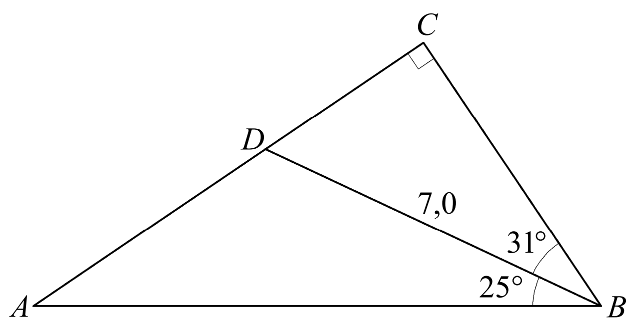
Trekants-beregning

Udgave 2



2010 Karsten Juul

Dette hæfte indeholder den del af trekantsberegningen som skal kunnes på C-niveau i gymnasiet (stx) og hf.

Indhold

Trekantsberegning

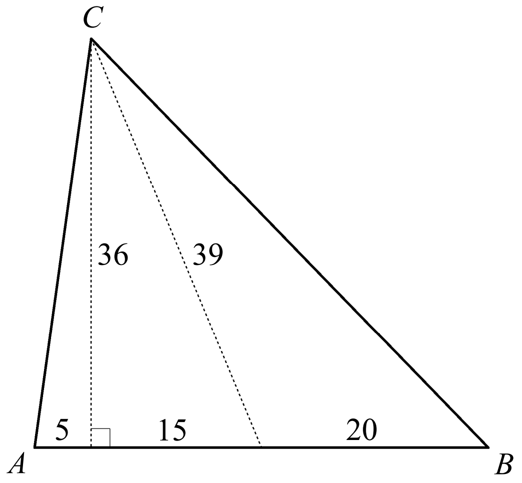
2. udgave 2010

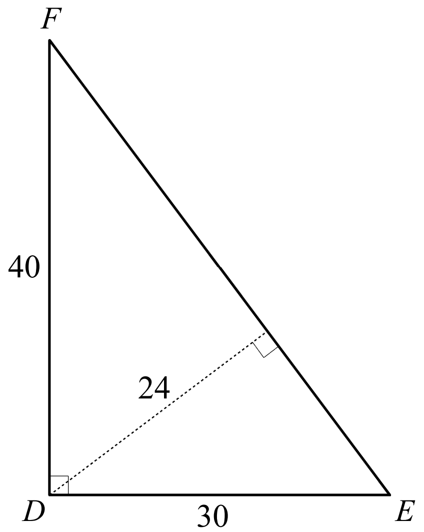
Dette hæfte kan downloades fra www.mat1.dk

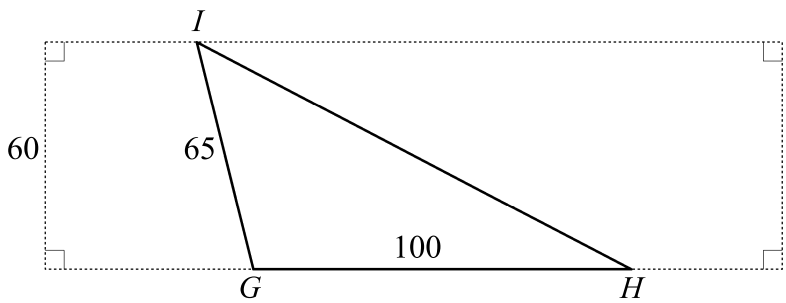
Afsnit 1. Areal af trekant.

Øvelse 1.1

Udregn arealet af hver af de tre trekanter ABC, DEF og GHI.







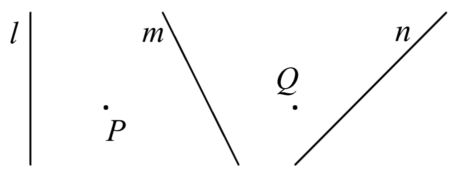
Øvelse 1.2

(a) Tegn en linje der går gennem P og er vinkelret på l.

(b) Tegn en linje der går gennem P og er vinkelret på m.

(c) Tegn en linje der går gennem Q og er vinkelret på m.

(d) Tegn en linje der går gennem Q og er vinkelret på n.



Øvelse 1.3

(a) Tegn en linje gennem A som er vinkelret på linjen gennem B og C.

(b) Tegn en linje gennem B som er vinkelret på linjen gennem A og C.

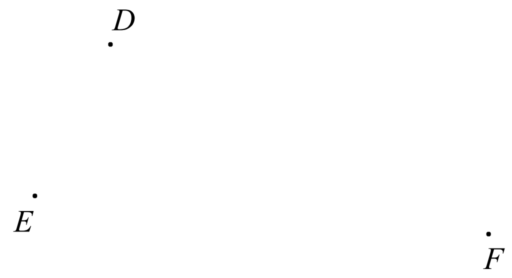
(c) Tegn en linje gennem C som er vinkelret på linjen gennem A og B.

Øvelse 1.4

(a) Tegn en linje gennem D som er vinkelret på linjen gennem E og F.

(b) Tegn en linje gennem E som er vinkelret på linjen gennem D og F.

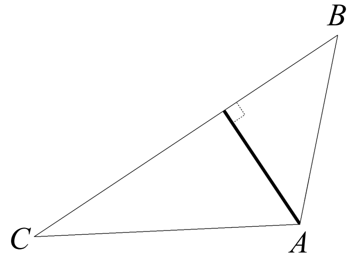
(c) Tegn en linje gennem F som er vinkelret på linjen gennem D og E.



DEFINITION 1.5 *Højde og grundlinje*

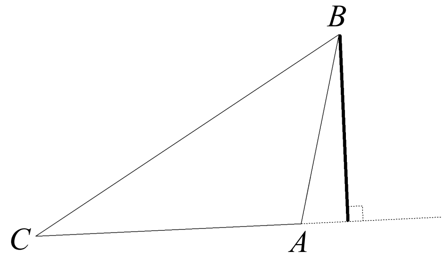
Hvis vi vælger BC som grundlinje:

Højden er det linjestykke der går fra A og vinkelret ind på BC.



Hvis vi vælger AC som grundlinje:

Højden er det linjestykke der går fra B og vinkelret ind på AC's forlængelse.

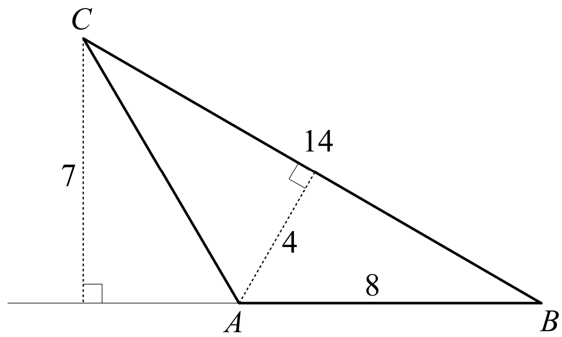


Øvelse 1.6

Figuren viser en trekant ABC.

(a) Hvis vi vælger siden med længde 8 som grundlinje, så er højdens længde _______ .

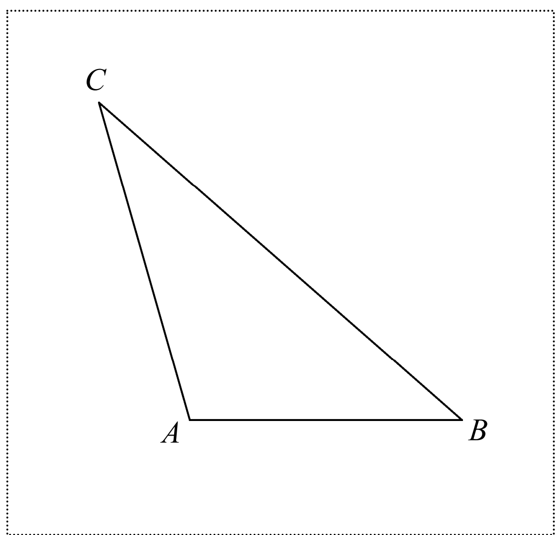
(b) Hvis vi vælger siden med længde 14 som grundlinje, så er højdens længde _______ .



Øvelse 1.7

(a) Tegn det linjestykke som er højde hvis vi vælger BC som grundlinje.

(b) Tegn det linjestykke som er højde hvis vi vælger AC som grundlinje. (*Se definition 1.5*).



SÆTNING 1.8 *Areal af trekant*

Når

T = arealet af trekanten

g = grundlinjen (dvs. en side i trekanten)

h = højden (dvs. den af højderne der står vinkelret på den valgte grundlinje)

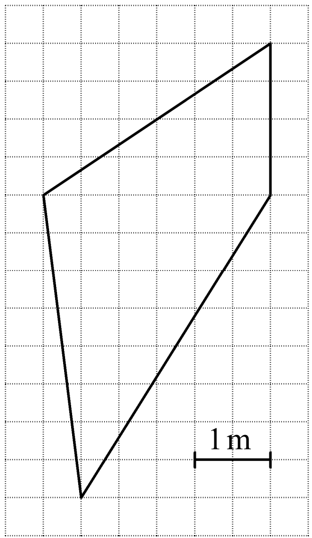
gælder

$$T = \tfrac{1}{2} \cdot h \cdot g \ .$$

Øvelse 1.9

Figuren viser et firkantet bur set fra oven.

Udregn burets areal på den nemmest mulige måde.

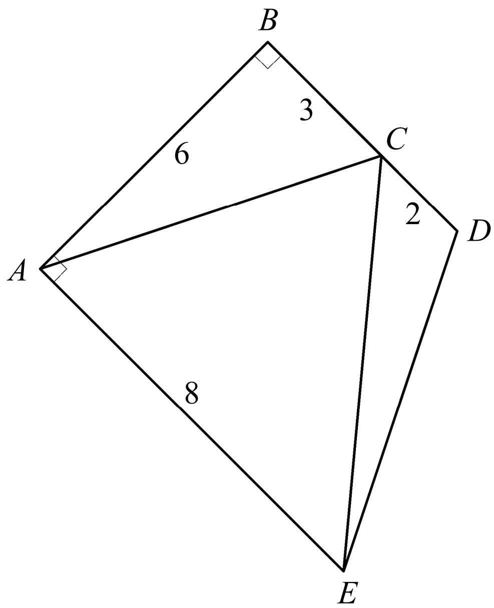


Øvelse 1.10

(a) Udregn arealet af trekant ABC .

(b) Udregn arealet af trekant ACE .

(c) Udregn arealet af trekant CDE .



Øvelse 1.11

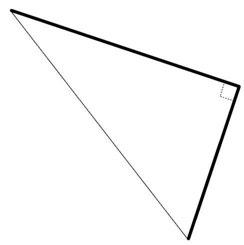
En trekant PQR har arealet 96. Siden PQ har længden 16.

Udregn længden af højden fra R på PQ.

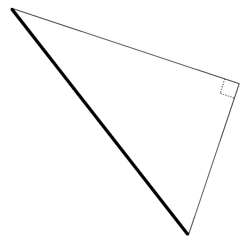
Afsnit 2. Pythagoras' sætning.

DEFINITION 2.1 *Katete og hypotenuse.*

I en retvinklet trekant gælder:



Kateterne er de to sider der danner den rette vinkel.
(Hvis du sidder i den rette vinkel og holder i de to sider, så vil kateterne altså være de sider du holder i).



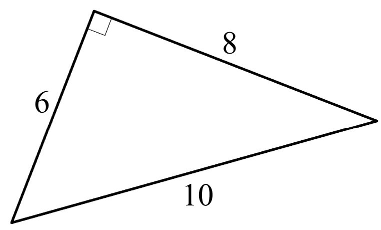
Hypotenusen er den side der ligger over for den rette vinkel.
(Hvis du sidder i den rette vinkel og holder i de to sider, så vil hypotenusen altså være den side du ikke holder i).

Øvelse 2.2

Figuren viser en retvinklet trekant.

Kateternes længder er _______ og _______ .

Hypotenusens længde er _______ .

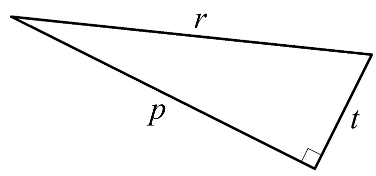


Øvelse 2.3

Figuren viser en retvinklet trekant med siderne p, r og t.

Siderne _______ og _______ er kateterne.

Siden _______ er hypotenusen.



SÆTNING 2.4 *Pythagoras' sætning.*

For en retvinklet trekant gælder:

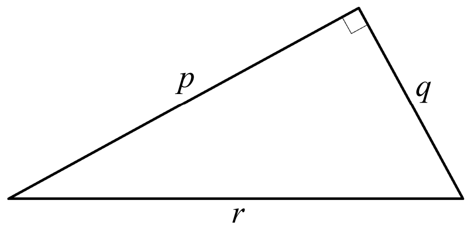
Hvis

p og q er kateterne, og

r er hypotenusen

så er

$$p^2 + q^2 = r^2 .$$



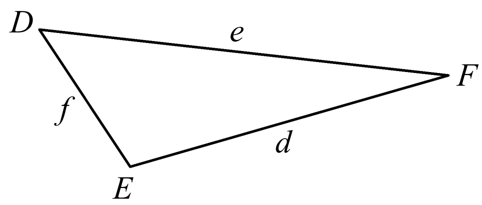
Bemærkning 2.5: *En sprogbrug*

Hvis der står

i trekant DEF er $f = 14$

gælder

det er siden over for vinkelspidsen F der er 14.



Sprogbrugen er nemlig sådan at når

et stort bogstav er en vinkelspids i en trekant,

gælder

det tilsvarende lille bogstav er siden over for vinkelspidsen,

hvis der ikke fremgår andet.

Denne sprogbrug er brugt her:

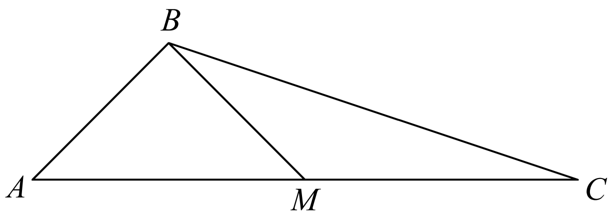
I en trekant ABC hvor vinkel C er ret, er $a^2 + b^2 = c^2$.

Advarsel

Se figuren til højre.
Her dur det ikke hvis du skriver $m = 2{,}6$.

Læseren kan ikke vide om det er AB
eller BC der er $2{,}6$.

Skriv m på den side du mener.
Du skal altid tegne en figur i en geometriopgave.



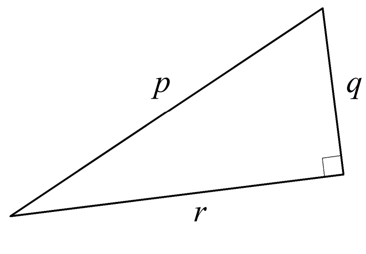
Øvelse 2.6

Afgør for hver ligning om den er korrekt.

(1) $p^2 + q^2 = r^2$

(2) $p^2 + r^2 = q^2$

(3) $r^2 + q^2 = p^2$



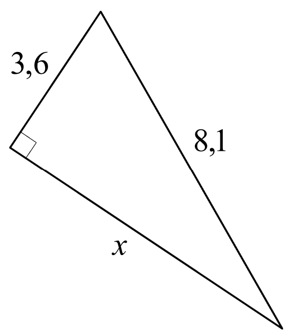
Øvelse 2.7

Afgør for hver ligning om den er korrekt.

(1) $3{,}6^2 + 8{,}1^2 = x^2$

(2) $3{,}6^2 + x^2 = 8{,}1^2$

(3) $x^2 + 8{,}1^2 = 3{,}6^2$



Øvelse 2.8

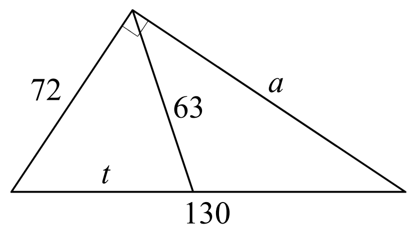
Afgør for hver ligning om den er korrekt.

(1) $72^2 + 63^2 = t^2$

(2) $t^2 + 63^2 = 72^2$

(3) $72^2 + a^2 = 130^2$

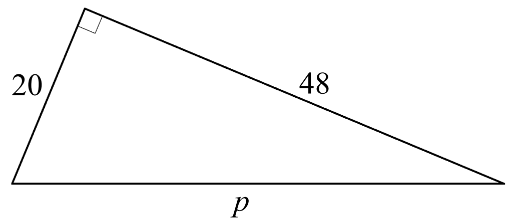
(4) $a^2 + 130^2 = 72^2$

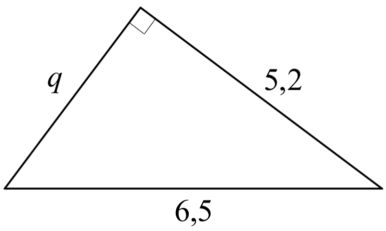


Øvelse 2.9

(a) Udregn siden p .

(b) Udregn siden q .

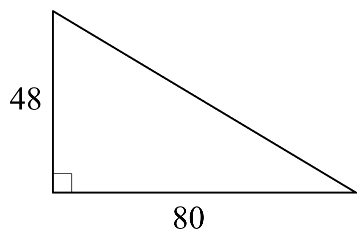


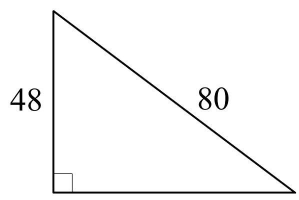


Øvelse 2.10

(a) Udregn arealet af trekanten nedenfor til venstre.

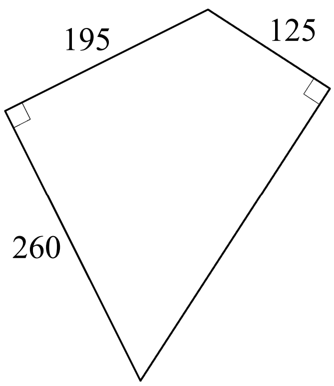
(b) Udregn arealet af trekanten nedenfor til højre.





Øvelse 2.11

Udregn arealet af firkanten.



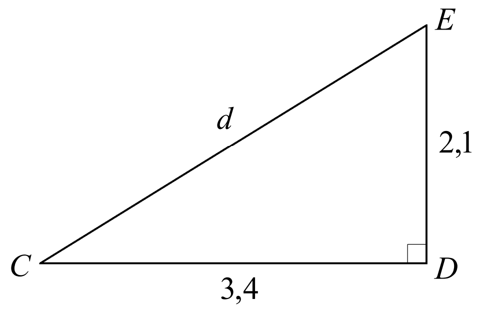
Eksempel 2.12: *Udregne hypotenusen når kateterne er kendt.*

I trekant CDE er vinkel D ret, længden af siden CD er 3,4 , og længden af siden DE er 2,1 .

Spørgsmål: Udregn længden af siden CE .

Svar:
Uden Solve

Først tegner vi en skitse af trekanten.



Af Pythagoras' sætning får vi at

$$d^2 = 3{,}4^2 + 2{,}1^2 \ .$$

Så må

$$d = \sqrt{3{,}4^2 + 2{,}1^2} \ .$$

Vi udregner dette på lommeregner:

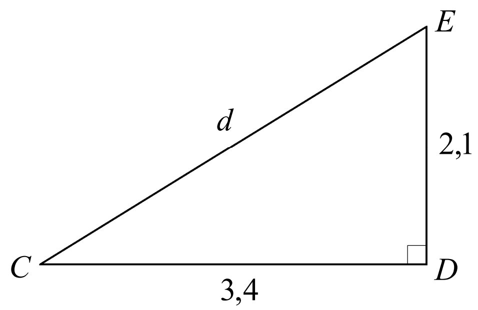
$$d = 3{,}99625 \ .$$

Konklusion:

Længden af siden CE er $\underline{\underline{4{,}0}}$.

Svar:
Med Solve

Først tegner vi en skitse af trekanten.



Af Pythagoras' sætning får vi at

$$d^2 = 3{,}4^2 + 2{,}1^2 \ .$$

Vi taster denne ligning og får den løst mht. d for $d > 0$. Vi får:

$$d = 3{,}99625 \ .$$

Konklusion:

Længden af siden CE er $\underline{\underline{4{,}0}}$.

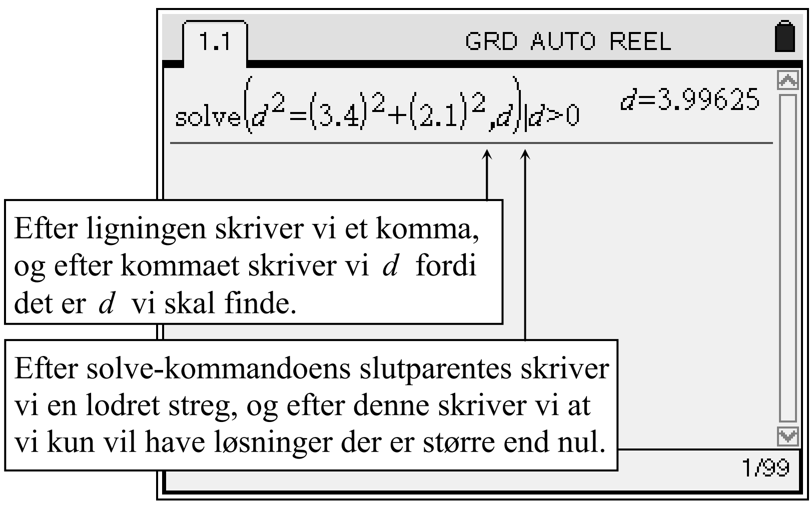
Bemærkning: I ligningen

$$d^2 = 3{,}4^2 + 2{,}1^2$$

er der mere en ét tal der passer på d's plads.

Vi skal kun bruge den løsning der er større en nul, fordi længden af en side altid er større end nul

På skærmen kan indtastningen se sådan ud:

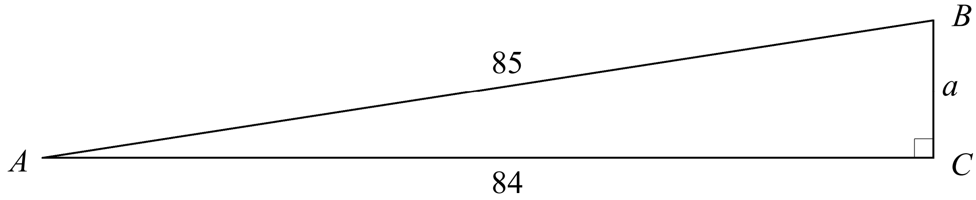


Eksempel 2.13: *Udregne en katete når hypotenusen og den anden katete er kendt.*

I trekant ABC er vinkel C ret, længden af siden AC er 84, og længden af siden AB er 85.

Spørgsmål: Udregn længden af siden BC.

Svar: Først tegner vi en skitse af trekanten.



Af Pythagoras' sætning får vi at

$$84^2 + a^2 = 85^2 \ .$$

Vi trækker 84^2 fra begge sider:

$$a^2 = 85^2 - 84^2 \ .$$

Heraf får vi at

$$a = \sqrt{85^2 - 84^2} \ .$$

Vi udregner dette på lommeregner:

$$a = 13 \ .$$

Konklusion:

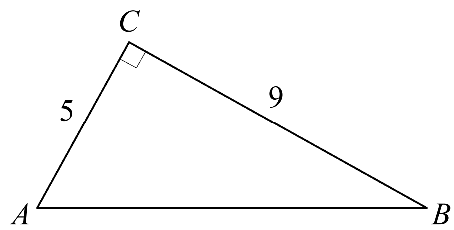
Længden af siden BC er $\underline{\underline{13}}$.

Eksempel 2.14: *Udregne areal når kateterne er kendt.*

I trekant ABC er vinkel C ret, længden af siden AC er 5, og længden af siden BC er 9.

Spørgsmål: Udregn arealet af trekant ABC.

Svar: Først tegner vi en skitse af trekanten.



Vi vælger AC som grundlinje.
Så er BC højden.

Arealet er

$$\tfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 9 \ = \ 22{,}5 \ .$$

Konklusion:

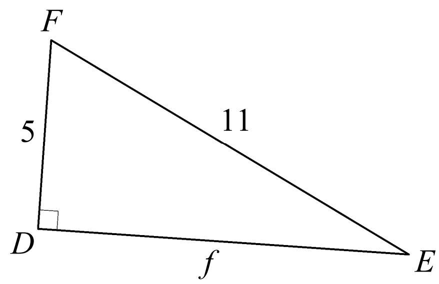
Arealet af trekant ABC er $\underline{\underline{22{,}5}}$.

Eksempel 2.15: *Udregne areal når hypotenusen og en af kateterne er kendt.*

I trekant DEF er vinkel D ret, længden af siden EF er 11, og længden af siden DF er 5.

Spørgsmål: Udregn arealet af trekant DEF.

Svar: Først tegner vi en skitse af trekanten.



Vi vælger DE som grundlinje.
Så er DF højden.

Vi udregner grundlinjen:

Vi bruger Pythagoras' sætning:

$$f^2 + 5^2 = 11^2$$

Heraf får vi

$$f = \sqrt{11^2 - 5^2} \ .$$

Vi udregner arealet:

Arealet er

$$\tfrac{1}{2} \cdot f \cdot 5$$

dvs.

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{11^2 - 5^2} \cdot 5 \ .$$

Vi udregner dette på lommeregner og får

24,4949 .

Konklusion:

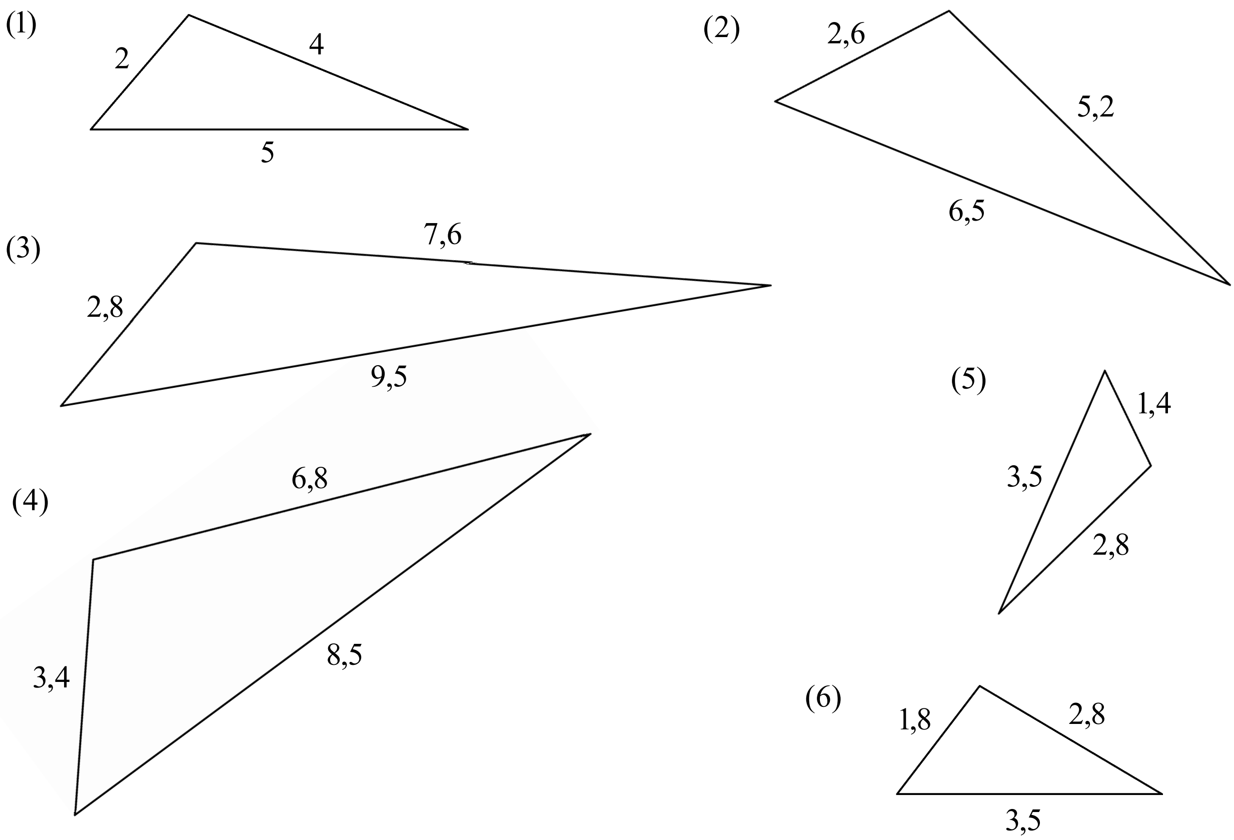
Arealet af trekant DEF er $\underline{\underline{24{,}5}}$.

Afsnit 3. Ensvinklede trekanter.

Øvelse 3.1

(a) Hvilket tal skal vi gange siderne i trekant (1) med for at få siderne i trekant (2) ?
Da alle sider skal ganges med samme tal, er (2) en forstørrelse eller en formindskelse af (1).
Det tal vi ganger med, er størrelsesforholdet og kaldes skalafaktoren.

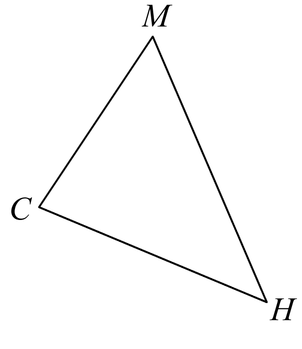
(b) For hver af trekanterne (3), (4), (5) og (6) skal du afgøre om der findes en skalafaktor som ganget med sidederne i (1) giver siderne i den pågældende trekant. Angiv skalafaktoren hvis den eksisterer.



DEFINITION 3.2 *En sides modstående vinkel*

Når du på en tegning af en trekant vil finde ud af hvilken af vinklerne der er modstående til en bestemt af siderne, så gør følgende:

> Forestil dig at du sidder på denne side, og forestil dig at du holder i de to vinkler ved denne sides ender.
>
> Den vinkel du ikke holder i, er <u>sidens modstående vinkel</u>.
>
> Vi siger også at <u>siden ligger over for vinklen</u>.



Eksempel: På figuren ligger siden CM over for vinklen H .

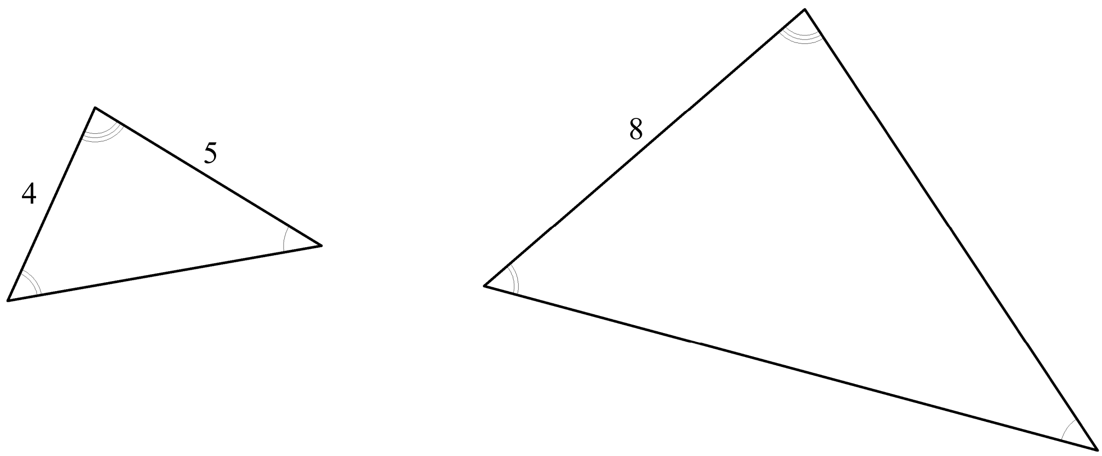
Eksempel 3.3

På figuren nedenfor bruger vi buer , dobbelte buer og tredobbelte buer til at vise hvilke vinkler der er lige store.

Trekanterne har samme vinkler, så de har samme form. Den store er altså en forstørrelse af den lille.

I den lille trekant er der en side med længde 4 , og i den store trekant er der en side med længde 8 . Disse to sider ligger over for vinkler der er lige store. Da vi skal gange den lille side med 2 for at få den store, er skalafaktoren 2 .

Siden over for vinklen med dobbelt bue i den store trekant er altså 2 gange 5, dvs. 10.



Øvelse 3.4

Du får nu en ny oplysning om den store trekant fra eksempel 3.3: Siden over for vinklen med tredobbelt bue har længden 12.

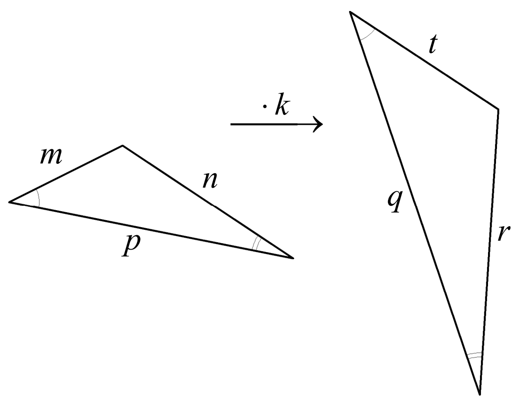
Hvor lang er den side i den lille trekant som ligger over for vinklen med tredobbelt bue?

Når to vinkler i venstre trekant er lig to vinkler i højre trekant, så må den tredje vinkel i venstre trekant også være lig den tredje vinkel i den højre. Dette skyldes at summen af vinklerne i en trekant er den samme for alle trekanter (nemlig 180°).

SÆTNING 3.5 *Ensvinklede trekanter*

De to trekanter har samme vinkler.

Derfor er der en skalafaktor k .



Da m og t ligger over for vinkler der er lige store, er

$$m \cdot k = t$$

Da p og q ligger over for vinkler der er lige store, er

$$p \cdot k = q$$

Da n og r ligger over for vinkler der er lige store, er

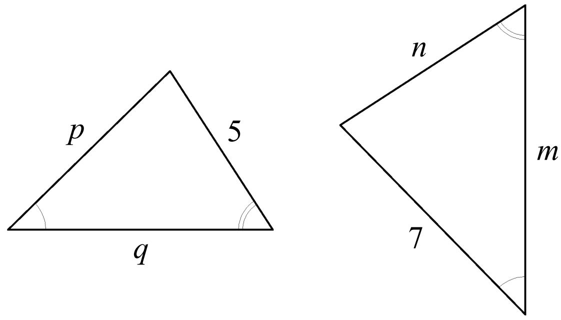
$$n \cdot k = r$$

Pilen på figuren viser hvilken vej vi ganger. Hvis vi i stedet valgte at gange siderne i højre trekant, så ville k stå for et andet tal.

Det er tilladt at bruge andre bogstaver i stedet for k . (Læseren ved altså ikke på forhånd at k står for skalafaktoren, så det er nødvendigt at vi skriver det).

Øvelse 3.6

De to trekanter til højre er ensvinklede, så der findes et tal k som ganget med siderne i første trekant giver siderne i anden trekant. Afgør for hver af følgende ligninger om den er gyldig:



(1) $5 \cdot k = 7$

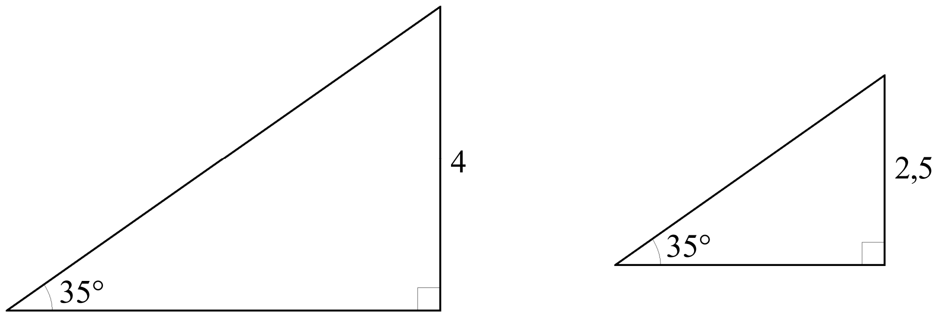
(2) $p \cdot k = n$

(3) $p \cdot k = 7$

(4) $m \cdot k = q$

(5) $q \cdot k = m$.

Øvelse 3.7



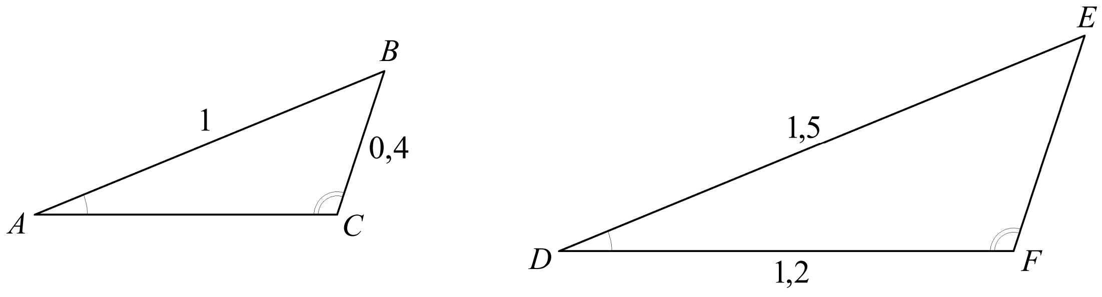
(a) På figuren ser vi at de to trekanter er __________________________ , så der er en skalafaktor.

(b) Når vi ganger siderne i den venstre trekant med skalafaktoren __________ , så får vi siderne i den højre trekant.

(c) Når vi ganger siderne i den højre trekant med skalafaktoren __________ , så får vi siderne i den venstre trekant.

(d) Når vi dividerer siderne i den højre trekant med __________ , så får vi siderne i den venstre trekant.

Øvelse 3.8

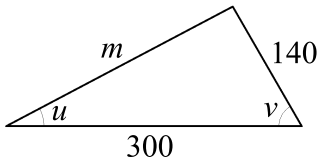


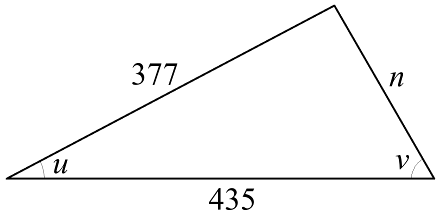
(a) Når vi ganger siderne i ABC med __________ , så får vi siderne i DEF .

(b) Når vi ganger 0,4 med __________ , så får vi længden af EF . Længden er __________ .

(c) Når vi dividerer 1,2 med __________ , så får vi længden af AC . Længden er __________ .

Øvelse 3.9





(a) $300 \cdot$ __________ $=$ 435

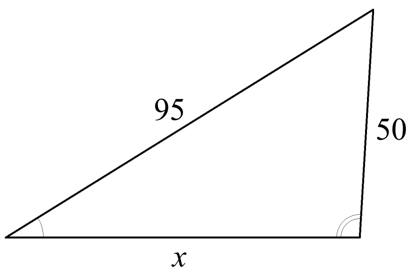
(b) $n =$ __________ $\cdot$ __________ $=$ __________

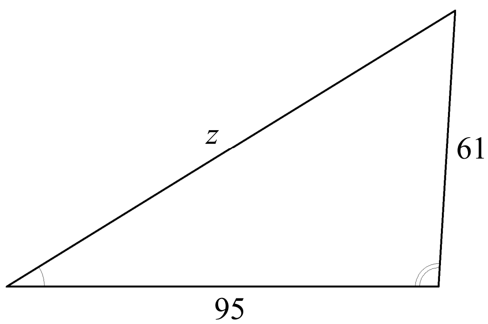
(c) $m =$ __________ : __________ $=$ __________

Brøkstreg

(d) Denne division skriver vi normalt som en brøk sådan: $m =$ $\frac{\qquad}{\qquad}$

Øvelse 3.10

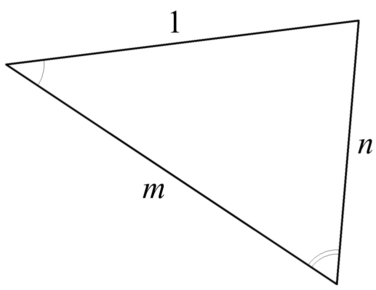


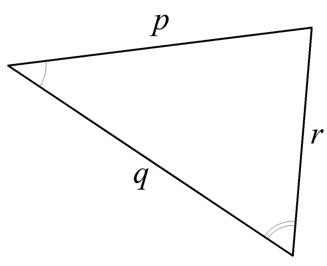


Afgør for hver ligning om den er sand eller falsk:

(a) $z = 95 \cdot 1{,}23$ (b) $x = \frac{95}{1{,}22}$ (c) $z = 95 \cdot 1{,}22$

Øvelse 3.11

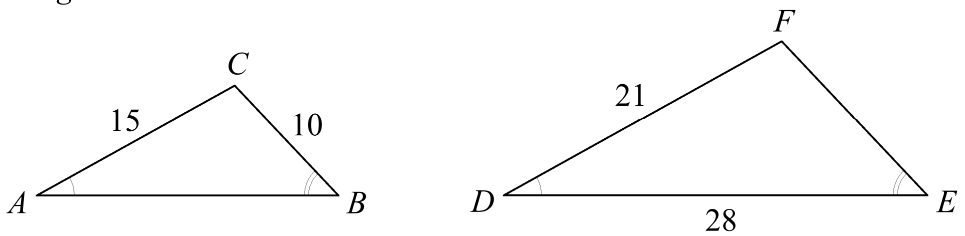




Afgør for hver ligning om den er sand eller falsk:

(a) $m = \frac{q}{p}$ (b) $r = \frac{n}{p}$ (c) $r = n \cdot q$ (d) $q = m \cdot p$ (e) $n = \frac{r}{p}$

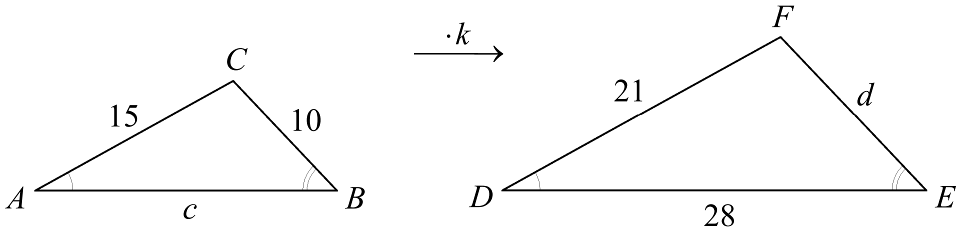
Eksempel 3.12: *Udregne sider i ensvinklede trekanter.*



Figuren viser to ensvinklede trekanter ABC og DEF .

<u>Spørgsmål:</u> Udregn længderne af siderne EF og AB .

<u>Svar:</u> Da trekanterne er ensvinklede, er der en skalafaktor k :



<u>Skalafaktoren:</u>

Siden med længde 15 fra den første trekant og siden med længde 21 fra den anden ligger over for vinkler som er lige store. Derfor gælder

$$15 \cdot k = 21 \ .$$

Heraf får vi

$$k = \frac{21}{15}$$

dvs.

$$\underline{k = 1{,}4} \ .$$

<u>Siden *EF*:</u>

Siden med længde 10 i den første trekant og siden med længde d i den anden ligger over for vinkler der er lige store. Derfor gælder

$$10 \cdot 1{,}4 = d$$

dvs.

$$\underline{d = 14} \ .$$

<u>Siden *AB*:</u>

Siden med længde c i den første trekant og siden med længde 28 i den anden ligger over for vinkler der er lige store. Derfor gælder

$$c \cdot 1{,}4 = 28 \ .$$

Heraf får vi

$$c = \frac{28}{1{,}4}$$

dvs.

$$\underline{c = 20} \ .$$

<u>Konklusioner:</u>

Længden af siden EF er $\underline{\underline{14}}$ og længden af siden AB er $\underline{\underline{20}}$.

Afsnit 4. Cosinus.

DEFINITION 4.1 *Hosliggende katete*

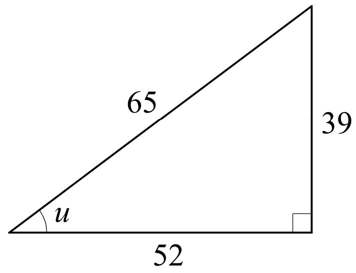
At en vinkel er <u>spids</u>, betyder at vinklen er mindre end 90°.

Forestil dig at du sidder i den spidse vinkel u og holder i de to sider.

Disse to sider kaldes vinklens hosliggende sider.

En af de sider du holder i, er en katete.

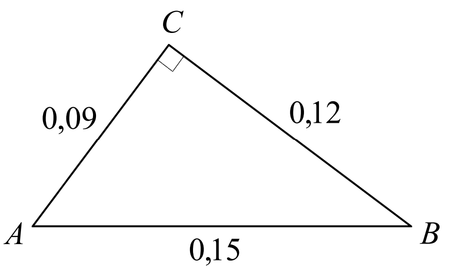
Denne side kaldes vinklens hosliggende katete.

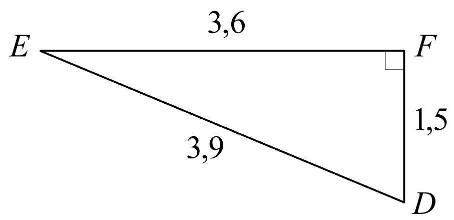


I den viste trekant gælder altså:

Vinkel u's hosliggende katete har længden 52.

Øvelse 4.2





(a) Vinkel A's hosliggende sider har længderne __________ og __________ .

(b) Vinkel A's hosliggende katete har længden __________ .

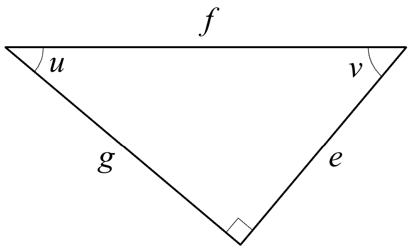
(c) Vinkel B's hosliggende sider har længderne __________ og __________ .

(d) Vinkel B's hosliggende katete har længden __________ .

(e) Vinkel D's hosliggende katete har længden __________ .

(f) Vinkel E's hosliggende katete har længden __________ .

Øvelse 4.3



(a) Vinkel u's hosliggende sider er __________ og __________ .

(b) Vinkel u's hosliggende katete er __________ .

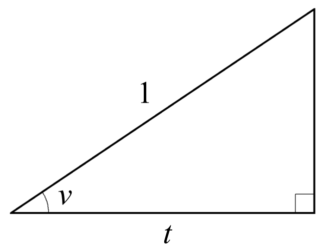
(c) Vinkel v's hosliggende katete er __________ .

DEFINITION 4.4 *Cosinus*

Når vi trykker på √-tasten, får vi udført en bestemt udregning. Vi har brugt denne udregning i opgaver om trekanter (Pythagoras).

Når vi trykker på **cos**-tasten, får vi udført en anden udregning som vi også skal bruge i opgaver om trekanter.

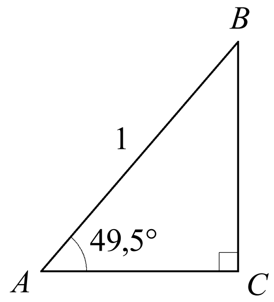
Figuren viser en retvinklet trekant hvor hypotenusen er 1.



Hvis vi udregner: cosinus til gradtallet for en af de spidse vinkler,
så får vi: længden af denne vinkels hosliggende katete .
Vi skriver: $\cos(v) = t$.

Lommeregneren (eller matematikprogrammet) **skal** være indstillet til at regne med enheden grader.

Eksempel 4.5



På lommeregner udregner vi at

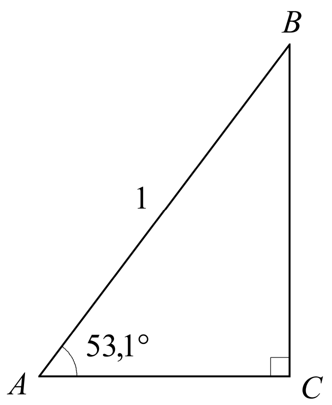
$$\cos(49{,}5°) = 0{,}649448 \ .$$

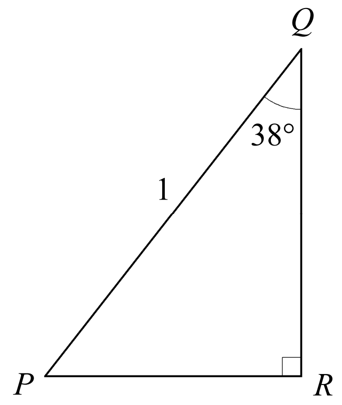
Dette betyder at

længden af siden AC er $\underline{\underline{0{,}649}}$.

Øvelse 4.6

Brug cosinus til at udregne længden af hver af siderne AC og QR .





Øvelse 4.7

I trekant ABC er vinkel C ret, vinkel A er $33{,}9°$, længden af siden AB er 1, og længden af siden AC er $\frac{q}{2}$, hvor q er et tal der ikke er oplyst.

Skitsér trekanten, og bestem tallet q .

Øvelse 4.8

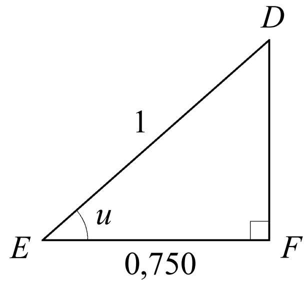
I trekant DEF er vinkel F ret, vinkel D er $36{,}9°$, længden af siden DE er 1, og længden af siden DF er $\frac{4}{p}$, hvor p er et tal der ikke er oplyst.

Skitsér trekanten og bestem tallet p .

Eksempel 4.9

På figuren ser vi at

$$\cos(u) = 0{,}750 \ .$$



Vi taster denne ligning og får den løst mht. u for u mellem $0°$ og $90°$. Vi får:

$$u = 41{,}4096° \ .$$

Dette betyder at

vinklen E er $\underline{\underline{41{,}4°}}$.

Bemærkning 1

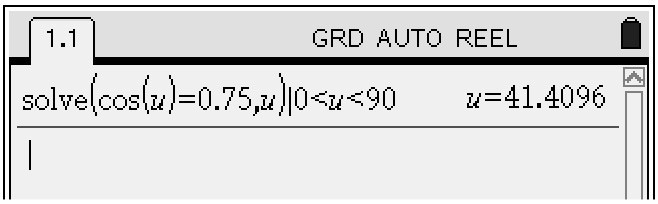
I ligningen

$$\cos(u) = 0{,}750$$

er der mange tal der passer på u's plads.

Vi skal kun bruge den løsning der ligger mellem $0°$ og $90°$.

På skærmen kan indtastningen se sådan ud:



Bemærkning 2

Vi kan finde vinklen uden at bruge solve. I stedet kan vi bruge

omvendt cosinus

som skrives

$$\cos^{-1}$$

Dette symbol kan vi få frem ved hjælp af $\cos^{-1}$-tasten eller ved at skrive symbolet.

Hvis vi skriver symbolet, skal vi vælge $^{-1}$ i symbolmenuen.

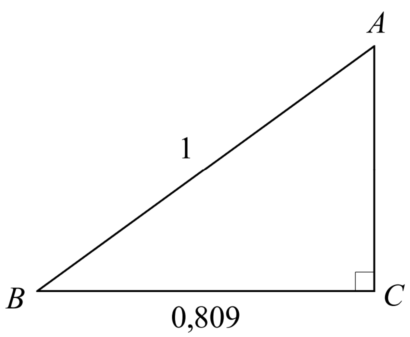
Symbolet $\cos^{-1}$ er ikke en sædvanlig potens. Det hævede -1 betyder "omvendt" .

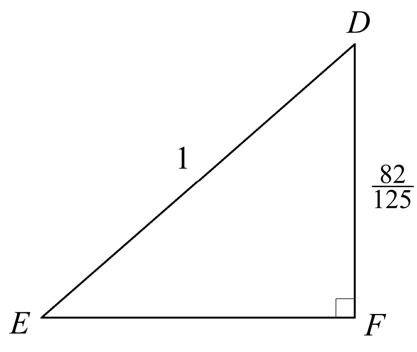
På lommeregner udregner vi at

$$\cos^{-1}(0{,}750) = 41{,}4096° \ .$$

Øvelse 4.10

Udregn vinklerne B og D .





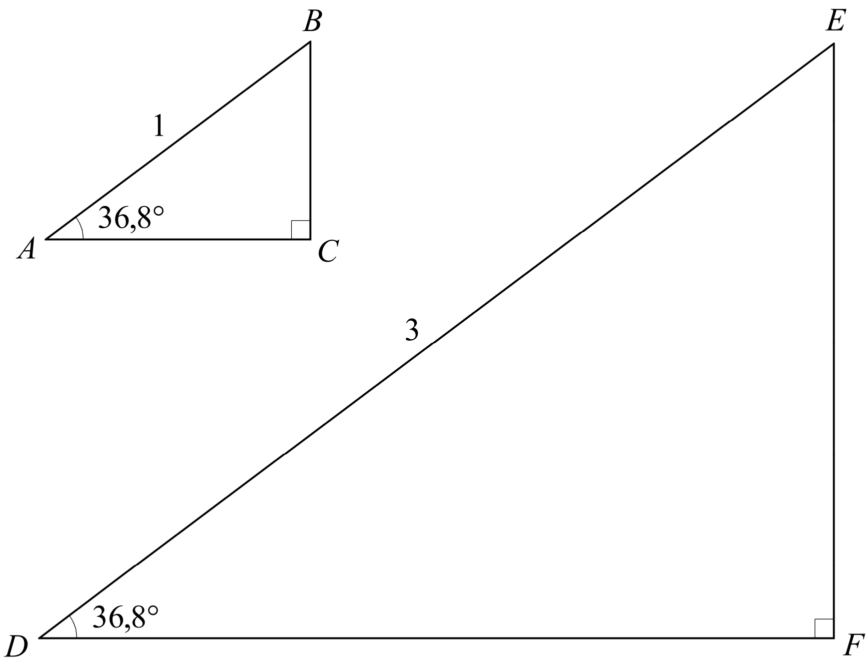
Øvelse 4.11 *Oplæg til 4.12 .*

Nedenfor er vist to trekanter.

(1) Brug cosinus på lommeregneren til at udregne længden af siden AC

(2) Brug svaret på (1) til at udregne længden af siden DF .

(3) Hvilken sætning fra dette hæfte skal bruges i (2)?

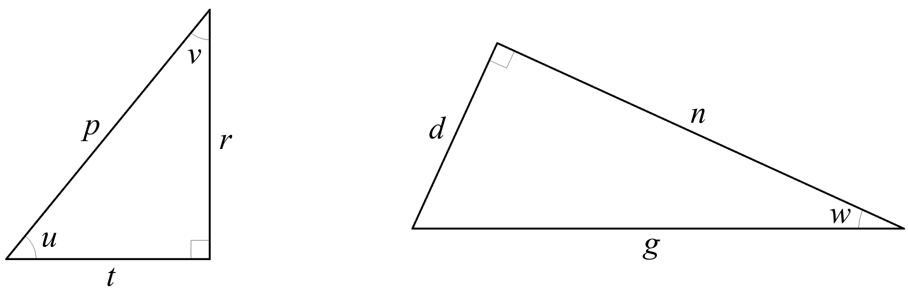


SÆTNING 4.12 *cosinus*

Om en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:

$$\cos(\textit{vinklen}) = \frac{\textit{vinklens hosliggende katete}}{\textit{hypotenusen}} \quad .$$

Øvelse 4.13



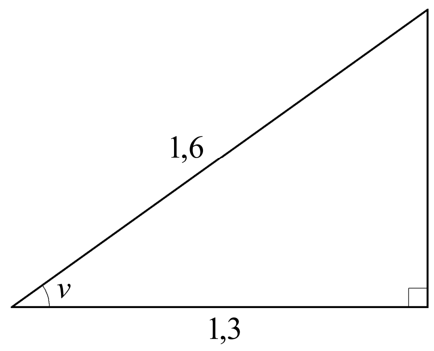
Hvilke af ligningerne nedenfor er ok ifølge sætning 4.12?

(a) $\cos(u) = \frac{p}{t}$ (b) $\cos(v) = \frac{r}{p}$ (c) $u = \frac{t}{p}$ (d) $\cos(v) = \frac{t}{p}$

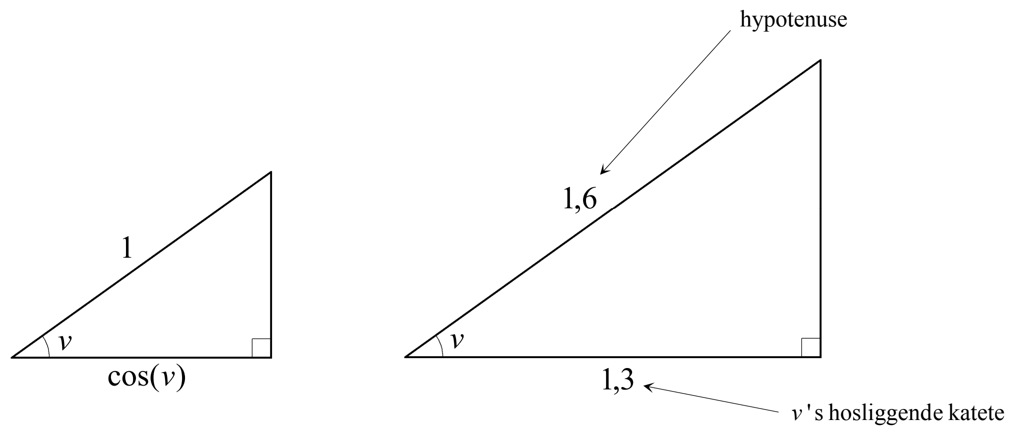
(e) $\cos(w) = \frac{d}{n}$ (f) $\cos(w) = \frac{g}{n}$ (g) $\cos(w) = \frac{n}{g}$.

Begrundelse 4.14 *Begundelse for gyldigheden af sætning 4.12*

Der er givet følgende trekant:



Vi tegner en ny trekant som har samme vinkler, men hvor hypotenusen er 1 :



Trekanterne er ensvinklede. Skalafaktoren er $1{,}6$ da hypotenusen i venstre trekant skal ganges med $1{,}6$ for at få hypotenusen i højre trekant.

Vi får altså siden $\cos(v)$ når vi dividerer $1{,}3$ med skalafaktoren $1{,}6$, dvs.

$$\cos(v) = \frac{1{,}3}{1{,}6}$$

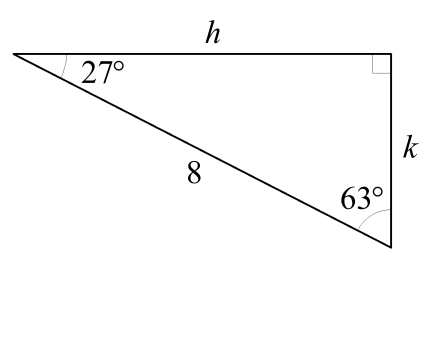
Her står at

$$\cos(\mathit{vinklen}) = \frac{\mathit{vinklens\ hosliggende\ katete}}{\mathit{hypotenusen}}$$

Dette er ligningen fra sætning 4.12 . Det er klart at vi kan komme frem til denne ligning selv om siderne har andre længder end $1{,}3$ og $1{,}6$.

Øvelse 4.15

Brug sætning 4.12 til at skrive to ligninger der er gyldige for den viste trekant.
Du skal ikke regne noget ud.

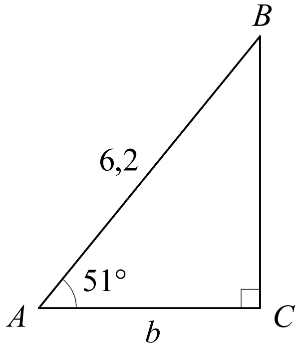


Eksempel 4.16 *En vinkel og hypotenusen er kendt. Udregn vinklens hosliggende katete.*

I trekant ABC er vinkel C ret, vinkel A er $51°$, og længden af siden AB er $6{,}2$.

Spørgsmål: Bestem længden af siden AC.

Svar: Først tegner vi en skitse af trekanten.



Da trekanten er retvinklet og vinkel A er spids, er

$$\cos(A) \;=\; \frac{A'\,s\ hosliggende\ katete}{hypotenusen}$$

dvs.

$$\cos(51°) \;=\; \frac{b}{6{,}2}\ .$$

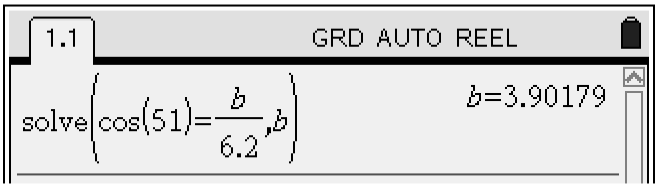
Vi taster denne ligning og får den løst mht. b. Vi får

$$b \;=\; 3{,}90176$$

dvs.

længden af AC er $\underline{\underline{3{,}9}}$.

Bemærkning: På skærmen kan indtastningen se sådan ud:

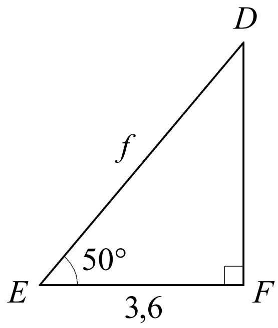


Eksempel 4.17 *En vinkel og dens hosliggende katete er kendt. Udregn hypotenusen.*

I trekant DEF er vinkel F ret, vinkel E er $50°$, og længden af siden EF er $3{,}6$.

Spørgsmål: Bestem længden af siden DE.

Svar: Først tegner vi en skitse af trekanten.



Da trekanten er retvinklet og vinkel E er spids, er

$$\cos(E) \;=\; \frac{E'\,s\ hosliggende\ katete}{hypotenusen}$$

dvs.

$$\cos(50°) \;=\; \frac{3{,}6}{f}\ .$$

Vi taster denne ligning og får den løst mht. f. Vi får

$$f \;=\; 5{,}60061$$

dvs.

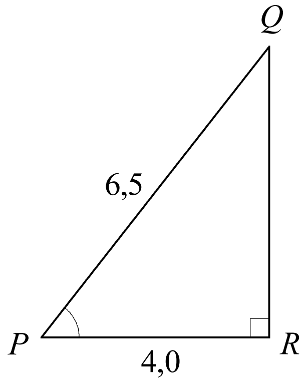
længden af siden DE er $\underline{\underline{5{,}6}}$.

Eksempel 4.18 *En katete og hypotenusen er kendt. Udregn katetens hosliggende spidse vinkel.*

I trekant PQR er vinkel R ret, længden af siden PQ er $6{,}5$, og længden af siden PR er $4{,}0$.

Spørgsmål: Bestem vinkel P.

Svar: Først tegner vi en skitse af trekanten.



Da trekanten er retvinklet og vinkel P er spids, er

$$\cos(P) = \frac{4{,}0}{6{,}5}$$

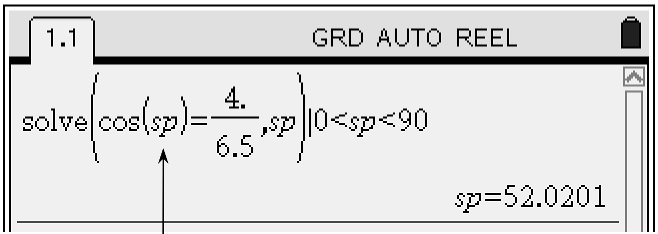
Vi taster denne ligning og får den løst mht. P for P mellem $0°$ og $90°$. Vi får

$$P = 52{,}0201°$$

dvs.

vinkel P er $\underline{\underline{52°}}$.

Bemærkning 1: På skærmen kan indtastningen se sådan ud:



På lommeregneren kan vi skrive *sp* i stedet for stort P.

Bemærkning 2: Ovenfor bruger vi P i to forskellige betydninger. Når vi siger "trekant PQR", så er P et punkt, og når vi skriver $\cos(P)$, så er P et gradtal. Der er tradition for at det bogstav der betegner punktet, også bruges til at betegne gradtallet.

Øvelse 4.19

I trekant EFG er vinkel F ret, længden af siden EF er 31, og længden af siden EG er 64.

Udregn gradtallet for vinkel E.

Øvelse 4.20

Om trekant KLM er oplyst at gradtallet for vinkel K er $90°$, at gradtallet for vinkel L er $26°$, og at hypotenusens længde er 49.

Udregn længden af kateten KL.

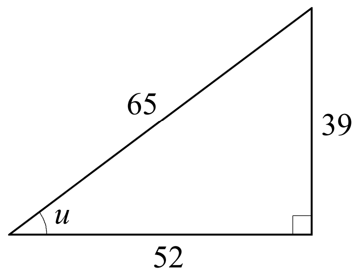
Afsnit 5. Sinus.

DEFINITION 5.1 *Modstående katete*

Forestil dig at du sidder i den spidse vinkel u og holder i de to sider.

Der er én side tilbage som du ikke holder i.

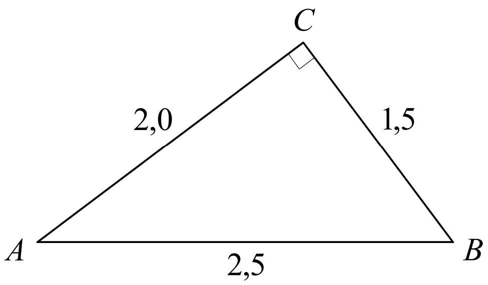
Denne side kaldes <u>vinklens modstående katete</u>.

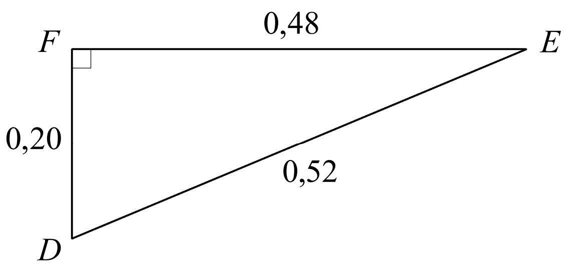


I den viste trekant gælder altså:

Vinkel u's modstående katete har længden 39.

<u>Øvelse 5.2</u>





Brug metoden fra definition 5.1 til at finde svarene på følgende spørgsmål:

(a) Vinkel A's modstående katete har længden __________ .

(b) Vinkel D's modstående katete har længden __________ .

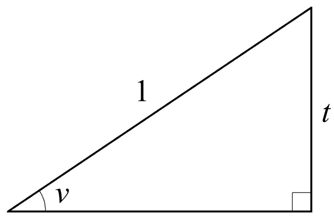
(c) Vinkel B's modstående katete har længden __________ .

(d) Vinkel E's modstående katete har længden __________ .

DEFINITION 5.3 *Sinus*

Når vi trykker på lommeregnerens **sin**-tast, får vi udført en udregning som vi skal bruge i opgaver om trekanter.

Figuren viser en retvinklet trekant hvor <u>hypotenusen er 1</u>.



Hvis vi udregner: <u>sinus</u> til gradtallet for en af de spidse vinkler,
så får vi: længden af denne vinkels <u>modstående katete</u> .
Vi skriver: $\sin(v) = t$.

Lommeregneren (eller matematikprogrammet) **<u>skal</u>** være indstillet til at regne med enheden grader.

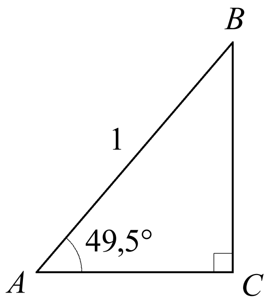
Eksempel 5.4

På lommeregner udregner vi at

$$\sin(49{,}5°) = 0{,}760406 \ .$$

Dette betyder at

længden af siden BC er $\underline{\underline{0{,}760}}$.



Eksempel 5.5

På figuren ser vi at

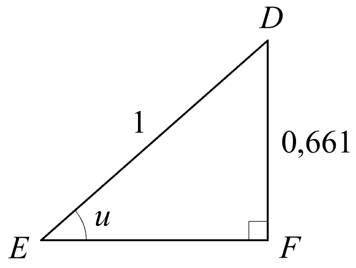
$$\sin(u) = 0{,}661 \ .$$

Vi taster denne ligning og får den løst mht. u for u mellem $0°$ og $90°$. Vi får:

$$u = 41{,}3762° \ .$$

Dette betyder at

vinklen E er $\underline{\underline{41{,}4°}}$.



Bemærkning 1

I ligningen

$$\sin(u) = 0{,}661$$

er der mange tal der passer på u's plads.

Vi skal kun bruge den løsning der ligger mellem $0°$ og $90°$.

På skærmen kan indtastningen se sådan ud:

Bemærkning 2

Vi kan finde vinklen uden at bruge solve. I stedet kan vi bruge

omvendt sinus

som skrives

$$\sin^{-1}$$

Dette symbol kan vi få frem ved hjælp af $\sin^{-1}$-tasten eller ved at skrive symbolet.

Hvis vi skriver symbolet, skal vi vælge $^{-1}$ i symbolmenuen.

Symbolet $\sin^{-1}$ er ikke en sædvanlig potens. Det hævede -1 betyder "omvendt" .

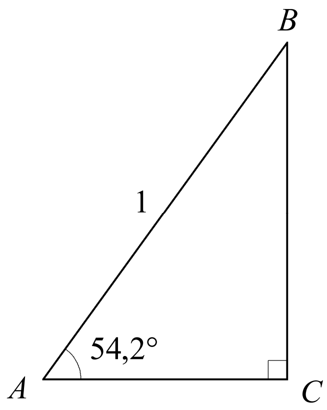
På lommeregner udregner vi at

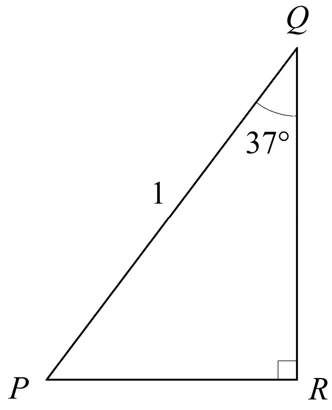
$$\sin^{-1}(0{,}661) = 41{,}3762° \ .$$

Øvelse 5.6

Nedenfor er vist to trekanter

Brug sinus til at udregne længden af hver af siderne BC og PR.

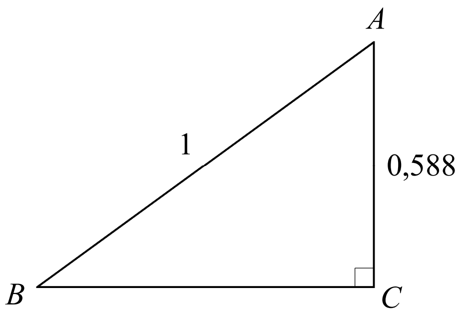


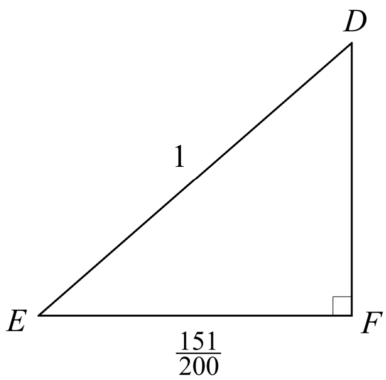


Øvelse 5.7

Nedenfor er vist to trekanter.

Udregn vinklerne B og D.





Øvelse 5.8

I trekant ABC er vinkel C ret, vinkel A er $33{,}6°$, længden af AB er 1, og længden af siden BC er $\frac{q}{3}$, hvor q er et tal der ikke er oplyst.

Skitsér trekanten.

Udregn tallet q.

Øvelse 5.9

I trekant DEF er vinkel F ret, vinkel D er $34{,}4°$, længden af DE er 1, og længden af siden EF er $\frac{5}{p}$, hvor p er et tal der ikke er oplyst.

Skitsér trekanten

Udregn tallet p.

SÆTNING 5.10 *sinus*

Om en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:

$$\sin(\mathit{vinklen}) = \frac{\mathit{vinklens\ modstående\ katete}}{\mathit{hypotenusen}} \quad .$$

<u>Øvelse 5.11</u> *Bevis for 5.10*

(1) Tegn en retvinklet trekant T hvor du i en af de spidse vinkler skriver v. Ved denne vinkels modstående katete skal du skrive q, og ved hypotenusen skal du skrive p.

(2) Tegn en ny trekant S med samme vinkler som T og med hypotenuse 1 (skriv dette tal ved hypotenusen).

(3) I trekant S er hypotenusen 1, så v's modstående katete har længden $\sin(v)$. Skriv $\sin(v)$ ved denne katete.

(4) De to trekanter er ensvinklede, så der er en skalafaktor. Brug de to hypotenuser til at finde den skalafaktor som vi skal gange siderne i S med for at få siderne i T.

(5) Hvordan kan vi udregne siden $\sin(v)$ ved hjælp af skalafaktoren?

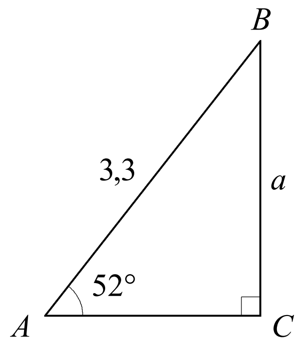
(6) Hvorfor beviser dette at sætning 5.10 er rigtig?

<u>Eksempel 5.12</u>

I trekant ABC er vinkel C ret, vinkel A er $52°$, og længden af siden AB er $3{,}3$.

<u>Spørgsmål:</u> Udregn længden af siden BC.

<u>Svar:</u> Først tegner vi en skitse af trekanten.



Da trekanten er retvinklet og vinkel A er spids, er

$$\sin(A) = \frac{A'\mathit{s\ modstående\ katete}}{\mathit{hypotenusen}}$$

dvs.

$$\sin(52°) = \frac{a}{3{,}3} \quad .$$

Vi taster denne ligning og får den løst mht. a. Vi får

$$a = 2{,}60044$$

dvs.

længden af BC er $\underline{\underline{2{,}6}}$.

<u>Øvelse 5.13</u>

I trekant RST er vinkel S ret, vinkel R er $25°$, og længden af siden ST er $1{,}1$.

Udregn længden af siden RT.

<u>Øvelse 5.14</u>

I trekant DEF er vinkel D ret, længden af siden DE er $3{,}5$, og længden af siden EF er $6{,}1$.

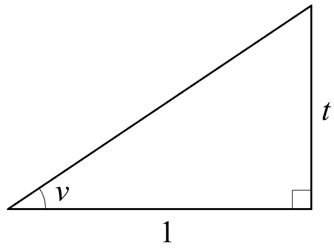
Udregn gradtallet for vinkel F.

Afsnit 6. Tangens.

DEFINITION 6.1 *Tangens*

Når vi trykker på lommeregnerens tan-tast, får vi udført en udregning som vi skal bruge i opgaver om trekanter.

Figuren viser en retvinklet trekant hvor v's hosliggende katete er 1.



Hvis vi udregner: tangens til gradtallet v,
så får vi: længden af v's modstående katete .
Vi skriver: $\tan(v) = t$.

Lommeregneren (eller matematikprogrammet) **skal** være indstillet til at regne med enheden grader.

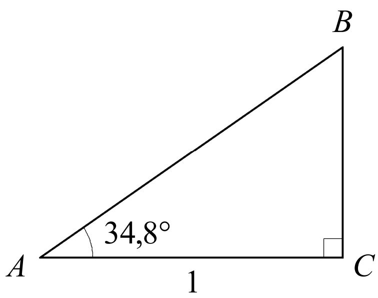
Eksempel 6.2

På lommeregner udregner vi at

$$\tan(34{,}8°) = 0{,}695018 \ .$$

Dette betyder at

længden af siden BC er $\underline{\underline{0{,}695}}$.



Eksempel 6.3

På figuren ser vi at

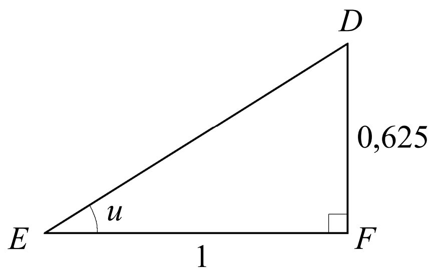
$$\tan(u) = 0{,}625 \ .$$

Vi taster denne ligning og får den løst mht. u for u mellem $0°$ og $90°$. Vi får:

$$u = 32{,}0054° \ .$$

Dette betyder at

vinklen E er $\underline{\underline{32{,}0°}}$.



Bemærkning

Vi kan finde vinklen uden at bruge solve. I stedet kan vi bruge "omvendt tangens" som skrives $\tan^{-1}$. På lommeregner udregner vi

$$\tan^{-1}(0{,}625) = 32{,}0054° .$$

Øvelse 6.4

I trekant ABC er vinkel C ret, vinkel A er $28{,}6°$, længden af AC er 1, og længden af siden BC er $\frac{6}{p}$, hvor p er et tal der ikke er oplyst.

Skitsér trekanten, og bestem tallet p .

SÆTNING 6.5 *tangens*

Om en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:

$$\tan(vinklen) = \frac{vinklens\ modstående\ katete}{vinklens\ hosliggende\ katete} .$$

Øvelse 6.6 *Bevis for 6.5*

(1) Tegn en retvinklet trekant T hvor du i en af de spidse vinkler skriver v. Ved v's modstående katete skal du skrive q, og ved v's hosliggende katete skal du skrive p.

(2) Tegn en ny trekant S hvor vinklerne er de samme som i T, og hvor v's hosliggende katete er 1 (skriv dette tal ved kateten).

(3) I trekant S er v's hosliggende katete 1, så v's modstående katete har længden $\tan(v)$. Skriv $\tan(v)$ ved denne katete.

(4) De to trekanter er ensvinklede, så der er en skalafaktor. Brug de to hosliggende kateter til at finde den skalafaktor som vi skal gange siderne i S med for at få siderne i T.

(5) Hvordan kan vi udregne siden $\tan(v)$ ved hjælp af skalafaktoren?

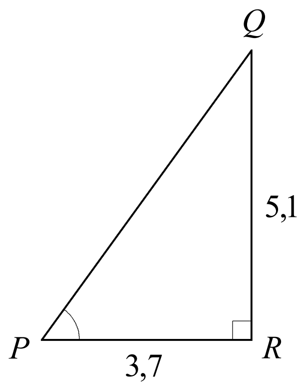
(6) Hvorfor beviser dette at sætning 6.5 er rigtig?

Eksempel 6.7

I trekant PQR er vinkel R ret, længden af siden PR er 3,7 , og længden af siden QR er 5,1 .

Spørgsmål: Udregn gradtallet for vinkel P.

Svar: Først tegner vi en skitse af trekanten.



Da trekanten er retvinklet og vinkel P er spids, er

$$\tan(P) = \frac{P'\,s\ modstående\ katete}{P'\,s\ hosliggende\ katete}$$

dvs.

$$\tan(P) = \frac{5{,}1}{3{,}7} .$$

Vi taster denne ligning og får den løst mht. P for P mellem $0°$ og $90°$. Vi får:

$$P = 54{,}0395°$$

dvs.

vinkel P er $\underline{\underline{54°}}$.

Øvelse 6.8

I trekant HIJ er vinkel I ret, vinkel H er $18°$, og længden af siden HI er 7,7 .

Udregn længden af siden IJ.

Øvelse 6.9

I trekant ABC er vinkel C ret, vinkel A er $36°$, og længden af siden BC er 8,0 .

Udregn længden af siden AC.

Afsnit 7. Beregning af sider og vinkler i retvinklet trekant.

OVERSIGT 7.1 *Formler til beregning af sider og vinkler i retvinklet trekant*

I en retvinklet trekant gælder

$p^2 + q^2 = r^2$, p og q er kateterne, r er hypotenusen .

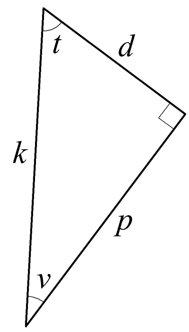
For en spids vinkel i en retvinklet trekant gælder:

$$\cos(\textit{vinklen}) = \frac{\textit{vinklens hosliggende katete}}{\textit{hypotenusen}}$$

$$\sin(\textit{vinklen}) = \frac{\textit{vinklens modstående katete}}{\textit{hypotenusen}}$$

$$\tan(\textit{vinklen}) = \frac{\textit{vinklens modstående katete}}{\textit{vinklens hosliggende katete}}$$

<u>**Øvelse 7.2**</u> *Formler til beregning af sider og vinkler i retvinklet trekant.*



(a) Forestil dig at du sidder i vinkel v og holder i de to vinkelben.
Hvilke af siderne d, k og p holder du i?

(b) Hvilke af siderne d, k og p er hosliggende til vinkel v?

(c) Hvilke to af siderne d, k og p danner en ret vinkel?

(d) Hvilke af siderne d, k og p er kateter?

(e) Hvilken af siderne d, k og p er hosliggende katete til v?

(f) Hvilken af siderne d, k og p er modstående katete til v?

(g) Hvilken af siderne d, k og p er hypotenuse?

(h) Hvilken af siderne d, k og p er hosliggende katete til t?

(i) Hvilken af siderne d, k og p er modstående katete til t?

(j) Når vi siger at tre størrelser <u>indgår</u> i en opgave om retvinklet trekant, så mener vi at vi skal finde én af dem og kender de to andre.
Angiv i hvert af følgende tilfælde om der skal bruges cos, sin, tan eller pyth (Pythagoras' sætning):
(1) Der indgår en spids vinkel og denne vinkels modstående katete samt hypotenusen.
(2) Der indgår hypotenusen og de to kateter.
(3) Der indgår en spids vinkel og de to kateter.
(4) Der indgår en spids vinkel og denne vinkels hosliggende katete samt hypotenusen.

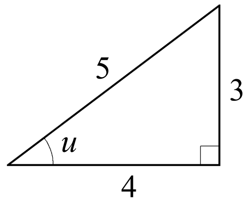
(k) Angiv i hvert af følgende tilfælde om der skal bruges cos, sin, tan eller pyth.:
(5) Vi skal finde d og kender k og t.
(6) Vi skal finde d og kender k og v.
(7) Vi skal finde d og kender k og p.
(8) Vi skal finde d og kender p og t.
(9) Vi skal finde d og kender p og v.
(10) Vi skal finde p og kender d og v.
(11) Vi skal finde v og kender p og d.
(12) Vi skal finde v og kender k og p.
(13) Vi skal finde t og kender k og p.
(14) Vi skal finde v og kender k og d.

OVERSIGT 7.3

De 11 opgavetyper med sider og vinkler i retvinklet trekant

I trekanten til højre er siderne med længde 3 og 4 **kateter**, fordi vinklen mellem dem er ret. Siden med længde 5 er **hypotenuse**, fordi den ikke er en af kateterne.

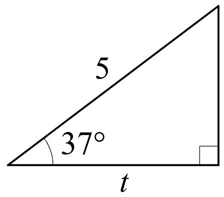
Forestil dig at du sidder i den spidse vinkel u og holder i de to vinkelben. Den katete du holder i, er **vinklens hosliggende katete**. Den anden katete er **vinklens modstående katete**.



Type 1
Givet: Hypotenusen og en spids vinkel.
Find: Vinklens hosliggende katete.

Løs $\cos(37°) = \dfrac{t}{5}$ mht. t .

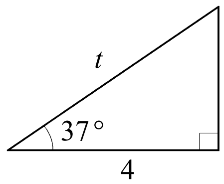
vinklens hosliggende katete
hypotenusen
spids vinkel



Type 2
Givet: En spids vinkel og dens hosliggende katete.
Find: Hypotenusen.

Løs $\cos(37°) = \dfrac{4}{t}$ mht. t .

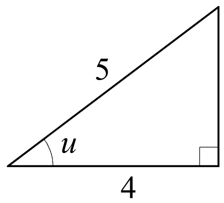
vinklens hosliggende katete
hypotenusen
spids vinkel



Type 3
Givet: Hypotenusen og en katete.
Find: Vinklen mellem disse.

Løs $\cos(u) = \dfrac{4}{5}$ mht. u for $0° < u < 90°$.

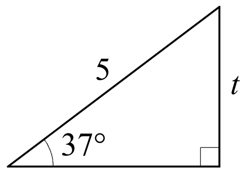
vinklens hosliggende katete
hypotenusen
spids vinkel



Type 4
Givet: Hypotenusen og en spids vinkel.
Find: Vinklens modstående katete.

Løs $\sin(37°) = \dfrac{t}{5}$ mht. t .

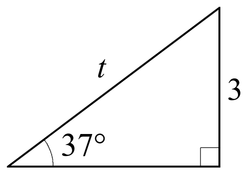
vinklens modstående katete
hypotenusen
spids vinkel



Type 5
Givet: En spids vinkel og dens modstående katete.
Find: Hypotenusen.

Løs $\sin(37°) = \dfrac{3}{t}$ mht. t .

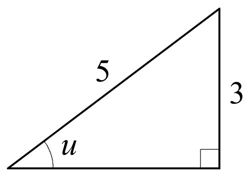
vinklens modstående katete
hypotenusen
spids vinkel



Type 6
Givet: Hypotenusen og en katete.
Find: Katetens modstående vinkel.

Løs $\sin(u) = \dfrac{3}{5}$ mht. u for $0° < u < 90°$.

vinklens modstående katete
hypotenusen
spids vinkel



VEND!

Type 7

Givet: En spids vinkel og dens hosliggende katete.

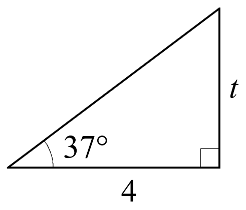
Find: Vinklens modstående katete.

Løs $\tan(37°) = \dfrac{t}{4}$ mht. t .

vinklens modstående katete

vinklens hosliggende katete

spids vinkel



Type 8

Givet: En spids vinkel og dens modstående katete.

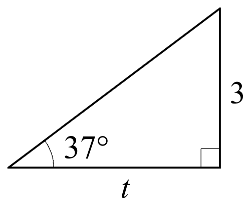
Find: Vinklens hosliggende katete.

Løs $\tan(37°) = \dfrac{3}{t}$ mht. t .

vinklens modstående katete

vinklens hosliggende katete

spids vinkel



Type 9

Givet: De to kateter.

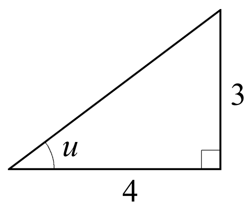
Find: En spids vinkel.

Løs $\tan(u) = \dfrac{3}{4}$ mht. u for $0° < u < 90°$.

vinklens modstående katete

vinklens hosliggende katete

spids vinkel



Type 10

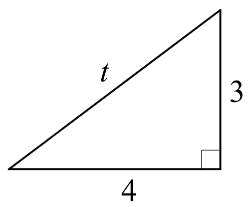
Givet: De to kateter.

Find: Hypotenusen.

Løs $3^2 + 4^2 = t^2$ mht. t for $0 < t$.

hypotenuse

kateter



Type 11

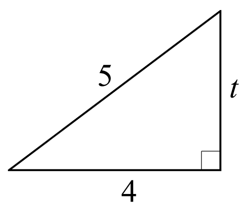
Givet: Hypotenusen og en katete.

Find: Den anden katete.

Løs $t^2 + 4^2 = 5^2$ mht. t for $0 < t$.

hypotenuse

kateter



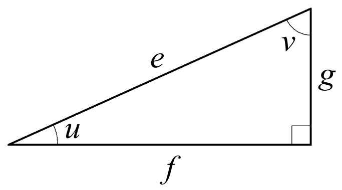
Øvelse 7.4

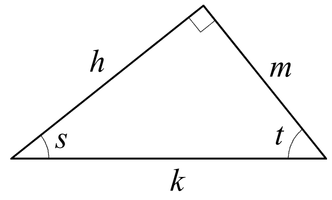
I denne opgave skal du bruge oplysningerne i Oversigt 7.3 .

I hver af opgaverne 1-20 skal du:

– skrive typen, dvs. et af tallene 1, 2, ..., 11
– skrive en ligning med opgavens tre talbetegnelser.

Du skal ikke løse opgaven.





1. Udregn e når u og f er oplyst.
2. Udregn f når u og e er oplyst.
3. Udregn g når u og e er oplyst.
4. Udregn g når v og e er oplyst.
5. Udregn f når e og g er oplyst.
6. Udregn e når f og g er oplyst.
7. Udregn g når v og f er oplyst.
8. Udregn g når u og f er oplyst.
9. Udregn u når e og g er oplyst.
10. Udregn v når e og g er oplyst.
11. Udregn s når h og m er oplyst.
12. Udregn s når h og k er oplyst.
13. Udregn t når h og k er oplyst.
14. Udregn h når t og m er oplyst.
15. Udregn m når t og h er oplyst.
16. Udregn m når s og h er oplyst.
17. Udregn m når h og k er oplyst.
18. Udregn k når s og m er oplyst.
19. Udregn k når t og h er oplyst.
20. Udregn k når s og h er oplyst.

Afsnit 8. Opgaver.

Opgave 8.1

I trekant ABC er $\angle C = 90°$, $|BC| = 6$ og $|AB| = 6{,}5$.

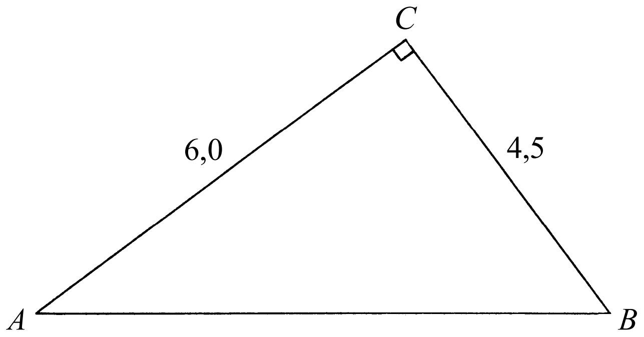
a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem $|AC|$.

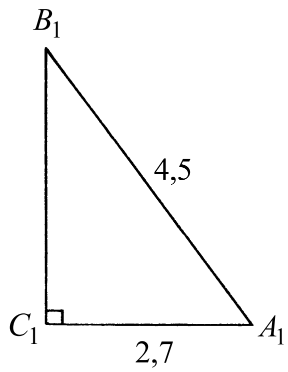
Opgave 8.2

I trekant DEF er $\angle F = 90°$, $|EF| = 4{,}8$ og $|DF| = 2$.

a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem $|DE|$.

Opgave 8.3





Trekanterne ABC og $A_1B_1C_1$ er retvinklede.

a) Bestem arealet af trekant ABC.

b) Bestem arealet af trekant $A_1B_1C_1$.

Opgave 8.4

I trekant GHI er $\angle I = 90°$, $|GI| = 2$ og $|HI| = 1{,}5$.

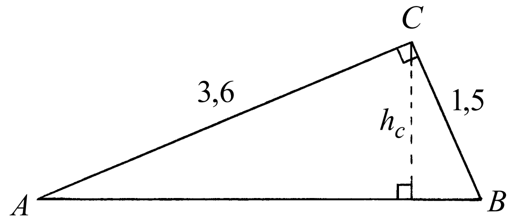
a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem arealet.

Opgave 8.5

I trekant JKL er $\angle L = 90°$, $|JK| = 3$ og $|KL| = 1{,}8$.

a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem arealet.

Opgave 8.6

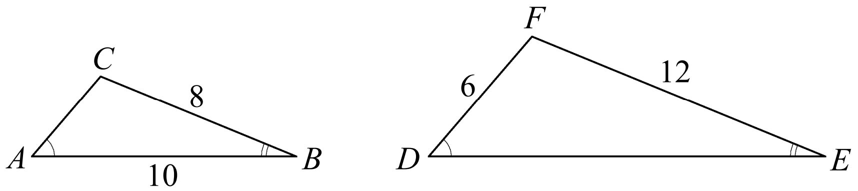


Figuren viser trekant ABC hvor vinkel C er ret, samt højden h_c fra C på siden AB.

a) Bestem $|AB|$.

b) Bestem arealet af trekant ABC, og bestem derefter længden af h_c.

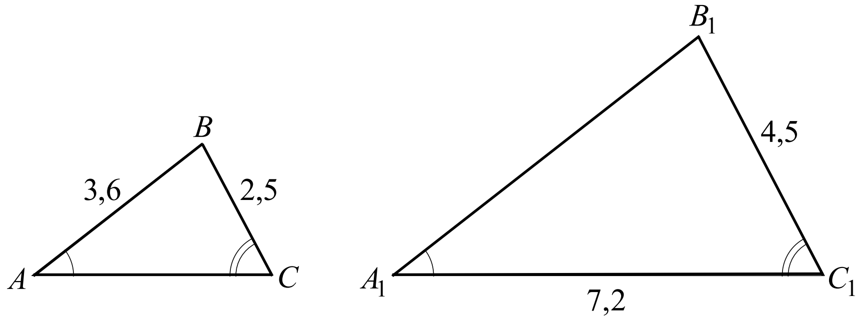
Opgave 8.7



Figuren viser to ensvinklede trekanter ABC og DEF.

a) Bestem længden af hver af siderne DE og AC.

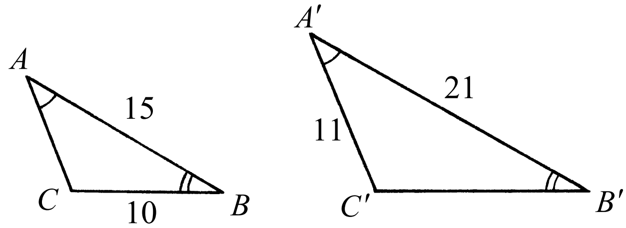
Opgave 8.8



Trekanterne ABC og $A_1B_1C_1$ er ensvinklede. Nogle af trekanternes mål fremgår af figuren.

a) Bestem længden af siden A_1B_1 og længden af siden AC.

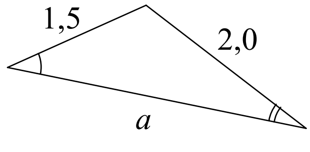
Opgave 8.9

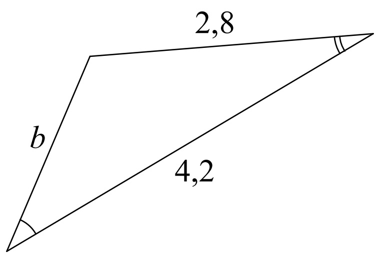


Trekanterne ABC og $A'B'C'$ er ensvinklede. Nogle af trekanternes mål fremgår af figuren.

a) Bestem længden af siden $B'C'$ og længden af siden AC.

Opgave 8.10





På billedet ses to ensvinklede trekanter.

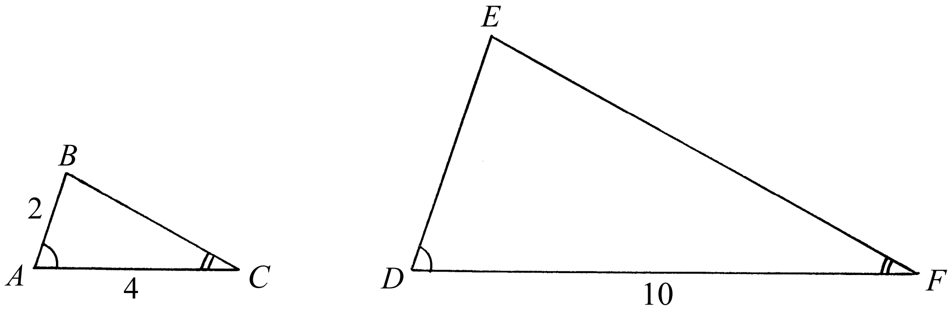
a) Beregn a og b.

Opgave 8.11

I de ensvinklede trekanter ABC og $A'B'C'$ er $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ og $\angle C = \angle C'$.
Desuden er $|AB| = 36$, $|BC| = 24$, $|A'B'| = 45$ og $|A'C'| = 65$.

a) Tegn en skitse af trekanterne, og bestem $|B'C'|$ og $|AC|$.

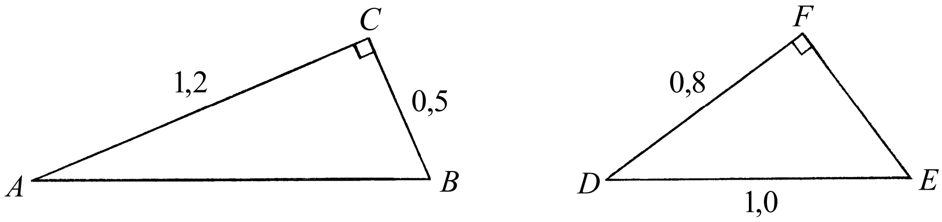
Opgave 8.12



Trekanterne ABC og DEF er ensvinklede.

a) Bestem længden af siden DE .

Opgave 8.13

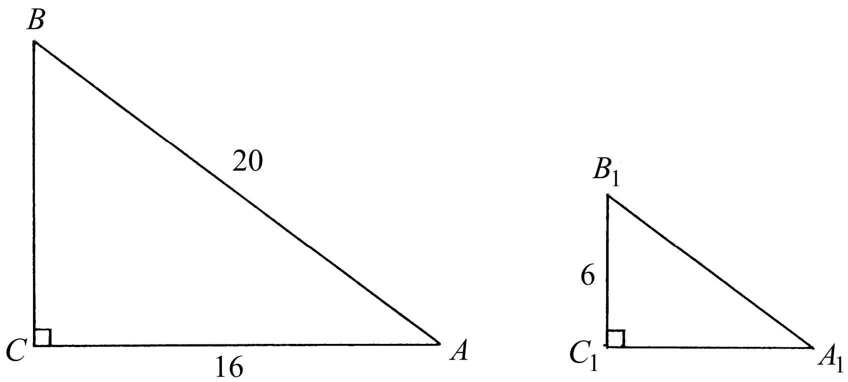


Trekanterne ABC og DEF er retvinklede.

a) Bestem længden af siden AB .

b) Bestem længden af siden EF .

Opgave 8.14

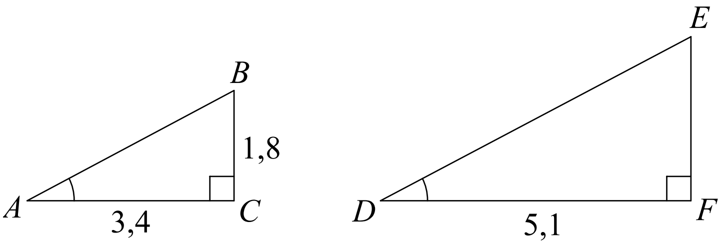


Trekanterne ABC og $A_1B_1C_1$ er retvinklede og ensvinklede.

a) Bestem $|BC|$.

b) Bestem $|A_1B_1|$.

Opgave 8.15



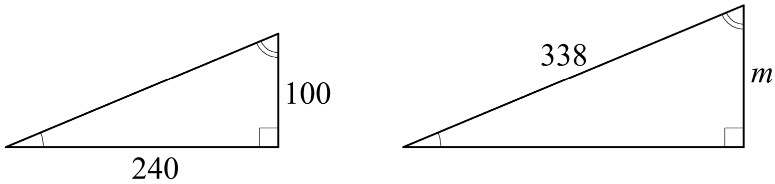
De to retvinklede trekanter ABC og DEF er ensvinklede.

a) Bestem $|AB|$ og $|EF|$.

Opgave 8.16

Trekanterne er ensvinklede og retvinklede.

a) Bestem siden m .



Opgave 8.17

I en retvinklet trekant ABC er vinkel C ret, længden af siden a er 6, og længden af siden c er 7.

a) Tegn en skitse af trekant ABC, og bestem vinkel B.

Opgave 8.18

I trekant ABC er vinkel C ret, længden af siden AC er $15{,}2$, og vinkel A er $47{,}5°$.

a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem længden af siden AB.

Opgave 8.19

I trekant ABC er vinkel C ret. Vinkel B er $39{,}5°$, og længden af BC er $14{,}2$.

a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem længden af AB.

Opgave 8.20

I trekant QRS er $\angle S = 90°$, $|QR| = 62$ og $|QS| = 15$.

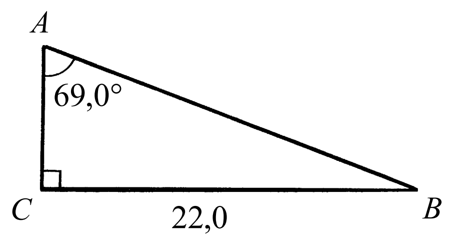
a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem $\angle Q$.

Opgave 8.21

I en retvinklet trekant ABC er vinkel C ret, længden af siden c er $8{,}25$, og vinkel B er $22{,}3°$.

a) Tegn en skitse af trekant ABC, og bestem længden af siden b.

Opgave 8.22



Figuren viser en trekant ABC hvor vinklen C er ret.

a) Bestem $|AB|$.

Opgave 8.23

I en retvinklet trekant ABC er vinkel C ret, længden af siden BC er 348 og vinkel A er $63{,}6°$.

a) Tegn en skitse af trekant ABC, og bestem længden af hypotenusen AB.

Opgave 8.24

I trekant JKL er $\angle L = 90°$, $\angle J = 49°$ og $|KL| = 4$.

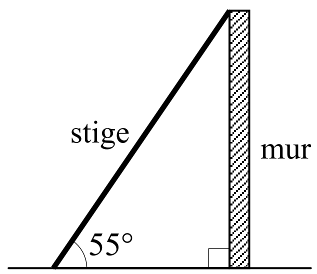
a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem $|JK|$.

Opgave 8.25

I trekant MNP er $\angle P = 90°$, $\angle M = 55°$ og $|MN| = 11$.

a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem $|NP|$.

Opgave 8.26

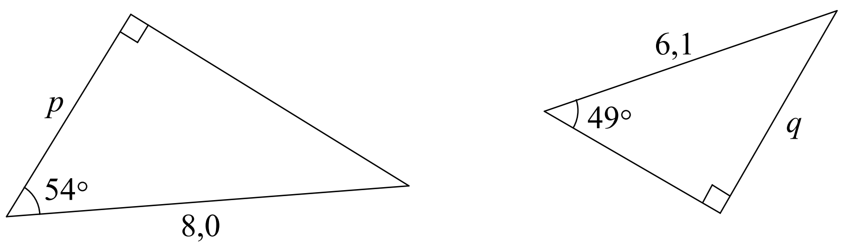


Figuren viser en stige der når op til toppen af en 3 m høj mur. Stigen danner en vinkel på $55°$ med jordoverfladen.

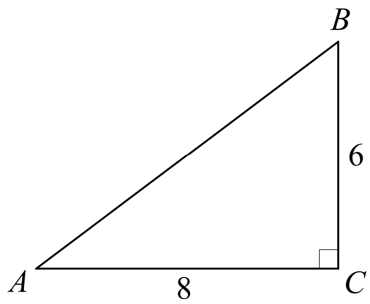
a) Bestem længden af stigen.

Opgave 8.27

a) Beregn siderne p og q i de viste trekanter.



Opgave 8.28



Figuren viser en retvinklet trekant.

a) Bestem længden af siden AB, og bestem vinkel A.

Opgave 8.29

I en retvinklet trekant PQR er vinkel Q ret, længden af siden p er 15, og længden af siden r er 10.

a) Tegn en skitse af trekant PQR, og bestem vinkel P.

Opgave 8.30

I en retvinklet trekant PQR er vinkel Q ret, længden af siden p er 12, og vinkel P er $55°$.

a) Tegn en skitse af trekant PQR, og bestem længden af siden r.

Opgave 8.31

I trekant ABC er $\angle C = 90°$, $\angle A = 31°$ og $|AC| = 5$.

a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem $|BC|$.

Opgave 8.32

I trekant DEF er $\angle F = 90°$, $\angle D = 81°$ og $|EF| = 12$.

a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem $|DF|$.

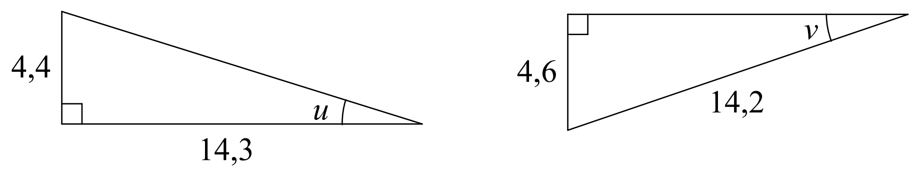
Opgave 8.33

I trekant GHI er $\angle I = 90°$, $|GI| = 14$ og $|HI| = 20$.

a) Tegn en skitse af trekanten, og bestem $\angle G$.

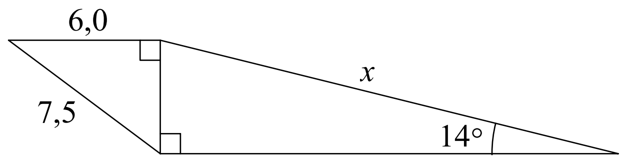
Opgave 8.34

a) Beregn vinklerne u og v i de viste trekanter.

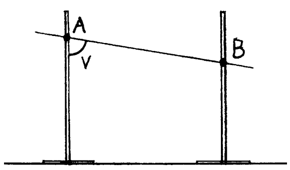


Opgave 8.35

a) Beregn x på den viste figur.



Opgave 8.36

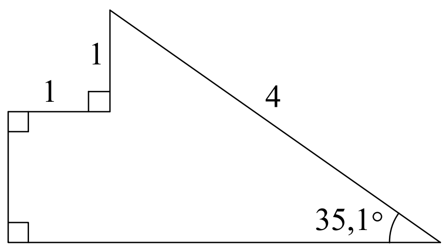


Figuren viser to lodrette stolper og en skrå liste. Listen er fastgjort til stolperne i punkterne *A* og *B*. Punktet *A* er 1,5 meter over gulvet, og punktet *B* er 1,2 meter over gulvet. Afstanden mellem stolperne er 1,8 meter.

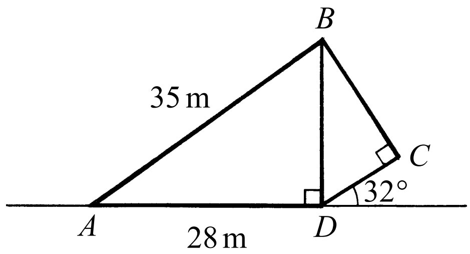
a) Bestem vinklen *v* mellem den venstre stolpe og den skrå liste.

Opgave 8.37

a) Beregn arealet af den viste figur.



Opgave 8.38

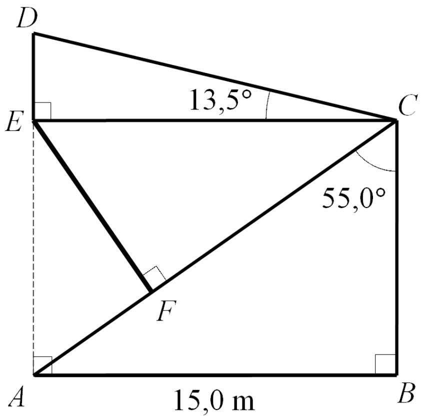


Figuren viser tværsnittet af et kunstmuseum. Tværsnittet er en firkant $ABCD$ hvor vinkel C er ret, og diagonalen BD står vinkelret på siden AD.

a) Bestem længden af BD, og bestem vinkel A.

b) Bestem længden af DC.

Opgave 8.39



Figuren viser en tribune i tværsnit. Stangen EF holder taget. En person har målt de tal der står på figuren.

a) Bestem $|BC|$.

b) Bestem $|DE|$.

c) Bestem $|EF|$.

Opgave 8.40

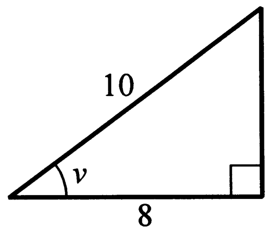
I en retvinklet trekant ABC er vinkel C ret, længden af siden b er 4, og trekantens areal er 10.

a) Bestem vinkel A.

Opgave 8.41

Vinklen v er fastlagt ved figuren.

a) Bestem uden hjælpemidler $\cos v$ og $\tan v$.

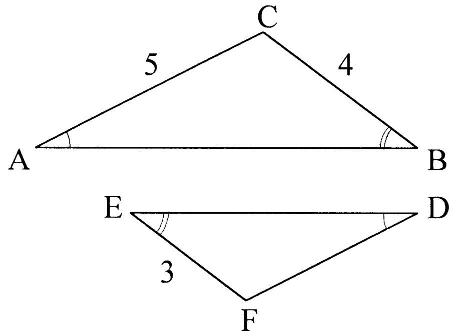


Opgave 8.42

I trekanterne ABC og $A'B'C'$ er $\angle A = \angle A'$ og $\angle B = \angle B'$. Endvidere er $|AC| = 3$ og $|A'C'| = 12$.
I trekant ABC er længden af højden fra vinkel B lig 2.

a) Bestem arealet af trekant $A'B'C'$.

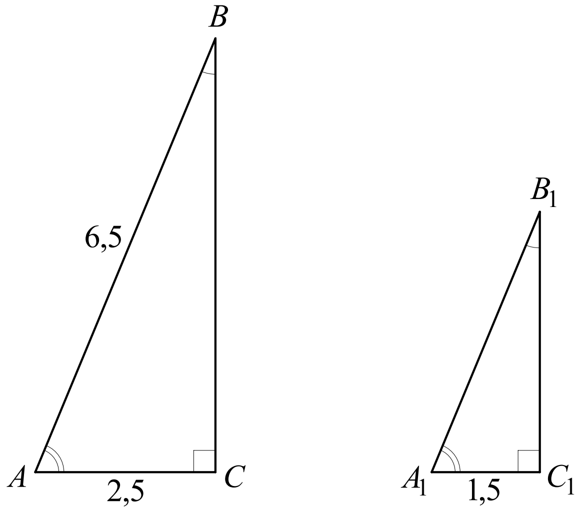
Opgave 8.43



Figuren viser to ensvinklede trekanter ABC og DEF. Nogle af sidelængderne er givet på figuren.

a) Bestem $|DF|$.

Opgave 8.44



Trekanterne ABC og $A_1B_1C_1$ er retvinklede og ensvinklede.

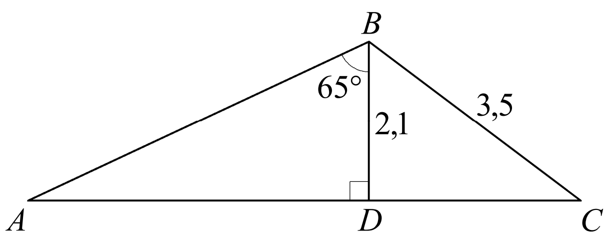
a) Bestem $|A_1B_1|$.

b) Bestem arealet af trekant ABC.

c) Bestem vinkel B_1.

Opgave 8.45

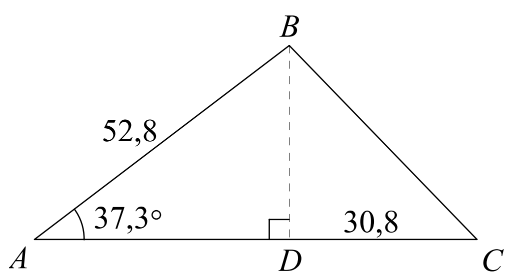
a) Bestem $|AC|$.



Opgave 8.46

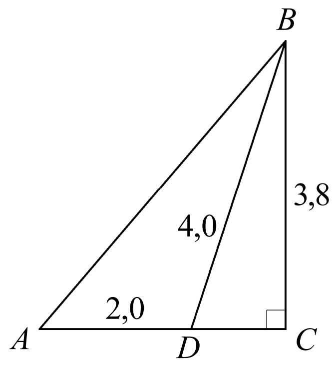
a) Bestem længden af BD.

b) Bestem arealet af trekant ABC.



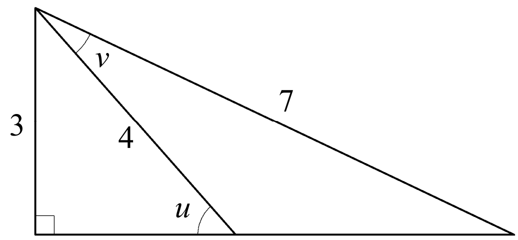
Opgave 8.47

I trekant ABC er $\angle C$ ret. På siden AC ligger et punkt D.
Det er oplyst at $|AD| = 2{,}0$, $|BC| = 3{,}8$ og $|BD| = 4{,}0$.



a) Bestem $|CD|$.
Bestem $\angle B$ i trekant ABC.

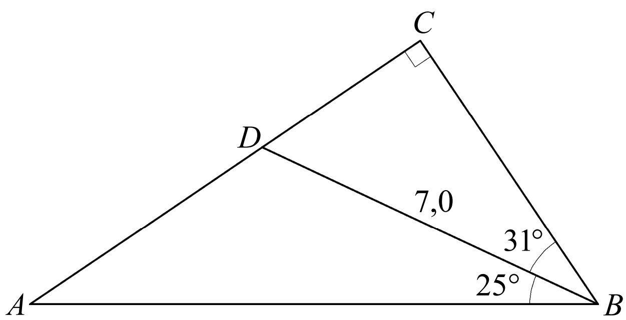
Opgave 8.48



a) Bestem vinkel u på den viste figur.

b) Bestem vinkel v på den viste figur.

Opgave 8.49



På figuren er angivet nogle af målene.

a) Bestem længden af AC.

Opgave 8.50

I trekant PQR er $\angle R = 90°$, $\angle P = 33°$ og $|PQ| = 1{,}4$. Midtpunktet af PR hedder T.

a) Tegn en skitse, og bestem $\angle T$ i trekant QRT.

Opgave 8.51

I firkant $ABCD$ står diagonalen BD vinkelret på både AB og DC. Diagonalen BD har længden 48, siden AB har længden 36, og siden BC har længden 52.

a) Tegn en skitse af firkanten, og bestem vinklerne A og C.

b) Bestem firkantens omkreds.