde h .
Vi ser på den retvinklede trekant ABC .
Af reglen for sinus i retvinklet trekant får vi

$$h = 26 \cdot \sin(59°)$$ Se 7.1 b

Dvs.

$$h = 22{,}2863$$

Gavlens højde er 22 m .



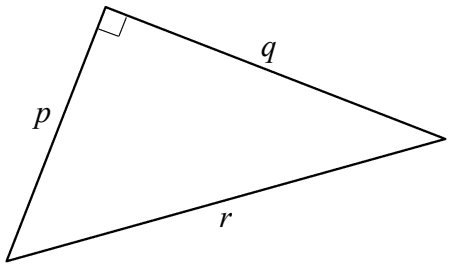
3. Pythagoras' sætning.

3.1 Katete og hypotenuse.

Siderne p og q er trekantens kateter.
Det kan vi se fordi vinklen imellem p og q er ret.

Siden r er hypotenusen.
Det kan vi se fordi r ikke er en af kateterne.

Advarsel: Hvis en trekant ikke er retvinklet,
så har den hverken hypotenuse eller kateter.



3.2 Pythagoras' sætning.

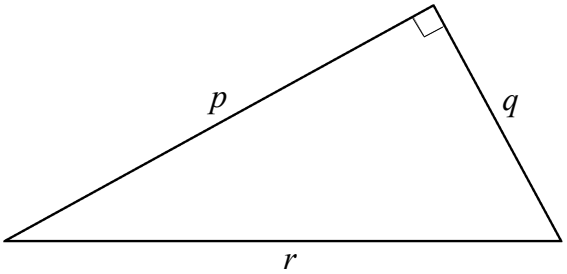
Pythagoras' sætning som formel

For en retvinklet trekant gælder:

$$p^2 + q^2 = r^2$$

Gælder kun i retvinklet trekant.

når p og q er kateter,
og r er hypotenuse.

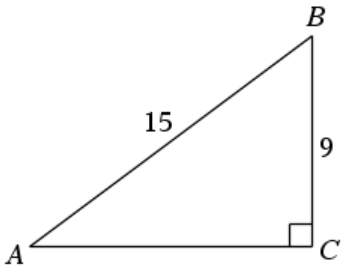


Pythagoras' sætning i ord

Den ene katete i anden **plus** den anden katete i anden **er** hypotenusen i anden.

3.3a Bestem katete med Pythagoras' sætning - brug af multiplikationstabel .

Opgave:



Figuren viser en retvinklet trekant ABC. Nogle af målene fremgår af figuren.

a) Bestem længden af siden AC.

Se svar i næste ramme.

3.3b Bestem katete med Pythagoras' sætning - brug af multiplikationstabel .

Svar

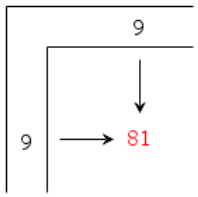
I en retvinklet trekant ABC er $a = 9$ og $c = 15$.
Vi skal bestemme længden b af siden AC .

Af Pythagoras' sætning får vi

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Heri indsætter vi de kendte tal:

$$15^2 = 9^2 + b^2$$

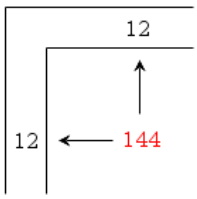


I formelsamlingens multiplikationstabel ser vi at $15^2 = 225$ og $9^2 = 81$, så

$$225 = 81 + b^2$$

Vi trækker 81 fra begge sider og får

$$144 = b^2$$



Vi ser i de røde tal i multiplikationstabellen og finder 144 .

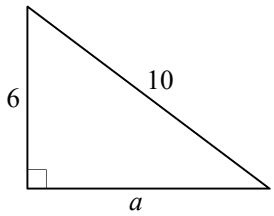
Vi ser at $12^2 = 144$, dvs. $b = 12$.

Længden af siden AC er 12 .

3.4 Bestem katete med Pythagoras' sætning.

Vi ser:

kateterne er a og 6
hypotenusen er 10



Derfor er

$$a^2 + 6^2 = 10^2$$

Løsning af ligningen uden hjælpemidler:

$$a^2 = 10^2 - 6^2$$

$$a = \sqrt{10^2 - 6^2} \qquad \text{da } 0 < a$$

$$a = \sqrt{64}$$

$$a = \underline{\underline{8}}$$

Løsning af ligningen med hjælpemidler:

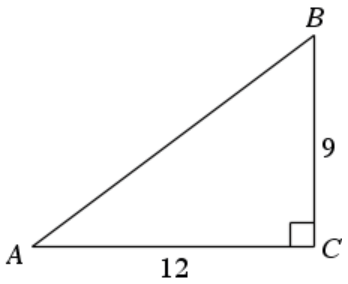
Nspire løser ligningen $a^2+6^2=10^2$ mht. a for $0<a$ og får $a=8$.

$$\text{solve}\left(a^2+6^2=10^2, a\right) \mid 0<a \blacktriangleright a=8$$

$a = 8$

3.5a Bestem hypotenuse med Pythagoras' sætning - brug af multiplikationstabel .

Opgave:



Figuren viser en retvinklet trekant ABC . Nogle af målene fremgår af figuren.

a) Bestem længden af siden AB .

Se svar i næste ramme.

3.5b Bestem hypotenuse med Pythagoras' sætning - brug af multiplikationstabel .

Svar

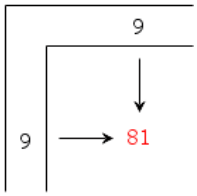
I en retvinklet trekant ABC er $a = 9$ og $b = 15$.
Vi skal bestemme længden c af siden AB .

Af Pythagoras' sætning får vi

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Heri indsætter vi de kendte tal:

$$c^2 = 9^2 + 12^2$$

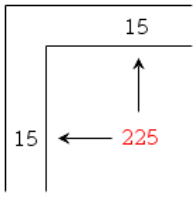


I formelsamlingens multiplikationstabel ser vi at $9^2 = 81$ og $12^2 = 144$, så

$$c^2 = 81 + 144$$

dvs.

$$c^2 = 225$$

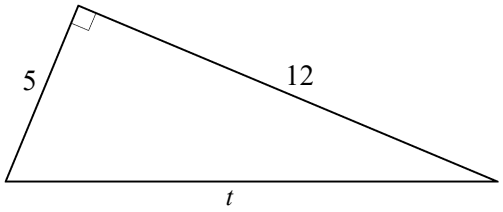


Vi ser i de røde tal i multiplikationstabellen og finder 225 .

Vi ser at $15^2 = 225$, dvs. $c = 15$.

Længden af siden AB er 15 .

3.6 Bestem hypotenuse med Pythagoras' sætning.



Vi ser:

kateterne er 5 og 12

hypotenusen er t

Derfor er

$$5^2 + 12^2 = t^2$$

Løsning af ligningen uden hjælpemidler:

$$5^2 + 12^2 = t^2$$

$$\sqrt{5^2 + 12^2} = t \qquad \text{da } 0 < t$$

$$\sqrt{169} = t$$

$$t = \underline{\underline{13}}$$

Løsning af ligningen med hjælpemidler:

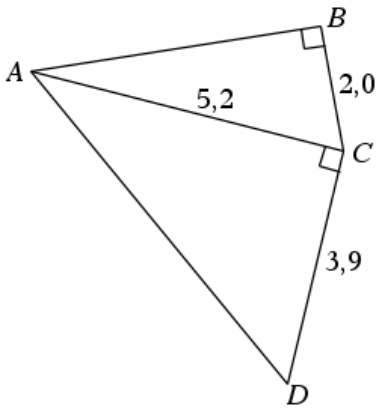
Nspire løser ligningen $5^2+12^2=t^2$ mht. t for $0<t$ og får $t=13$.

$\text{solve}\left(5^2+12^2=t^2,t\right)|0<t \blacktriangleright t=13$

$t = 13$

3.7a Sammensat opgave med Pythagoras' sætning .

Opgave:

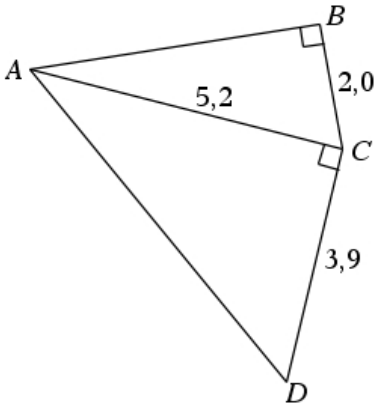


Bestem omkredsen af firkant $ABCD$.

Se svar i næste ramme.

3.7b Sammensat opgave med Pythagoras' sætning .

Svar:



Figuren er en skitse.

Nspire løser ligningen

$x^2+2^2=5.2^2$ Gælder ifølge Pythagoras' sætning

mht. x for $x>0$ og får $x=4.8$

$\text{solve}\left(x^2+2^2=(5.2)^2,x\right)|x>0 \blacktriangleright x=4.8$

Nspire løser ligningen

$5.2^2+3.9^2=y^2$ Gælder ifølge Pythagoras' sætning

mht. y for $y>0$ og får $y=6.5$

$\text{solve}\left((5.2)^2+(3.9)^2=y^2,y\right)|y>0 \blacktriangleright y=6.5$

De fire sider i firkant $ABCD$ lægger vi sammen:

$4.8+2+3.9+6.5 = 17.2$

Omkredsen af firkant $ABCD$ er 17.2

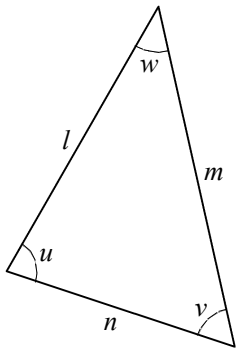
4. Sprogbrug.

4.1. Modstående vinkel eller side.

v er modstående vinkel til siden l,
og l er modstående side til vinklen v,
fordi l ikke støder op til v.

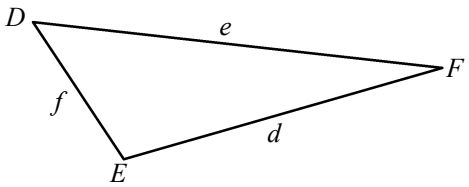
Vi ser at m og n støder op til v,
så m og n er ikke modstående til v.

u er modstående til m.
w er modstående til n.



4.2 Betegnelse for modstående vinkel eller side.

Hvis der står i trekant DEF er $f = 14$
gælder det er siden over for vinkelspidsen F der er 14.



Sprogbrugen er nemlig sådan at
når et stort bogstav er en vinkelspids i en trekant,
gælder det tilsvarende lille bogstav er siden over for vinkelspidsen,
hvis der ikke fremgår andet.

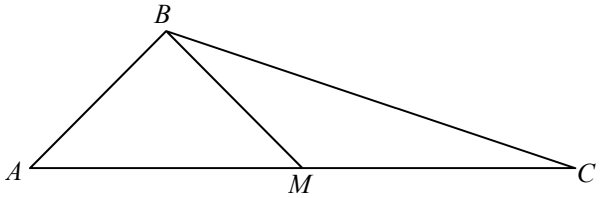
Eksempel på udnyttelse af denne sprogbrug:

I en trekant ABC hvor vinkel C er ret, er $a^2 + b^2 = c^2$.

Advarsel: Se figur til højre.

Det dur ikke hvis du skriver $m = 2{,}6$.
Læseren kan ikke vide om det er AB eller BC
der er 2,6.

Skriv m på den side du mener.
Du skal altid tegne en skitse i en geometriopgave.



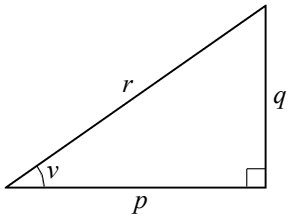
4.3 Ord for siderne i en retvinklet trekant.

Siden p er en katete fordi den støder op til den rette vinkel.

Siden r er hypotenusen fordi den ikke støder op til den rette vinkel.

Siden p er den hosliggende katete til vinkel v fordi p er den af kateterne der støder op til vinkel v.

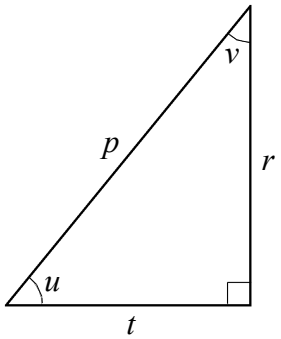
Siden q er den modstående katete til vinkel v fordi q er den af kateterne der ikke støder op til vinkel v.



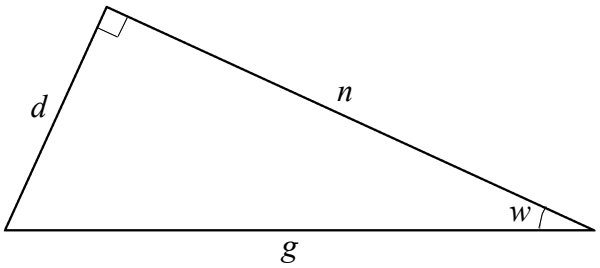
Advarsel: Ordene katete og hypotenuse kan kun bruges i en retvinklet trekant.

Eksempler

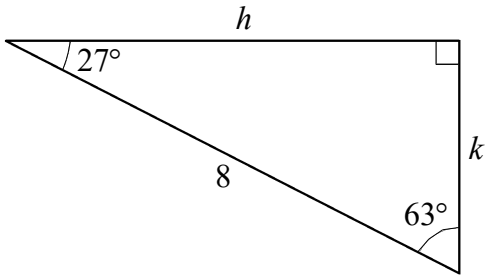
t er hosliggende katete til u
r er modtående katete til u
r er hosliggende katete til v
t er modtående katete til v
p er hypotenuse



n er hosliggende katete til w
d er modtående katete til w
g er hypotenuse

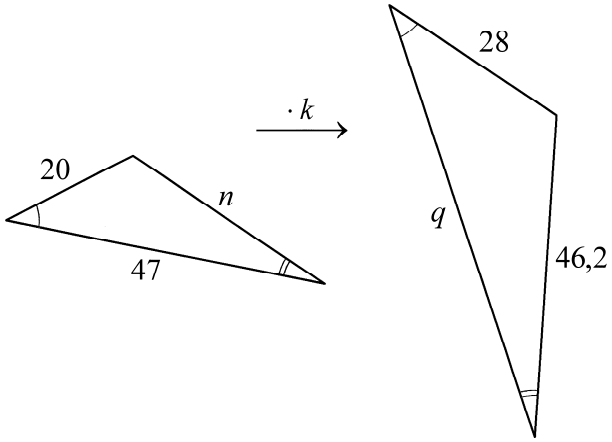


k er hosliggende katete til vinklen på 63°
h er modstående katete til vinklen på 63°
h er hosliggende katete til vinklen på 27°
k er modstående katete til vinklen på 27°
Hypotenusen er 8



5. Ensvinklede trekanter.

5.1 Ord og metoder i opgaver om ensvinklede trekanter.



På figuren har jeg brugt buer til at vise
hvilke vinkler der er lige store:

De to vinkler med dobbeltbuer er lige store.

De to vinkler med enkeltbuer er lige store.

De to sidste vinkler må så være lige store
da vinklerne i en trekant tilsammen er 180°.

At de to trekanter har samme vinkler, udtrykker vi ved at sige
at trekanterne er ensvinklede.

Regel: Når to trekanter har samme vinkler, er der en skalafaktor.
Når vi ganger siderne i den ene trekant med skalafaktoren, så får
vi siderne i den anden trekant.

På figuren har jeg vist at jeg har valgt at kalde skalafaktoren k, og at jeg **har valgt at det er siderne i venstre trekant der skal ganges med skalafaktoren**.

(1) $20 \cdot k = 28$ da siderne der er 20 og 28 har lige store modstående vinkler (dobbeltbuer).

(2) $47 \cdot k = q$ da siderne der er 47 og q har lige store modstående vinkler (ingen buer).

(3) $n \cdot k = 46{,}2$ da siderne der er n og 46,2 har lige store modstående vinkler (enkeltbuer).

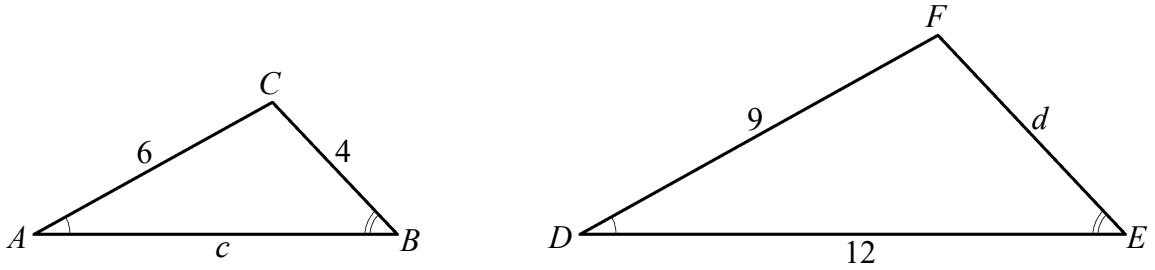
Af **(1)** får vi $k = \frac{28}{20} = \mathbf{1{,}4}$ Vi har nu udregnet k og kan bruge k til at udregne q og n.

Af **(2)** får vi $q = 47 \cdot \mathbf{1{,}4} = 65{,}8$

Af **(3)** får vi $n = \frac{46{,}2}{\mathbf{1{,}4}} = 33$

5.2 Simpel opgave om ensvinklede trekanter.

Opgave



Trekanterne ABC og DEF på figuren er ensvinklede.

Bestem d og c.

Svar

Trekanterne er ensvinklede, så der er der en skalafaktor $\boldsymbol{q}$ som vi ganger sider i ABC med for at få sider i DEF.

Når der i opgaven står ordet ensvinklede, skal vi normalt udregne en skalafaktor.

$6 \cdot \boldsymbol{q} = 9$ da siderne der er 6 og 9, har ens modstående vinkler.

$q = \mathbf{1{,}5}$ Vi har divideret begge sider med 6.

Vi har nu udregnet $\boldsymbol{q}$ og kan bruge $\boldsymbol{q}$ til at udregne d og c.

$4 \cdot \boldsymbol{q} = d$ da siderne der er 4 og d, har ens modstående vinkler.

$4 \cdot \mathbf{1{,}5} = d$

$d = 6$

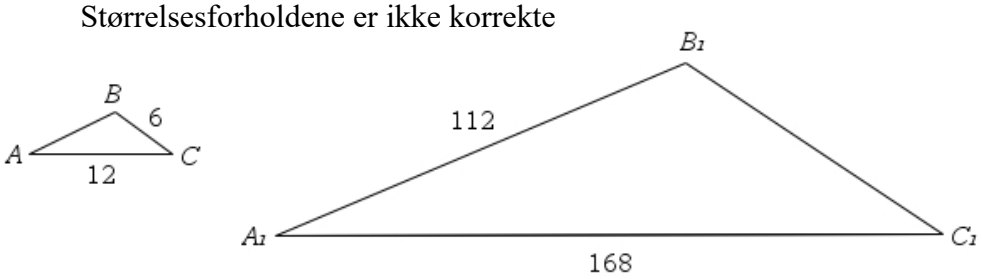
$c \cdot \boldsymbol{q} = 12$ da siderne der er c og 12, har ens modstående vinkler.

$c \cdot \mathbf{1{,}5} = 12$

$c = 8$ Vi har divideret begge sider med **1,5**.

5.3a Ensvinklede trekanter – brug af multiplikationstabel.

Størrelsesforholdene er ikke korrekte



Opgave

Figuren viser to ensvinklede trekanter ABC og $A_1B_1C_1$.

a) Bestem længden af linjestykket B_1C_1.

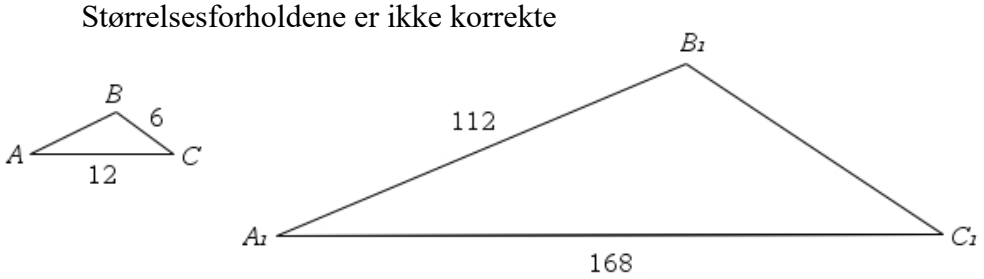
b) Bestem længden af linjestykket AB.

Se svar i næste ramme!

5.3b Ensvinklede trekanter – brug af multiplikationstabel.

Svar

Størrelsesforholdene er ikke korrekte

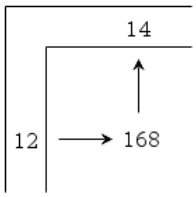


Skitsen viser to ensvinklede trekanter.

Trekanterne er ensviunklede, så der findes en skalafaktor k
som ganget med siderne i trekant ABC giver siderne i trekant $A_1\,B_1\,C_1$.

Udregning af k :

$12 \cdot k = 168$ da siderne der er 12 og 168 ligger over for ens vinkler.



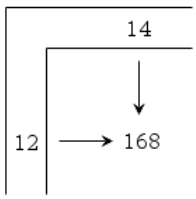
I multiplikationstabellen finder vi 12 i venstre søjle.
I denne række går vi ind til vi finder 168.
Så går vi lodret op til øverste række. Her står 14.

$k = 14$ Vi har nu fundet skalafaktoren. Vi bruger den til at udregne de søgte sider.

Udregning af $|B_1C_1|$:

$12 \cdot k = |B_1C_1|$

$12 \cdot 14 = |B_1C_1|$



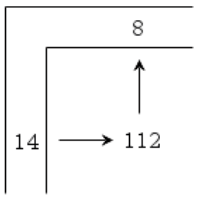
I multiplikationstabellen ser vi at $12 \cdot 14 = 168$:

$|B_1C_1| = 168$

Udregning af $|AB|$:

$|AB| \cdot k = 112$ da AB og siden der er 112 ligger over for ens vinkler.

$|AB| \cdot 14 = 112$

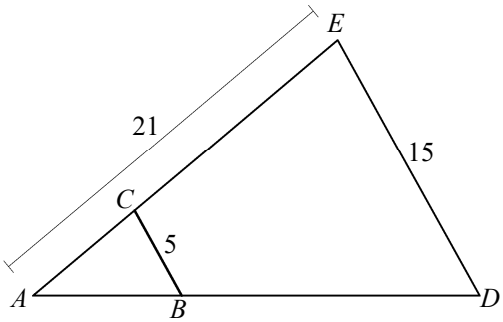


I multiplikationstabellen finder vi 14 i venstre søjle.
I denne række går vi ind til vi finder 112.
Så går vi lodret op til øverste række. Her står 8.

$|AB| = 8$

5.4 Sammensat opgave om ensvinklede trekanter. **Fejl! Bogmærke er ikke defineret.**

Opgave



På figuren er BC parallel med DE.

Bestem $|CE|$.

Svar

Da BC er parallel med DE, er trekanterne ABC og ADE ensvinklede, så der er en skalafaktor k.

Ved hjælp af reglerne for ensvinklede trekanter kan vi udregne længder af sider i trekanterne, men *CE* er ikke side i en af trekanterne. Vi udregner derfor først |*AC*|. Så kan vi derefter udregne |*CE*| ved at trække |*AC*| fra 21.

Udregning af k:

$5 \cdot k = 15$ da siderne der er 5 og 15, har samme modtående vinkel.

$\frac{5 \cdot k}{5} = \frac{15}{5}$

$k = 3$ Vi har nu udregnet k og kan bruge k til at udregne |*AC*|.

Udregning af $|AC|$:

$|AC| \cdot 3 = 21$ da AC og siden der er 21, har ens modstående vinkler.

$\frac{|AC| \cdot 3}{3} = \frac{21}{3}$

$|AC| = 7$

Udregning af $|CE|$:

$|CE| = 21 - 7$

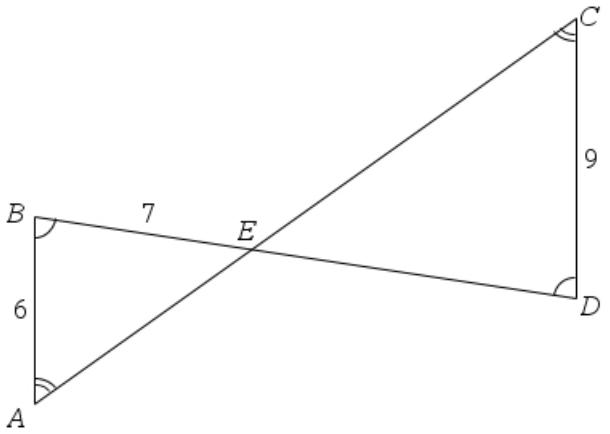
$\underline{\underline{|CE| = 14}}$

5.5 Sammensat opgave om ensvinklede trekanter.

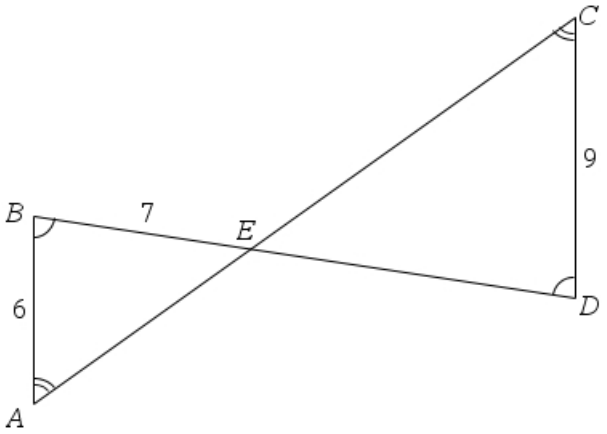
Opgave

Trekanterne ABE og CDE er ensvinklede.

Bestem $|BD|$.



Svar



På skitsen er trekanterne ABE og CDE ensvinklede,
så der findes en skalafaktor k som ganget med siderne i ABE giver siderne i CDE .

$k \cdot 6 = 9$ da siderne med længde 6 og 9 ligger over for ens vinkler.

$$\frac{k \cdot 6}{6} = \frac{9}{6}$$

$$k = \mathbf{1{,}5}$$

Vi bruger nu skalafaktoren til at udregne $|\mathrm{DE}|$:

$|\mathrm{DE}| = \mathbf{1{,}5} \cdot 7$ da siderne med længder 7 og $|\mathrm{DE}|$ ligger over for ens vinkler.

$|\mathrm{DE}| = 10{,}5$

Herefter kan vi udregne $|\mathrm{BD}|$:

$|\mathrm{BD}| = 7 + 10{,}5$

$|\mathrm{BD}| = 17{,}5$

6. Cosinus, sinus, tangens og Nspire.

I mange opgaver med trekanter har vi brug for at regne med noget der hedder

cosinus , sinus og tangens .

I et matematikfelt i et notevindue i Nspire taster vi cos(26°) og ctrl-enter (cmd-enter på Mac) :

$\cos(26°) = 0.898794$

Når vi læser denne ligning, siger vi:

cosinus til 26° er 0,898794 .

Flere udregninger:

$\sin(138°) = 0.669131$ Læses sinus til 138° er 0,669131

$\tan(15.2°) = 0.271694$ Læses tangens til 15,2° er 0,271694

Hvis v er en vinkel i en trekant og $7 \cdot \cos(v) = 4$,
så skal vi løse denne ligning.

Ligningen har mange positive og negative løsninger, men da v er en vinkel i en trekant, skal vi kun finde løsninger mellem 0° og 180°.

HUSK: Over solve-linjen skriver vi med sædvanligt matematiksprog hvad der foregår i solvelinjen.

Nspire løser ligningen $7 \cdot \cos(v) = 4$ mht. v for $0° < v < 180°$ og får $v = 55{,}1501°$.

$\text{solve}(7 \cdot \cos(v) = 4, v) \mid 0° < v < 180° \blacktriangleright v = 55.1501$ ← **HUSK altid:** Højreklik, Attributter, Grader for at være helt sikker.

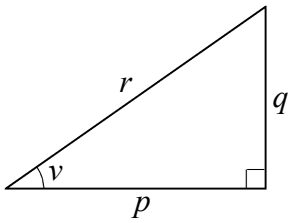
Hvis v er en vinkel i en retvinklet trekant, skal vi kun finde løsninger mellem 0° og 90°.

7. Cosinus, sinus og tangens i retvinklet trekant.

7.1 De tre regler for cosinus, sinus og tangens i retvinklet trekant.

Når

v er en spids vinkel i en retvinklet trekant
r er hypotenusen
p er v's hosliggende katete
q er v's modstående katete

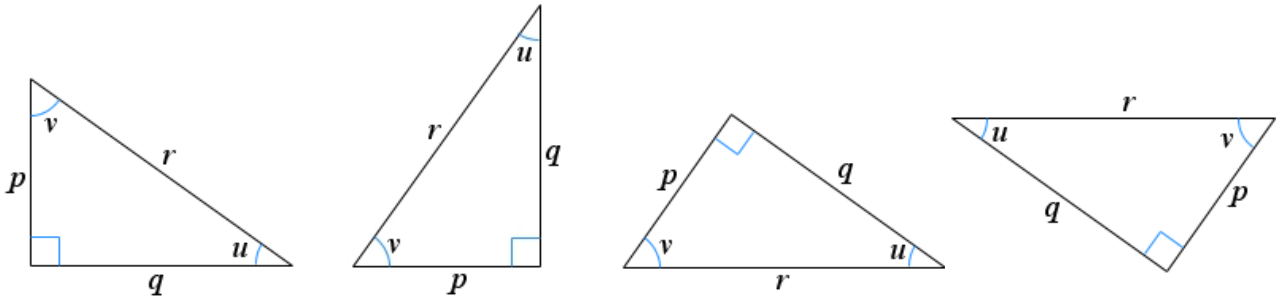


så gælder:

7.1 a	$r \cdot \cos(v) = p$	dvs.	hypotenuse gange $\cos(v)$ er v's hosliggende katete
7.1 b	$r \cdot \sin(v) = q$	dvs.	hypotenuse gange $\sin(v)$ er v's modstående katete
7.1 c	$p \cdot \tan(v) = q$	dvs.	v's hosliggende katete gange $\tan(v)$ er v's modtående katete

I mange tilfælde hedder vinklen og siderne noget andet end v, p, q, r.
Derfor er det ofte en fordel at udtrykke reglerne i ord som vi har gjort til venstre for formlerne.
Se TYPE 1-9 side 36-37.

Her er fire billeder af samme trekant:



Af de tre regler 7.1 a-c får vi at følgende seks formler gælder for trekanten uanset hvordan den vender:

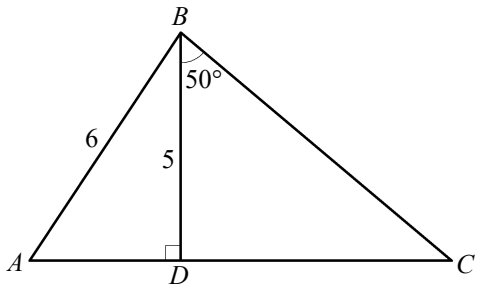
$$r \cdot \cos(u) = q \qquad r \cdot \sin(u) = p \qquad q \cdot \tan(u) = p$$
$$r \cdot \cos(v) = p \qquad r \cdot \sin(v) = q \qquad p \cdot \tan(v) = q$$

Når du skal regne en opgave med kendte tal:

Indsæt de kendte tal i en af formlerne.
Hvis bogstavet vi skal finde, står alene på den ene side af lighedstegnet:
Udregn den anden side af lighedstegnet.
Ellers:
Brug solve.
I ramme 7.2 er vist hvordan sådanne besvarelser ser ud.

7.2 Eksempel på udregning i retvinklet trekant.

Opgave



Bestem vinkel A .

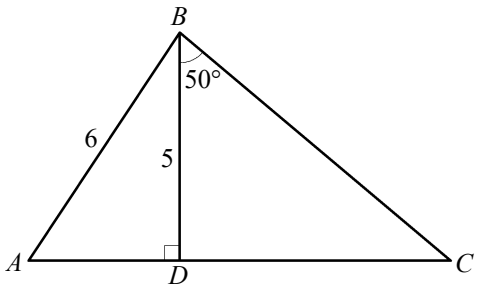
Svar

Af den retvinklede trekant ABD får vi $6 \cdot \sin(A) = 5$.
Nspire løser ligningen $6 \cdot \sin(A) = 5$ mht. A for $0° < A < 90°$
og får $A = 56{,}4427° \approx 56{,}4°$.

solve(6· sin(A)=5,A)|0°<A<90° ▸ a=56.4427

7.3 Eksempel på udregning i retvinklet trekant.

Opgave



Bestem $|BC|$.

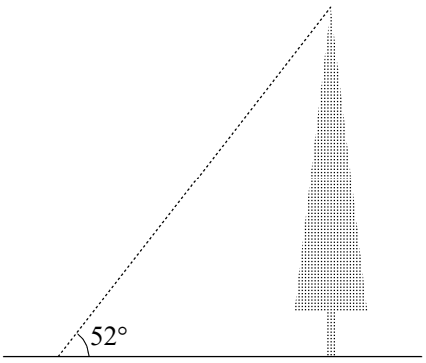
Svar

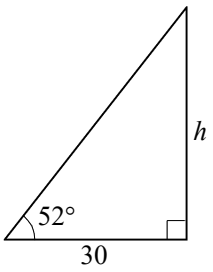
Af den retvinklede trekant BCD får vi $|BC| \cdot \cos(50°) = 5$.
Nspire løser ligningen $|BC| \cdot \cos(50°) = 5$ mht. $|BC|$ for
$|BC| > 0$ og får $|BC| = 7{,}77862 \approx 7{,}78$.

solve(BC· cos(50°)=5,BC)|0<BC ▸ bc=7.77862

7.4 Eksempel på udregning i retvinklet trekant.

Opgave





Enhed: meter

30 meter fra et træ sigter vi op mod toppen. Vinklen mellem sigtelinje og vandret er $52°$.
Trekanten til højre er en model af denne situation.

Bestem træets højde.

Svar

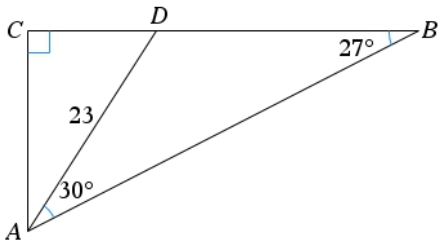
Af denne retvinklede trekant får vi $30 \cdot \tan(52°) = h$.

$$h = 30 \cdot \tan(52°) = 38.3982 \approx 38$$

Træets højde er 38 m .

7.5 Eksempel på udregning i retvinklet trekant.

Opgave



Et punkt D ligger på siden BC i den retvinklede trekant ABC .

Bestem $|CD|$.

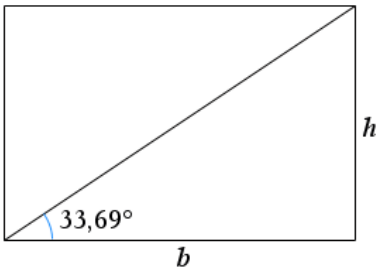
Svar

Vinkel D i trekant ABD er $180°-30°-27° = 123°$ da vinkelsum i trekant er 180°.
Vinkel D i trekant ACD er $180°-123° = 57°$ da de to vinkler tilsammen er en halv omgang

$|CD| = 23 \cdot \cos(57°) = 12.5267 \approx 12{,}5$ ifølge reglen for cos i retvinklet trekant

7.6 Eksempel på udregning i retvinklet trekant.

Opgave



Rektanglets areal er 6 .

Bestem rektanglets omkreds.

Svar

$b \cdot h = 6$ da rektangels areal udregnes som bredde gange højde.

$b \cdot \tan(33{,}69°) = h$ ifølge reglen for tangens i retvinklet trekant.

Nspire løser ligningssystemet

$b \cdot h = 6$ og $b \cdot \tan(33{,}69°) = h$ mht. b og h for $b > 0$ og $h > 0$

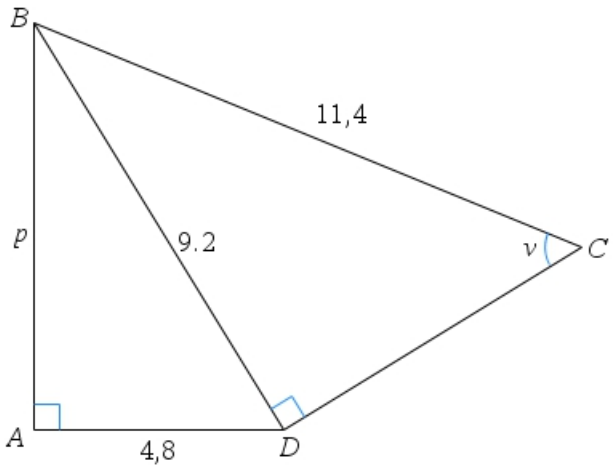
og får $b = 3{,}00000$ og $h = 2{,}00000$ (matematikfeltet er indstillet til 6 cifre).

solve(b· h=6 and b· tan(33.69°)=h,b,h)|b>0 and h>0 ▸ b=3. and h=2.

Rektanglets omkreds er $2b+2h = 10{,}00$.

7.7 Eksempel på udregning i retvinklet trekant.

Opgave



Der er givet den viste figur.

a) Bestem siden p.

b) Bestem vinklen v.

Svar

a) Vi bruger pythagoras i trekant ABD .

Nspire løser

$$p^2+4.8^2 = 9.2^2$$

mht. p for $p > 0$

og får $p=7.84857 \approx 7.8$

$$\text{solve}\left(p^2+(4.8)^2=(9.2)^2,p\right)|p>0 \blacktriangleright p=7.84857$$

p = 7,8

b) I trekant BCD bruger vi reglen for sinus i retvinklet trekant.

Nspire løser

$$11.4\cdot\sin(v) = 9.2$$

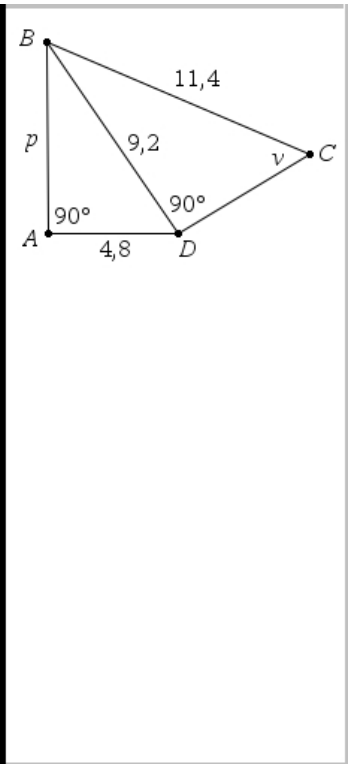
mht. v for $0° < v < 90°$

og får $v = 53.8056° \approx 54°$

$$\text{solve}(11.4\cdot\sin(v)=9.2,v)|0°<v<90° \blacktriangleright v=53.8056$$

v = 54°

Husk i matematikfelt at sætte vinkelmål til grader når vinkel bestemmes: Højreklik / Attributter / Vinkel / Grad.



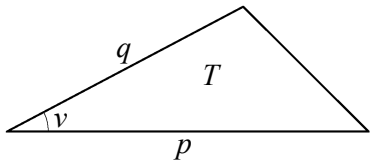
8. Sinusformlen for areal af trekant.

8.1 Sinusformlen for areal af trekant.

Sinusformlen for areal af trekant er

$$T = \frac{1}{2} \cdot p \cdot q \cdot \sin(v)$$

hvor T er arealet, p og q er to sider i trekanten, og v er vinklen **mellem** disse sider.



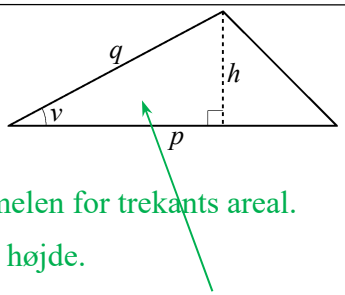
Formlen bruges ikke kun til at bestemme areal. Hvis vi kender tre af tallene T, p, q og v, så kan vi bestemme det sidste af tallene.

Sinusformlen for areal af trekant udtrykt i ord:

Areal af trekant $= \frac{1}{2} \cdot$ *den ene side* $\cdot$ *den anden side* $\cdot$ *sinus til vinklen* ***imellem*** *de to sider* .

8.2 Bevis for sinusformlen for areal af trekant.

På figuren tegner vi en højde h der deler trekanten op i to deltrekanter.



$areal = \frac{1}{2} \cdot grundlinje \cdot højde$ Dette er højde-grundlinje-formelen for trekants areal.

$T = \frac{1}{2} \cdot p \cdot h$ På figuren ser vi at p og h er grundlinje og højde.

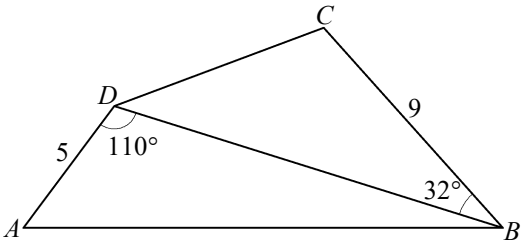
$T = \frac{1}{2} \cdot p \cdot q \cdot \sin(v)$ da $q \cdot \sin(v) = h$ ifølge regel for sin i retvinklet trekant (brugt på venstre deltrekant).

Dette er sinusformlen for trekants areal, så vi har bevist at den gælder.

8.3 Eksempler på brug af sinusformlen for areal af trekant.

Opgave

Arealet af trekant ABD er $31{,}6$.
Bestem længden af BD .
Bestem arealet af trekant BCD .



Svar

Da areal af trekant ABD er $31{,}6$, får vi af sinusformlen for areal af trekant: $31{,}6 = 0{,}5 \cdot 5 \cdot |BD| \cdot \sin(110°)$.

Nspire løser ligningen $31{,}6 = 0{,}5 \cdot 5 \cdot |BD| \cdot \sin(110°)$ mht. $|BD|$ og får $|BD| = 13{,}4512 \approx 13{,}5$

$\text{solve}(31.6=0.5\cdot 5\cdot BD\cdot \sin(110°),BD) \blacktriangleright bd=13.4512$

Af trekant BCD og sinusformlen for areal af trekant får vi:

Areal af trekant BCD er $0.5\cdot 9\cdot 13.4512\cdot \sin(32°) = 32.0762 \approx 32{,}1$

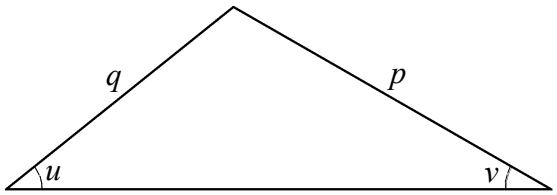
9. Sinusrelationen.

9.1 Sinusrelationen.

Sinusrelationen gælder i alle trekanter og siger at

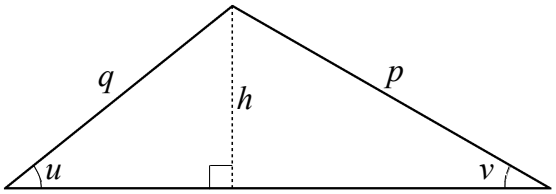
$$\frac{p}{\sin(u)} = \frac{q}{\sin(v)}$$

hvor siden p er modstående til vinklen u
siden q er modstående til vinklen v



Vi bruger IKKE sinusrelationen i retvinklet trekant, da vi har simplere formler til retvinklet trekant.

9.2 Bevis for sinusrelationen.



På figuren har vi tilføjet en højde h, der deler trekanten i to trekanter.
Da disse er retvinklede, er $q \cdot \sin(u) = h$ og $p \cdot \sin(v) = h$.

$$q \cdot \sin(u) = p \cdot \sin(v)$$ da begge sider er lig h .

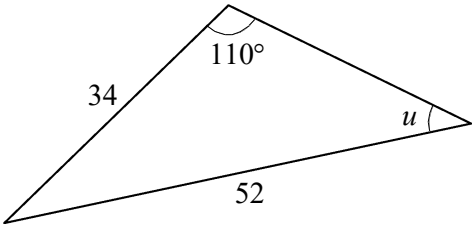
$$\frac{q \cdot \sin(u)}{\sin(u) \cdot \sin(v)} = \frac{p \cdot \sin(v)}{\sin(u) \cdot \sin(v)}$$ Vi har divideret begge ligningens sider med $\sin(u) \cdot \sin(v)$.

$$\frac{q}{\sin(v)} = \frac{p}{\sin(u)}$$ Vi har forkortet de to brøker.

Dette er sinusrelationen, så vi har bevist at den gælder.

9.3 Bestem vinkel med sinusrelationen.

Opgave



Bestem vinklen u på figuren.

Svar

Af sinusrelationen får vi $\dfrac{34}{\sin(u)} = \dfrac{52}{\sin(110°)}$.

Nspire løser ligningen $\dfrac{34}{\sin(u)} = \dfrac{52}{\sin(110°)}$ mht. u for $0° < u < 180°$

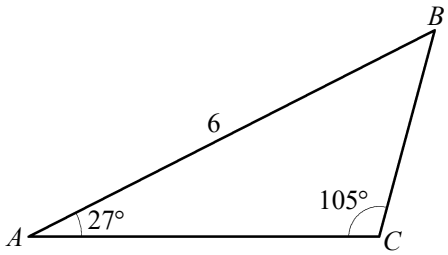
og får $u = 37{,}9094°$ eller $u = 142{,}091°$

dvs. $u = 37{,}9°$ for u må være mindre end 90° da en af de andre vinkler er over 90°.

$$\text{solve}\left(\frac{34}{\sin(u)}=\frac{52}{\sin(110°)},u\right)\Big|0°<u<180° \blacktriangleright u=37.9094 \text{ or } u=142.091$$

9.4 Bestem side med sinusrelationen.

Opgave



Bestem siden b på figuren.

B= står uden for matematikfeltet. Attributter skal være = og grader. Tilføj ° efter facit.

Svar

Vi får brug for siden b 's modstående vinkel: $B = 180° - 27° - 105° = 48°$

Af sinusrelationen får vi: $\dfrac{b}{\sin(48°)} = \dfrac{6}{\sin(105°)}$

Nspire løser $\dfrac{b}{\sin(48°)} = \dfrac{6}{\sin(105°)}$ mht. b for $0 < b$ og får $b = 4{,}61616$. Dvs.: $b = 4{,}62$

$$\text{solve}\left(\frac{b}{\sin(48°)}=\frac{6}{\sin(105°)},b\right) \blacktriangleright b=4.61616$$

9.5 Opgave med to løsninger.

Opgaven

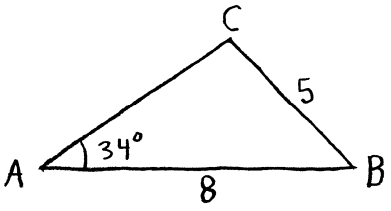
I trekant ABC er

$(*)$ $A = 34°$, $a = 5$ og $c = 8$.

Vi vil udregne vinkel C.

Skitsen

Vi tegner en skitse:



Udregningen

Vi sætter ind i sinusrelationen:

$$\frac{5}{\sin(34°)} = \frac{8}{\sin(C)}$$

Nspire løser denne ligning mht. C for $0° < C < 180°$ og får:

$C = 63{,}5°$ eller $C = 116{,}5°$

De to trekanter

Der er altså to trekanter der opfylder $(*)$ ovenfor.

I den ene af disse trekanter er $C = 63{,}5°$, og i den anden er $C = 116{,}5°$.

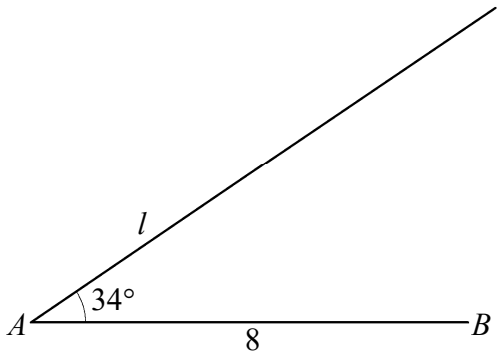
Vi vil tegne de to trekanter.

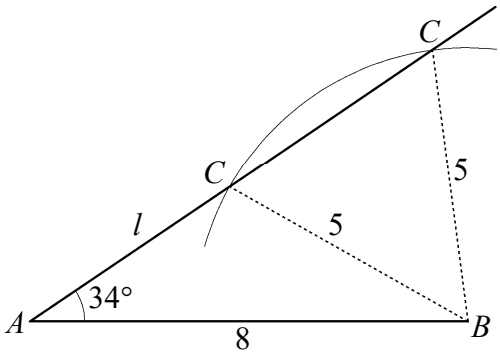
Først tegner vi AB og vinkel A. Se venstre figur nedenfor.

Punktet C ligger på l, og afstanden fra B til C er 5.

Derfor tegner vi en cirkel med centrum B og radius 5:

Nu har vi de to trekanter ABC. Se højre figur nedenfor.





10. Cosinusrelationen.

10.1 Cosinusrelationen.

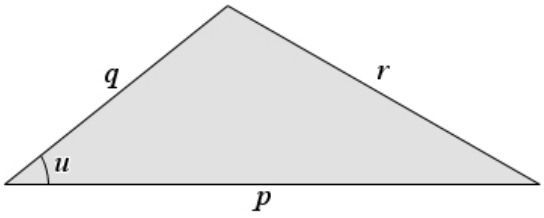
Cosinusrelationen gælder i alle trekanter og siger at

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(u)$$

hvor

p, q og r er trekantens sider

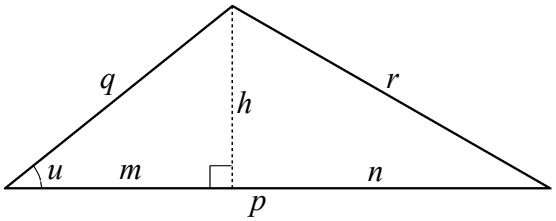
siden r er modstående til vinklen u



Vi bruger IKKE cosinusrelationen i retvinklet trekant da vi har simplere formler til retvinklet trekant.

10.2 Bevis for cosinusrelationen.

På figuren har vi tilføjet en højde.



Vi bruger pythagoras på den højre af de to retvinklede trekanter og får:

$$r^2 = h^2 + n^2$$

I denne ligning erstatter vi h^2 med $q^2 - m^2$ (Pythagoras brugt på den venstre af de to retvinklede trekanter, se **(1)** i ramme 10.3).

og vi erstatter n med $p - m$. (da m og n tilsammen er p).

Så får vi

$$r^2 = q^2 - m^2 + (p - m)^2$$

Heri erstatter vi m med $q \cos(u)$ (Venstre trekant: hypotenuse gange cos er vinkels hosliggende katete, se **(2)** i ramme 10.3).
og får

$$r^2 = q^2 - (q \cos(u))^2 + (p - q \cos(u))^2$$

Nspire reducerer højre side (Se **(3)** i ramme 10.3).
og får

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos(u)$$

Dette er cosinusrelationen som hermed er bevist.

10.3 Bemærkninger til beviset for cosinusrelationen.

(1) $m^2+h^2 = q^2$ er pythagoras brugt på den venstre af de to retvinklede trekanter.
$h^2 = q^2-m^2$ vi har trukket m^2 fra begge sider.

(2) I den venstre af de to retvinklede trekanter ser vi at
q er hypotenuse
m er hosliggende katete til vinklen u
så $q\cdot\cos(u) = m$ da hypotenuse gange cosinus til vinkel er lig vinkels hosliggende katete.

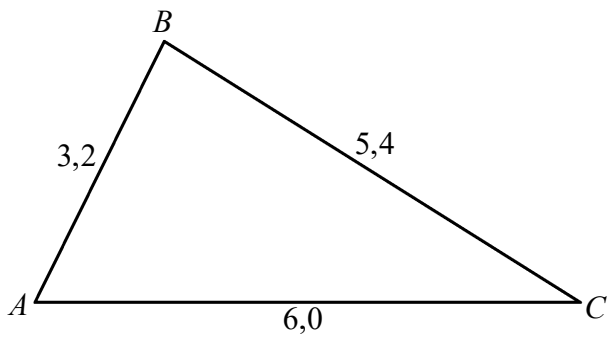
(3) Når Nspire reducerer, ser det sådan ud:

$$q^2-(q\cdot\cos(u))^2+(p-q\cdot\cos(u))^2 = -2\cdot p\cdot q\cdot\cos(u)+p^2+q^2$$

Vi ser at Nspire får samme tre led som vi har skrevet, men Nspire skriver de tre led i en anden rækkefølge.
De tre led er $-2\cdot p\cdot q\cdot\cos(u)$, p^2 og q^2 .

10.4 Bestem vinkel med cosinusrelationen.

Opgave



Bestem vinklen C på figuren.

Svar

Af cosinusrelationen får vi: $3,2^2 = 5,4^2 + 6,0^2 - 2\cdot 5,4\cdot 6,0\cdot\cos(C)$

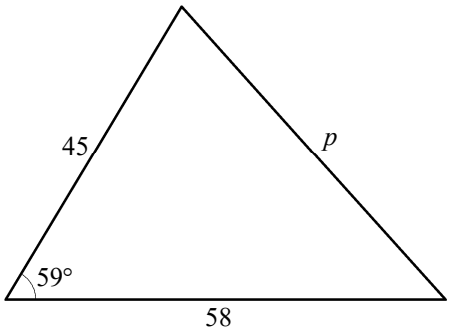
Nspire løser ligningen $3,2^2 = 5,4^2 + 6,0^2 - 2\cdot 5,4\cdot 6,0\cdot\cos(C)$

mht. C for $0° < C < 180°$ og får $C = 32,0559°$. Dvs.: $C = 32,1°$.

$$\text{solve}\left(3.2^2=5.4^2+6.0^2-2\cdot 5.4\cdot 6.0\cdot\cos(C),C\right)\,|\,0°<C<180° \blacktriangleright c=32.0559$$

10.5 Bestem side med cosinusrelationen.

Opgave



Bestem siden p på figuren.

Svar

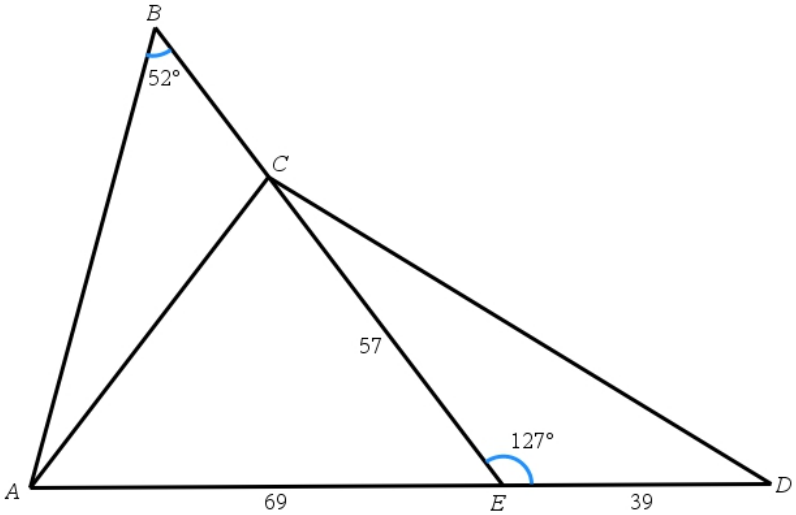
Af cosinusrelationen får vi: $p^2 = 58^2 + 45^2 - 2 \cdot 58 \cdot 45 \cdot \cos(59°)$
Nspire løser ligning $p^2 = 58^2 + 45^2 - 2 \cdot 58 \cdot 45 \cdot \cos(59°)$
mht. p for $0 < p$ og får $p = 51{,}9663$. Dvs.: $p = 52{,}0$.

$\text{solve}\left(p^2=58^2+45^2-2\cdot 58\cdot 45\cdot \cos(59°),p\right)|0<p \blacktriangleright p=51.9663$

11. Sammensatte opgave om vilkårlig trekant.

11.1 Sammensat opgave om vilkårlig trekant.

Opgave



Punktet C ligger på siden BE, og punktet E ligger på siden AD.
$\angle B = 52°$, og vinkel E i trekant CDE er 127°.
$|AE| = 69$, $|DE| = 39$ og $|CE| = 57$.

a) Bestem arealet af trekant CDE.

b) Bestem siden CD.

c) Bestem siden AB.

Se svar i næste ramme!

11.2 Svar på opgave i ramme 11.1.

a) Vi bruger sinusformlen for areal af trekant:

Areal af trekant CDE =

$$0.5\cdot 39\cdot 57\cdot \sin(127°) = 887.683 \approx 888$$

Arealet af trekant CDE er **888** .

b) Vi bruger cosinusrelationen i trekant CDE:

Nspire løser

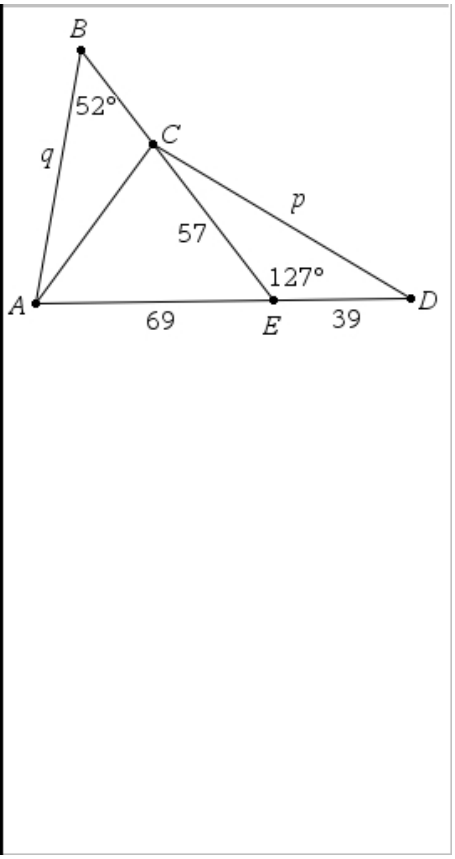
$$p^2 = 39^2+57^2-2\cdot 39\cdot 57\cdot \cos(127°)$$

mht. p for $p > 0$

og får $p = 86.2883 \approx 86$.

$$\text{solve}\left(p^2=39^2+57^2-2\cdot 39\cdot 57\cdot \cos(127°),p\right)|p>0 \blacktriangleright p=86.2883$$

Siden CD er **86** .



c) Vinkel E i trekant ABE er $180°-127° = 53°$.

Vi bruger sinusrelationen i trekant ABE:

Nspire løser

$$\frac{q}{\sin(53°)} = \frac{69}{\sin(52°)}$$

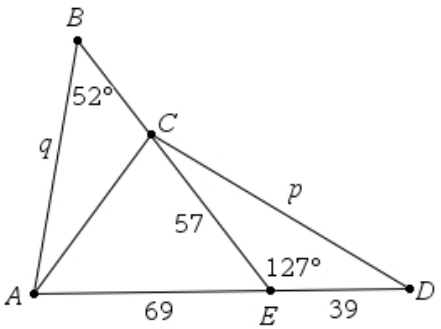
mht. q

og får $q = 69.9303 \approx 70$.

$$\text{solve}\left(\frac{q}{\sin(53°)}=\frac{69}{\sin(52°)},q\right) \blacktriangleright q=69.9303$$

Siden AB er **70** .

Ved alle udregninger skal du skrive hvad det er du udregner.
F.eks. nytter det ikke at sige "vinkel A" uden at sige i hvilken trekant,
da der er tre vinkler der hedder A.



11.3 Eksempel hvor vi bruger cosinusrelationen og sinusrelatiuonen til at udregne en afstand.

Vi får brug for følgende:

Summen af vinklerne i en trekant

Når vi kender to vinkler i en trekant, så kan vi udregne den tredje. Det er fordi man altid får 180° når man lægger alle tre vinkler sammen.

Finde side i trekant med sinusrelationen

Hvis vi i en trekant kender

vinklerne og en af siderne

så kan vi udregne

enhver af de andre sider.

Dette kan vi gøre med sinusrelationen.

Finde side i en trekant med cosinusrelationen

Hvis vi i en trekant kender

to sider og vinklen mellem dem

så kan vi udregne

den tredje side.

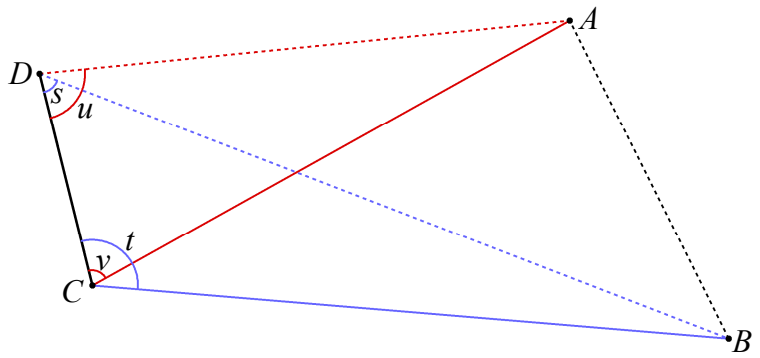
Dette kan vi gøre med cosinusrelationen.

Opgaven:

Figuren viser et landområde set ovenfra. Vi vil

finde afstanden mellem og *A* og B,

men vi kan ikke måle denne afstand (på grund af forhold i landskabet).



Vores målinger

Vi finder to steder *C* og *D* hvor der gælder:

Fra *C* kan vi se både *A*, *B* og *D*.
Fra *D* kan vi se både *A*, *B* og *C*.
Vi kan måle afstanden mellem *C* og *D*.

Vi måler vinkler mellem sigtelinjer. Afstande er i meter. Vi får

$$|CD| = 183\,,\quad u = 81{,}7°\,,\quad v = 75{,}0°\,,\quad s = 54{,}9°\,,\quad t = 108{,}8°\,.$$

I næste ramme udregner vi afstanden mellem A og B.

11.4 Løsning af opgaven i ramme 11.3

Plan for udregninger

Hvis vi i trekant *ABC* kender siderne ***AC*** og ***BC*** og ***vinklen*** imellem dem, så kan vi udregne længden af *AB* med cosinusrelationen.

Vinklen kan vi nemt udregne da vi kender *t* og *v*.

AC er en side i trekant *ACD*. I denne kender vi vinklerne *u* og *v*, så vi kan nemt udregne vinklen *A*. Da vi kender vinklerne og en side kan vi udregne længden af de andre sider med sinusrelationen. Vi nøjes med at udregne længden af *AC*.

På tilsvarende måde udregner vi siden ***BC*** i trekant *BCD*.

Siden *AC*

Vinkelsummen i en trekant er 180°, så i trekant *ACD* er

$$A = 180° - u - v = \underline{23{,}3°}$$

Sinusrelationen siger at

for alle sider i en trekant får vi det samme tal når vi dividerer siden med sinus til sidens modstående vinkel.

Derfor gælder at

$$\frac{|CD|}{\sin(A)} = \frac{|AC|}{\sin(U)} \quad \text{dvs.} \quad \frac{183}{\sin(23{,}3°)} = \frac{d_1}{\sin(81{,}7°)} \quad \text{hvor } d_1 = |AC|$$

Nspire løser denne ligning mht. d_1 og får $d_1 = \underline{457{,}806}$

Siden *BC*

I trekant BCD bruger vi laver vi udregninger af samme type som i trekant ACD:

$$B = 180° - s - t = \underline{16{,}3°}$$

$$\frac{183}{\sin(16{,}3°)} = \frac{d_2}{\sin(54{,}9°)} \quad \text{hvor } d_2 = |BC|$$

$$d_2 = \underline{533{,}449}$$

Siden *AB*

I trekant *ABC* er

$$C = t - v = 33{,}8°$$

Da *C* er vinklen mellemsiderne d_1 og d_2, og $c = |AB|$ er siden over for vinklen, følger af cosinusrelationen at

$$c^2 = d_1^{\,2} + d_2^{\,2} - 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \cos(C)$$

Vi løser denne ligning mht. *c* og får

$$c = \underline{297{,}110}$$

Konklusion

Afstanden mellem *A* og *B* er $\underline{\underline{297 \text{ meter}}}$.

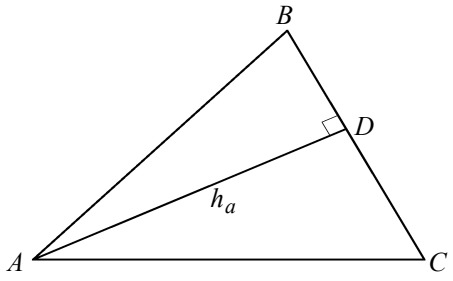
12. Nogle begreber.

12.1 Højde.

En højde i en trekant er et linjestykke der går fra en vinkelspids til et punkt på den modstående side og er vinkelret på denne side.

I enhver trekant er der tre højder.

På figuren er vist højden h_a fra A på siden a.



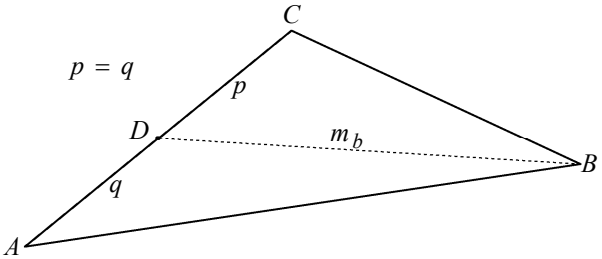
F.eks.: Hvis det i en opgave er oplyst at AD er højden på BC (se figur), så har du fået oplyst at vinkel D er ret. Så kan du bruge reglerne for retvinklet trekant.

12.2 Median.

En median i en trekant er et linjestykke der går fra en vinkelspids til midtpunktet af den modstående side.

I enhver trekant er der tre medianer.

På figuren er vist medianen m_b fra B på siden b.



Hvis det i en opgave er oplyst at BD er median på AC (se figur), så har du fået oplyst at AD og DC er lige lange:

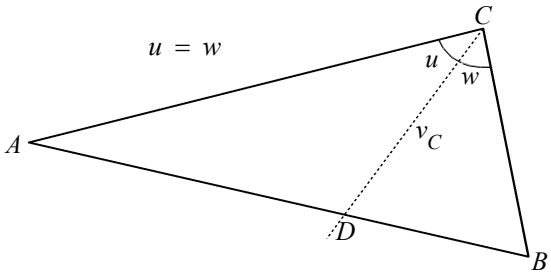
F.eks.: Hvis du kender AD eller kan udregne AD, så kan du udregne AC ved at gange AD med 2.

F.eks.: Hvis du kender AC eller kan udregne AC, så kan du udregne AD ved at dividere AC med 2.

12.3 Vinkelhalveringslinje.

En vinkelhalveringslinje i en trekant er en linje der går gennem en af vinkelspidserne og halverer vinklen.

I enhver trekant er der tre vinkelhalveringslinjer.
På figuren er vist vinkelhalveringslinjen v_C for vinkel C.



Hvis det i en opgave er oplyst at CD er vinkelhalverings linje for vinkel C (se figur), så har du fået oplyst at vinklerne u og v er lige store:

F.eks.: Hvis du kender u eller kan udregne u, så kan du udregne vinkel C i trekant ABC ved at gange u med 2.

F.eks.: Hvis du kender vinkel C i trekant ABC eller kan udregne den, så kan du udregne vinkel u ved at dividere vinkel C med 2.

12.4 Nogle betegnelser.

$\angle ABC$ er vinkel B i trekant ABC.

Eksempel: På figuren er $\angle RSQ = v$.

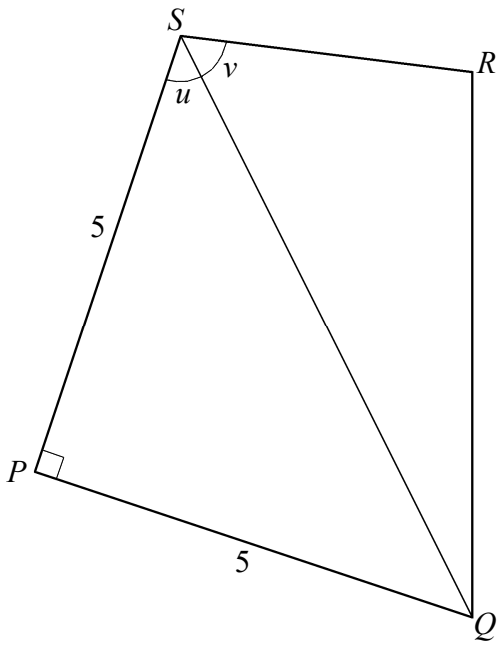
AB er **linjestykket** med endepunkter A og B.

$|AB|$ er **længden** af linjestykket AB.

Eksempel: På figuren er PQ og PS ikke samme linjestykke, men $|PQ| = |PS|$.

I en trekant ABC betegner A, B og C både punkter og vinkler.

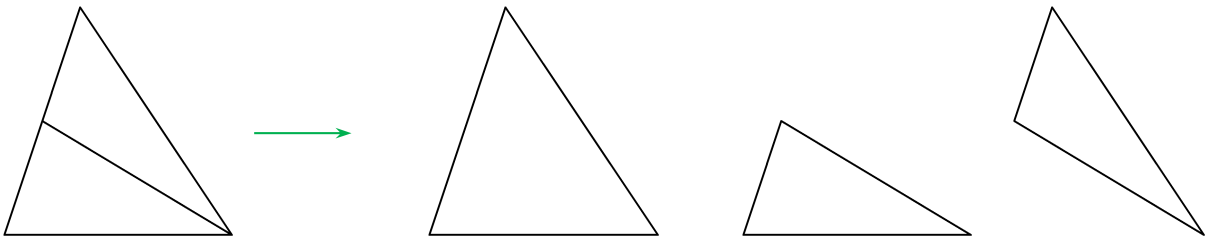
Eksempel: Man kan skrive $P = 90°$ eller $\angle P = 90°$.



13. Sammensat opgave.

En grundopgave i trekantsberegning kan du løse ved at finde opgaven i oversigten side 16-19.
En sammensat opgave kan du ikke løse ved at finde opgaven i en lærebog da der er alt for mange muligheder.
Meningen med en sammensat opgave er at du skal se hvordan du kan løse den ved hjælp af grundopgaver.

I mange sammensatte opgaver er der tegnet et linjestykke som deler en trekant op i to deltrekanter.
For at finde ud af hvad du skal gøre, kan du tegne de tre trekanter hver for sig og skrive tal og bogstaver på dem.



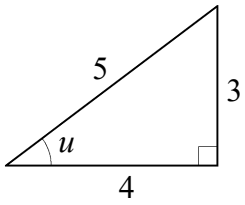
Når du har tegnet de tre trekanter, ser du om der er en af dem hvor du kan regne noget ud.
Hvis det du har regnet ud, også er en side eller vinkel i en af de andre trekanter, så skriver du også resultatet her.

Det er især vigtigt at tegne den store trekant da det viser sig at linjen inden i den er distraherende når man regner på den store trekant.

De 11 opgavetyper med sider og vinkler i <u>retvinklet</u> trekant

I trekanten til højre er siderne med længde 3 og 4 **<u>kateter</u>**, fordi vinklen mellem dem er ret. Siden med længde 5 er **<u>hypotenuse</u>**, fordi den ikke er en af kateterne.

Forestil dig at du sidder i den spidse vinkel u og holder i de to vinkelben. Den katete du holder i, er **<u>vinklens hosliggende katete</u>**. Den anden katete er **<u>vinklens modstående katete</u>**.



<u>Type 1</u>

<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en spids vinkel.

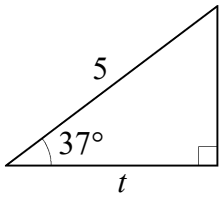
<u>Udregn:</u> Vinklens hosliggende katete.

$5 \cdot \mathbf{cos}(37°) = t$ Nspire udregner venstre side

vinklens hosliggende katete

spids vinkel

hypotenusen



<u>Type 2</u>

<u>Kendt:</u> En spids vinkel og dens hosliggende katete.

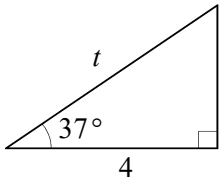
<u>Udregn:</u> Hypotenusen.

$t \cdot \mathbf{cos}(37°) = 4$ Nspire løser mht. t

vinklens hosliggende katete

spids vinkel

hypotenusen



<u>Type 3</u>

<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en katete.

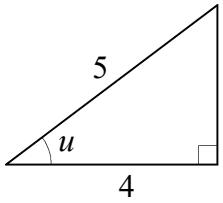
<u>Udregn:</u> Vinklen mellem disse.

$5 \cdot \mathbf{cos}(u) = 4$ Nspire løser mht. u for $0° < u < 90°$

vinklens hosliggende katete

spids vinkel

hypotenusen



<u>Type 4</u>

<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en spids vinkel.

<u>Udregn:</u> Vinklens modstående katete.

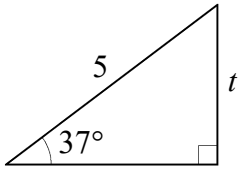
Nspire udregner venstre side

$5 \cdot \mathbf{sin}(37°) = t$

vinklens modstående katete

spids vinkel

hypotenusen



<u>Type 5</u>

<u>Kendt:</u> En spids vinkel og dens modstående katete.

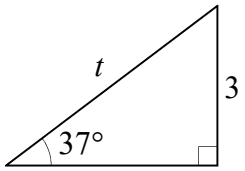
<u>Udregn:</u> Hypotenusen.

$t \cdot \mathbf{sin}(37°) = 3$ Nspire løser mht. t

vinklens modstående katete

spids vinkel

hypotenusen



<u>Type 6</u>

<u>Kendt:</u> Hypotenusen og en katete.

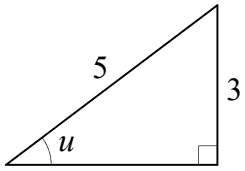
<u>Udregn:</u> Katetens modstående vinkel.

$5 \cdot \mathbf{sin}(u) = 3$ Nspire løser mht. u for $0° < u < 90°$

vinklens modstående katete

spids vinkel

hypotenusen



Type 7

Kendt: En spids vinkel og dens hosliggende katete.

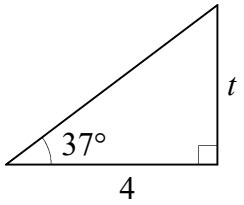
Udregn: Vinklens modstående katete.

$4 \cdot \mathbf{tan}(37°) = t$ Nspire udregner venstre side

vinklens modstående katete

spids vinkel

vinklens hosliggende katete



Type 8

Kendt: En spids vinkel og dens modstående katete.

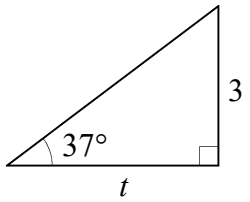
Udregn: Vinklens hosliggende katete.

$t \cdot \mathbf{tan}(37°) = 3$ Nspire løser mht. t

vinklens modstående katete

spids vinkel

vinklens hosliggende katete



Type 9

Kendt: De to kateter.

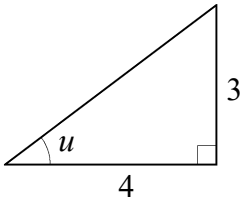
Udregn: En spids vinkel.

$4 \cdot \mathbf{tan}(u) = 3$ Nspire løser mht. u for $0° < u < 90°$

vinklens modstående katete

spids vinkel

vinklens hosliggende katete



Type 10

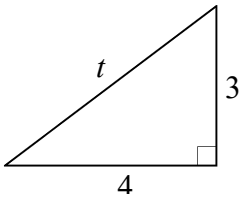
Kendt: De to kateter.

Udregn: Hypotenusen.

$3^2 + 4^2 = t^2$ Nspire løser mht. t for $0 < t$

hypotenuse

kateter



Type 11

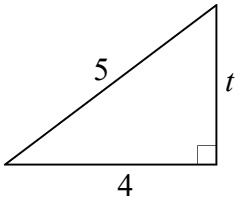
Kendt: Hypotenusen og en katete.

Udregn: Den anden katete.

$t^2 + 4^2 = 5^2$ Nspire løser mht. t for $0 < t$

hypotenuse

kateter



De 4 formler til udregning af sider og vinkler i <u>retvinklet</u> trekant

Hver af de 11 metoder ovenfor bruger en af følgende fire formler:

I en retvinklet trekant gælder

(1) $\mathit{den_ene_katete}^{\mathbf{2}} + \mathit{den_anden_katete}^{\mathbf{2}} = \mathit{hypotenusen}^{\mathbf{2}}$

For en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:

(2) $\mathit{hypotenusen} \cdot \mathbf{cos}(\mathit{vinkel}) = \mathit{vinklens_hosliggende_katete}$

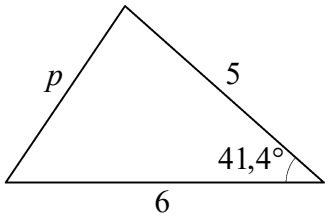
(3) $\mathit{hypotenusen} \cdot \mathbf{sin}(\mathit{vinkel}) = \mathit{vinklens_modstående_katete}$

(4) $\mathit{vinklens_hosliggende_katete} \cdot \mathbf{tan}(\mathit{vinkel}) = \mathit{vinklens_modstående_katete}$

De 4 opgavetyper vi løser ved hjælp af cosinusrelationen eller sinusrelationen

<u>Type 12:</u> Udregn side med cosinusrelationen
Trekanten er ikke retvinklet.

<u>Kendt:</u> En vinkel mellem to sider og disse to sider.
<u>Udregn:</u> Siden over for vinklen.



altid 2

$$p^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(41{,}4°)$$

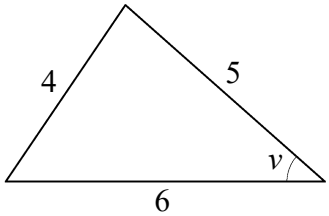
vinklensben

siden over for vinklen

Nspire løser ligningen mht. p for $p > 0$

<u>Type 13:</u> Udregn vinkel med cosinusrelationen
Trekanten er ikke retvinklet.

<u>Kendt:</u> De tre sider.
<u>Udregn:</u> Vinklen.



altid 2

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(v)$$

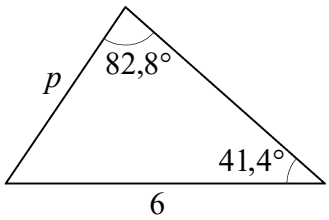
vinklensben

siden over for vinklen

Nspire løser ligningen mht. v for $0° \le v \le 180°$

<u>Type 14:</u> Udregn side med sinusrelationen
Trekanten er ikke retvinklet.

<u>Kendt:</u> En side og to vinkler.
<u>Udregn:</u> En af de andre sider.



$$\frac{p}{\sin(41.4°)} = \frac{6}{\sin(82.8°)}$$

siden der er 6 enheder, ligger over for vinklen der er 82,8°

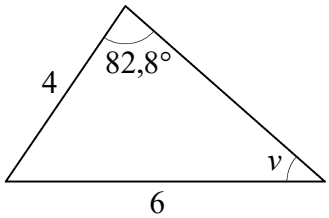
siden der er p enheder, ligger over for vinklen der er 41,4°

Nspire løser ligningen mht. p for $p > 0$

Hvis det var siden over for den ukendte vinkel vi skulle finde, så måtte vi først udregne denne vinkel ved at udnytte at summen af de tre vinkler er $180°$.

<u>Type 15:</u> Udregn vinkel med sinusrelation
Trekanten er ikke retvinklet.

<u>Kendt:</u> To sider og vinklen over for en af dem.
<u>Udregn:</u> Vinklen over for den anden af de to sider.



$$\frac{4}{\sin(v)} = \frac{6}{\sin(82{,}8°)}$$

siden der er 6 enheder, ligger over for vinklen der er 82,8°

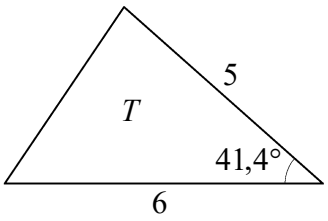
siden der er 4 enheder, ligger over for vinklen af størrelse v

Nspire løser ligningen mht. v for $0° \le v \le 180°$

Nspire giver både en løsning under $90°$ og en løsning over $90°$. <u>Husk at begrunde hvilken af løsningerne der skal bruges</u>. I dette tilfælde kan begrundelsen være: "Vinklen er under $90°$ da siden over for vinklen ikke er den største i trekanten." I nogle opgaver er det oplyst om vinklen er <u>stump</u> (dvs. over $90°$) eller <u>spids</u> (dvs. under $90°$).

De 3 opgavetyper med sinusformlen for trekants areal

Type 16



Kendt: To sider og vinklen mellem dem.
Udregn: Arealet.

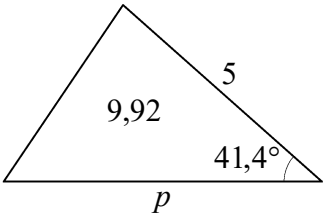
Arealet er $T = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin(41{,}4°)$

altid $\frac{1}{2}$

vinklen skal være mellem disse sider

Nspire udregner ligningens højre side.

Type 17



Kendt: Arealet, vinklen mellem to sider og en af de to sider.
Udregn: Den anden af de to sider.

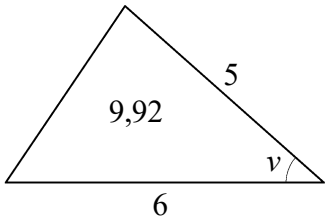
$9{,}92 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot p \cdot \sin(41{,}4°)$

altid $\frac{1}{2}$

vinklen skal være mellem disse sider

Nspire løser ligningen mht. p.

Type 18



Kendt: Arealet og to sider.
Udregn: Vinklen mellem de to sider.

$9{,}92 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin(v)$

altid $\frac{1}{2}$

vinklen skal være mellem disse sider

Nspire løser ligningen mht. v for $0° < v < 180°$.

Ligningen har både en løsning under $90°$ og en løsning over $90°$. Hvis opgaven er i en prøve, så vil der være flere oplysninger så det fremgår hvilken af de to trekanter opgaven drejer sig om.

De 3 formler for <u>vilkårlig</u> trekant

Hver af metoderne 12-18 bruger en af følgende tre formler:

I alle trekanter gælder

(5) $T = \frac{1}{2} pq \sin(v)$ når T er trekantens areal og v er vinklen mellem siderne p og q.

(6) $\dfrac{p}{\sin(u)} = \dfrac{q}{\sin(v)}$ når p er siden over for vinklen u og q er siden over for vinklen v.

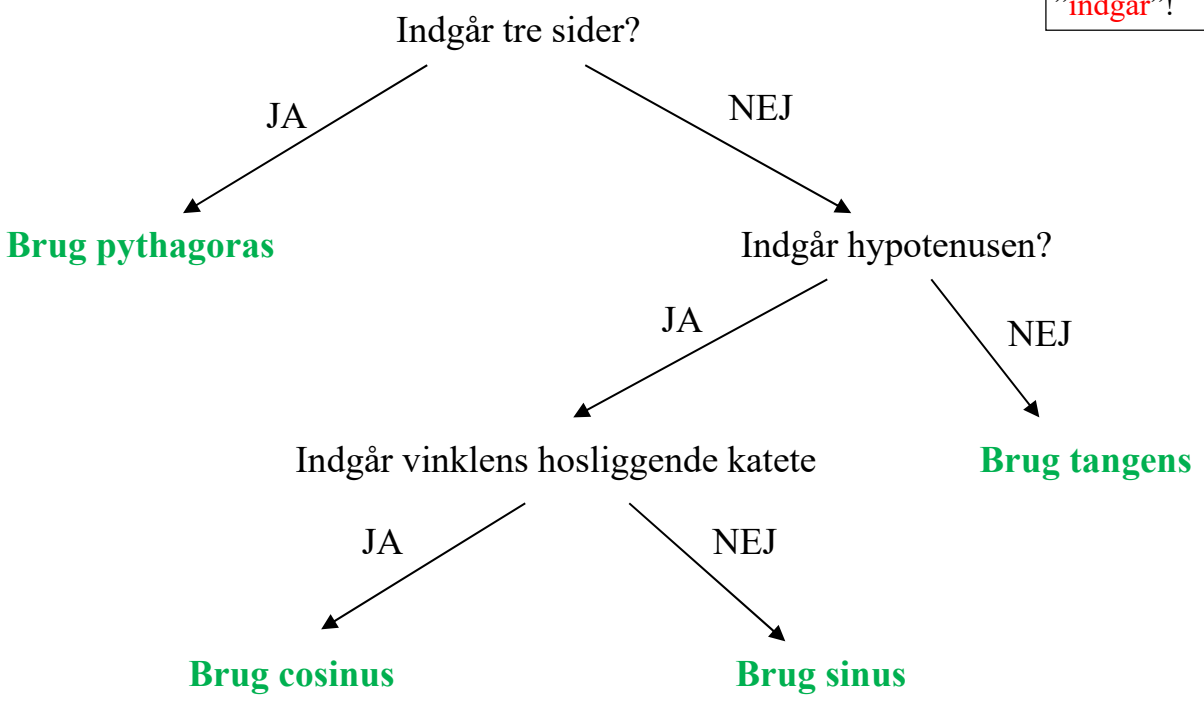
(7) $r^2 = p^2 + q^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos(u)$ når p, q og r er siderne og u er vinklen mellem p og q.

Retvinklet – Hvilken regel?

Svar på spørgsmålene. Så ved du hvilken regel for retvinklet trekant du skal bruge.

Når der står at en side eller vinkel "**indgår**", betyder det at den enten er **oplyst** eller er **det man skal regne ud**.

En ret vinkel 90° medregnes ikke i "indgår"!

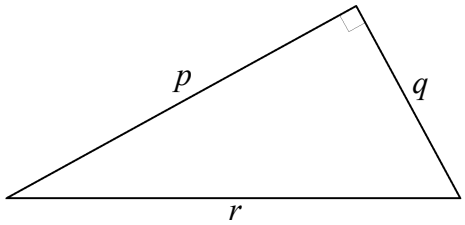


Pythagoras' sætning gælder kun i retvinklede trekanter.

Pythagoras' sætning som formel

$$p^2 + q^2 = r^2$$

når p og q er kateter, og r er hypotenuse.

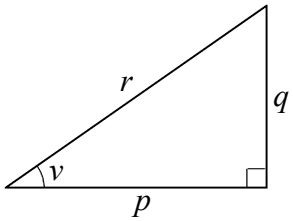


Pythagoras' sætning i ord

Den ene katete i anden **plus** den anden katete i anden **er** hypotenusen i anden.

Når

v er en spids vinkel i en retvinklet trekant
r er hypotenusen
p er v's hosliggende katete
q er v's modstående katete



Kateterne er de sider der støder op til den rette vinkel.
En vinkels hosliggende katete er den af kateterne der støder op til vinklen.

så gælder:

11 $r \cdot \cos(v) = p$ dvs. hypotenuse gange $\cos(v)$ er v's hosliggende katete

12 $r \cdot \sin(v) = q$ dvs. hypotenuse gange $\sin(v)$ er v's modstående katete

13 $p \cdot \tan(v) = q$ dvs. v's hosliggende katete gange $\tan(v)$ er v's modtående katete

I mange tilfælde hedder vinklen og siderne noget andet end v, p, q, r.
Derfor er det ofte en fordel at udtrykke reglerne i ord som vi har gjort til venstre for formlerne.

Stikordsregister

areal 3, 4, 5, 24, 39
areal og sinus 24
areal, sinusformlen 31
bevis for cosinusrelationen 28, 29
bevis for sinusrelationen 25
cosinus 19
cosinus og Nspire 18
cosinus i retvinklet trekant 19, 20, 21, 36, 37
cosinusrelationen 28, 29, 30, 31, 32, 33, 38
ensvinklede trekanter 13, 14, 15, 16, 17
hosliggende katete 12, 19, 36, 37
hypotenuse 6, 12, 19, 36, 37
højde 2, 5, 34
højde-grundlinje-formel for trekants areal 3
katete 6, 7, 19, 36, 37
kvadrat 2
median 34
modstående katete 12, 19, 36, 37
modstående side 11
modstående vinkel 11
multiplikationstabel 6, 7, 8, 14, 15
omkreds 2
Pythagoras' sætning 6, 7, 8, 9, 10, 23, 37
rektangel 2
ret vinkel 1
retvinklet trekant 6, 12, 19, 20, 21, 22, 23, 36, 37, 40
sammensat opgave 35
sinus 19
sinus i retvinklet trekant 19, 20, 23, 36, 37
sinus og Nspire 18
sinusformlen for areal 24, 31, 39
sinusrelationen 25, 26, 27, 31, 32, 33, 38
skalafaktor 13, 14, 15, 16, 17
spids vinkel 1
stump vinkel 1
tangens 19, 21, 22
tangens i retvinklet trekant 19, 21, 22, 37
tangens og Nspire 18
to løsninger 27
vilkårlig trekant 39
vinkel 1, 21, 32, 33, 35
vinkelhalveringslinje 34