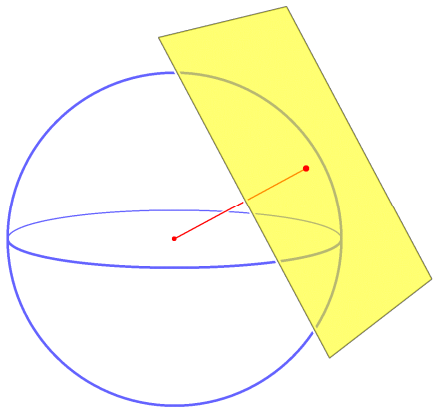
Vektorer
og
koordinatgeometri

for gymnasiet



2012 Karsten Juul

Vektorer og koordinatgeometri for gymnasiet
© 2012 Karsten Juul

Dette hæfte kan downloades fra mat1.dk/noter.htm
Hæftet må bruges i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til kj@mat1.dk som oplyser at dette hæfte benyttes (skriv filnavn), og oplyser om hold, niveau, lærer og skole.

VEKTORER

1. Koordinater til punkt i planen 3
2. Koordinater til punkt i rummet 3
3. Vektor: Definition og sprogbrug 4
4. Vektor: Koordinater 4
5. Koordinater til vektors endepunkt 5
6. Nulvektor 5
7. Længde af vektor 5
8. Modsat vektor 6
9. Tværvektor (plangeometri) 6
10. Tal gange vektor 7
11. Vektor plus vektor 7
12. Vektor minus vektor 8
13. Projektion 8
14. Prikprodukt 8
15. Prikprodukt: Vinkelret? 9
16. Prikprodukt: Vinkel mellem vektorer 9
17. Prikprodukt: Projektion af vektor 9
18. Determinant (plangeometri) 10
19. Determinant: Parallel? (plangeometri) 10
20. Determinant: Areal (plangeometri) 10
21. Krydsprodukt (rumgeometri) 11
22. Krydsprodukt: Parallel? (rumgeometri) 11
23. Krydsprodukt: Areal (rumgeometri) 11
24. Krydsprodukt: Vinkelret vektor (rumgeometri) 12

KOORDINATGEOMETRI

25. Parameterfremstilling for linje 12
26. Ligning for linje (plangeometri) 13
27. Ligning for plan (rumgeometri) 13
28. Ligning for cirkel (plangeometri) 14
29. Ligning for kugle (rumgeometri) 15
30. Afstand fra punkt til linje (plangeometri) 15
31. Afstand fra punkt til plan (rumgeometri) 15
32. Vinkel mellem linjer 15
33. Vinkel mellem planer (rumgeometri) 16
34. Vinkel mellem sideflader (rumgeometri) 16
35. Vinkel mellem linje og plan (rumgeometri) 16
36. Vilkårligt punkt på linje 16
37. Skæring mellem to linjer l og m 16
38. Skæring mellem linje og cirkel (plangeometri) 17
39. Skæring mellem linje og kugle (rumgeometri) 17
40. Skæring mellem linje og plan (rumgeometri) 17
41. Projektion af punkt på linje (plangeometri) 17
42. Projektion af punkt på plan (rumgeometri) 18
43. Tangent til cirkel plangeometri) 18
44. Tangentplan til kugle (rumgeometri) 18

BEVISER

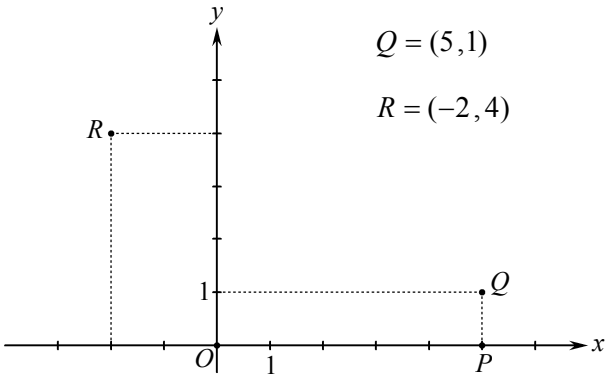
45. Skrivning af formler 19
46. Bevis for formler til automatisk tegning af pil.....19
47. Automatisk tegning af pil på Nspire 20
48. Bevis for at vi må prikke ind i en parentes 20
49. Bevis for formel 49a 21
50. Bevis for at vi får nul når vi prikker med nulvektor 21
51. Bevis for at vinkelrette vektorer har skalarprodukt nul 21
52. Bevis for formlen for projektion af vektor.....21
53. Bevis for parameterfremstilling for en linje.....22
54. Bevis for ligning for linje (plangeometri).....22
55. Bevis for ligning for plan (rumgeometri).....23
56. Bevis for ligning for cirkel (plangeometri).....23
57. Bevis for ligning for kugle (rumgeometri).....23

ØVELSER 23-41

VEKTORER

1. Koordinater til punkt i planen

Det hedder **et** plan, ikke **en** plan, men i geometri er begge dele korrekt. I eksamensopgaver skrives **en** plan.



1a. Koordinatsystem i planen

Figuren viser et koordinatsystem i planen.
De to koordinatakser er vinkelret på hinanden.

1b. Begyndelsepunkt *O*

Begyndelsespunktet er koordinataksernes skæringspunkt. Bogstavet O bruges ofte til at betegne begyndelsespunktet.
O har koordinatsættet (0,0).

1c. Koordinatsæt til punktet *Q*

Vi anbringer et flytbart punkt i O.
Vi forskyder punktet 5 enheder i x-aksens retning så det kommer fra O til P.
Når vi forskyder 5 enheder i x-aksens retning, så bliver x-koordinaten 5 enheder større.
Når vi forskyder i x-aksens retning er det kun x-koordinaten der ændres.
Altså har P koordinatsættet $(5,0)$.

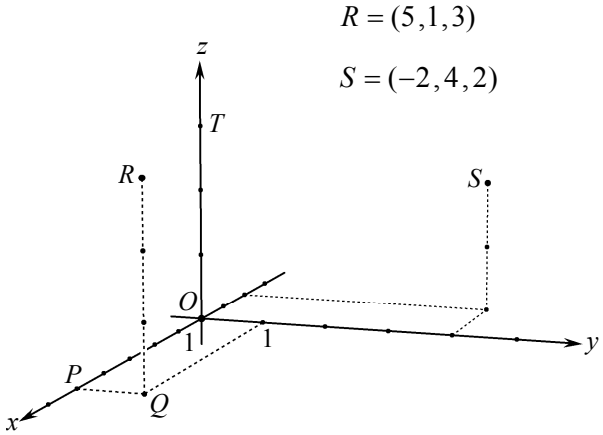
Fra P forskyder vi punktet 1 enhed i y-aksens retning så det kommer fra P til Q.
Når vi forskyder 1 enhed i y-aksens retning, så bliver y-koordinaten 1 enhed større.
Når vi forskyder i y-aksens retning er det kun y-koordinaten der ændres.
Altså har Q koordinatsættet $(5,1)$.

Det første tal i koordinatsættet er punktets x-koordinat.
Det andet tal i koordinatsættet er punktets y-koordinat.

1d. Koordinatsæt til punktet *R*

På den øverste figur kan vi kan komme til R ved at starte i O, forskyde -2 i x-aksens retning og forskyde 4 i y-aksens retning. Derfor er $R = (-2,4)$.

2. Koordinater til punkt i rummet



2a. Koordinatsystem i rummet

Figuren viser et koordinatsystem i rummet.
De tre koordinatakser er vinkelret på hinanden.

2b. Begyndelsepunkt *O*

Begyndelsespunktet er koordinataksernes skæringspunkt. Bogstavet O bruges ofte til at betegne begyndelsespunktet.
O har koordinatsættet (0,0,0).

2c. Koordinatsæt til punktet *R*

Vi anbringer et flytbart punkt i O.
Vi forskyder punktet 5 enheder i x-aksens retning så det kommer fra O til P.
Når vi forskyder 5 enheder i x-aksens retning, så bliver x-koordinaten 5 enheder større.
Når vi forskyder i x-aksens retning er det kun x-koordinaten der ændres.
Altså har P koordinatsættet $(5,0,0)$.

Fra P forskyder vi punktet 1 enhed i y-aksens retning så det kommer fra P til Q.
Når vi forskyder 1 enhed i y-aksens retning, så bliver y-koordinaten 1 enhed større.
Når vi forskyder i y-aksens retning er det kun y-koordinaten der ændres.
Altså har Q koordinatsættet $(5,1,0)$.

Fra Q forskyder vi punktet 3 enheder i z-aksens retning så det kommer fra Q til R.
Når vi forskyder 3 enheder i z-aksens retning, så bliver z-koordinaten 3 enheder større.
Når vi forskyder i z-aksens retning, er det kun z-koordinaten der ændres.
Altså har R koordinatsættet $(5,1,3)$.

Det første tal i koordinatsættet er punktets x-koordinat. Det andet tal i koordinatsættet er punktets y-koordinat. Det tredje tal i koordinatsættet er punktets z-koordinat.

(Bemærk at punkterne R og T ligger lige langt over xy-planen som indeholder x-aksen og y-aksen).

2d. Koordinatsæt til punktet *S*

På den nederste figur på side 3 kan vi komme til S ved at

starte i O, forskyde -2 i x-aksens retning, 4 i y-aksens retning og 2 i z-aksens retning.

Derfor er $S = (-2, 4, 2)$.

3. Vektor: Definition og sprogbrug

3a. En vektor er en pil. Hvis vi forskyder en pil uden at dreje den, så er pilen stadig samme vektor.

3b. En vektor kan betegnes med et lille bogstav med pil over.

3c. På figurerne 3f og 3g gælder:

Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er samme vektor, for de kan forskydes over i hinanden da de har samme længde og samme retning.

Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{c}$ er ikke samme vektor da de har forskellig længde.

Vektorerne $\vec{d}$ og $\vec{e}$ er ikke samme vektor da de har forskellig retning.

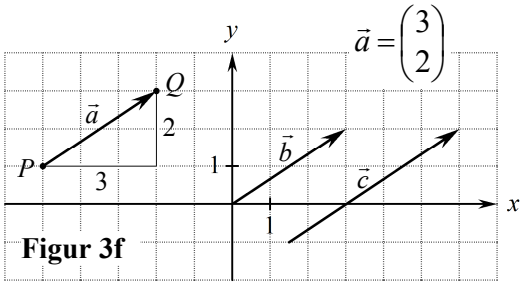
3d. På figur 3f går vektoren $\vec{a}$ fra punktet P til punktet Q. Så kan denne vektor betegnes med $\overrightarrow{PQ}$.

Der gælder at $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ og $\vec{b} = \overrightarrow{PQ}$.

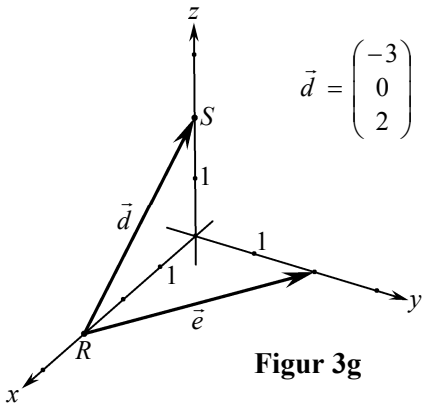
3e. Når en vektor $\vec{a}$ er anbragt så den går fra et punkt P til et punkt Q, så siger vi:

P er vektorens startpunkt og er Q vektorens endepunkt.

Når vi afsætter vektoren ud fra P, så er dens endepunkt Q.



Figur 3f



Figur 3g

4. Vektor: Koordinater

4a. Vi kan få en vektors koordinatsæt ved at

trække startpunktets koordinater fra endepunktets koordinater.

4b. En vektors koordinatsæt skrives lodret.

4c. Når $A = (a_1, a_2)$ og $B = (b_1, b_2)$, er

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

4d. Når $A = (a_1, a_2, a_3)$ og $B = (b_1, b_2, b_3)$, er

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

4e. Eksempel

På figur 3f er $P = (-5, 1)$ og $Q = (-2, 3)$

så $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 - (-5) \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

dvs. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4f. Eksempel

På figur 3g er $R = (3, 0, 0)$ og $S = (0, 0, 2)$

så $\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ 0 - 0 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

dvs. $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4g. Dette koordinatsæt fortæller at $\vec{a}$ går

3 i x-aksens retning og

2 i y-aksens retning.

Dette kan vi også se på figur 3f.

4h. Dette koordinatsæt fortæller at $\vec{d}$ går

-3 i x-aksens retning,

0 i y-aksens retning og

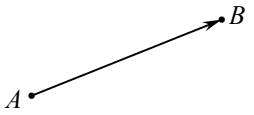
2 i z-aksens retning.

Dette kan vi også se på figur 3g.

5. Koordinater til vektors endepunkt

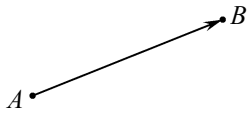
5a. Når $A=(a_1,a_2)$ og $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ er

$$B=(a_1+x\ ,\ a_2+y)$$



5b. Når $A=(a_1,a_2,a_3)$ og $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ er

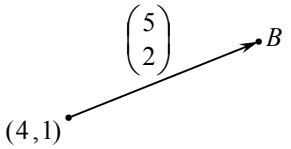
$$B=(a_1+x\ ,\ a_2+y\ ,\ a_3+z)$$



5c. I ord kan de to formler udtrykkes sådan:

Når en vektor er afsat ud fra et punkt,
og man lægger vektorens koordinater til punktets koordinater,
så får man koordinaterne til vektorens endepunkt.

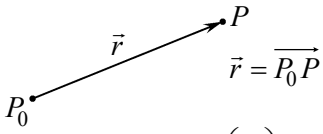
5d. Eksempel



Ud fra figuren slutter vi:

$$B\ =\ (4+5\ ,\ 1+2)\ =\ (9\ ,\ 3)$$

5e. Eksempel



$$\vec{r}=\overrightarrow{P_0P}$$

$$P_0=(x_0,y_0,z_0)\ ,\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}\ ,\quad P=(x,y,z)$$

Med disse betegnelser får vi ud fra figuren:

$$(x,y,z)\ =\ (x_0+r_1\ ,\ y_0+r_2\ ,\ z_0+r_3)$$

6. Nulvektor

6a. Vekoren med længde 0 kaldes <u>nulvektor</u> og betegnes med $\vec{o}$ som er <u>bogstavet lille o</u> med pil over.

6b. I planen er $\vec{o}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, og i rummet er $\vec{o}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

6c. På en figur er nulvektor et punkt.

7. Længde af vektor

7a. Symbolet $|\vec{v}|$ betyder længden af vektoren $\vec{v}$.

7b. Når $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, er

$$|\vec{v}|\ =\ \sqrt{x^2+y^2}\ .$$

7c. Når $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, er

$$|\vec{v}|\ =\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

7d. Eksempel

$A=(-2,11)$ og $B=(6,5)$.

For at finde længden af $\overrightarrow{AB}$ udregner vi først koordinaterne til $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}\ =\ \begin{pmatrix}6\ -(-2)\\5\ -\ 11\end{pmatrix}\ =\ \begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$$

Nu får vi

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|\ =\ \sqrt{8^2+(-6)^2}\ =\ \underline{\underline{10}}$$

Vi har udregnet at <u>afstanden mellem punkterne</u> A og B er 10.

I rummet er udregningerne de samme bortset fra at der er tre koordinater.

8. Modsat vektor

8a. Koordinater til modsat vektor

8b. En vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ har den <u>modsatte vektor</u>

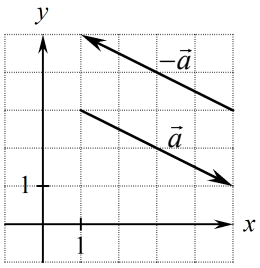
$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$$

8c. En vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ har den <u>modsatte vektor</u>

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}.$$

8d. Modsat vektor på figur

Den <u>modsatte vektor</u> til $\vec{a}$ har <u>samme længde</u> som $\vec{a}$ og har <u>modsat retning</u> af $\vec{a}$



8e. Eksempel

På figuren er $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Så er $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

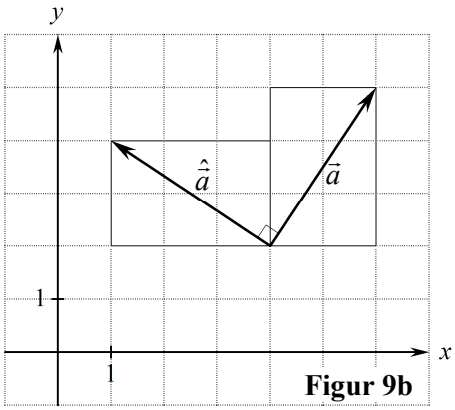
9. Tværvektor (plangeometri)

9a. Når vi drejer en vektor 90° mod uret, så får vi vektorens <u>tværvektor</u>.

Vi skriver $\frown$ over en vektor for at betegne tværvektoren.

$\hat{\vec{a}}$ er tværvektoren til $\vec{a}$.

<u>En vektor i rummet har IKKE en tværvektor.</u>



Figur 9b

9c. Formel for tværvektor

Vi udregner <u>koordinaterne til tværvektoren</u> ved hjælp af følgende formel:

9d.

$$\widehat{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

9e. Eksempel: Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, er $\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Se Figur 9b.

9f. Eksempel

Figur 9g viser et <u>kvadrat</u>.

Af 9a får vi

Du skal IKKE huske at reglen er nr. 9a. Du skal læse reglen, huske den, og forstå at den bruges her. Det samme gælder alle tilsvarende henvisninger.

$$\overrightarrow{AB} = \widehat{\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Vi omskriver højresiden med Formel 9d og får

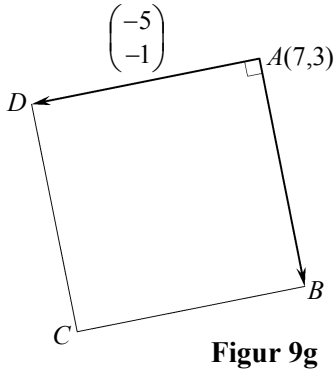
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Af dette og Formel 5a får vi

$$B = (7+1,\ 3+(-5))$$

Altså er

$$B = (8, -2)$$



Figur 9g

10. Tal gange vektor

10a. Koordinater til $k\vec{a}$

Vi ganger en vektor med et tal ved at gange hver af vektorens koordinater med tallet:

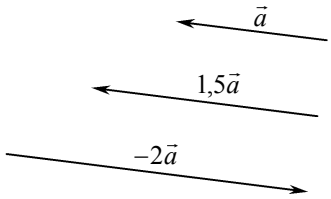
10b. $$k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

10c. $$k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

10d. $k\vec{a}$ på en figur

$1{,}5\vec{a}$ er ensrettet med $\vec{a}$ da 1,5 er positiv.
$1{,}5\vec{a}$ er 1,5 gange så lang som $\vec{a}$.

$-2\vec{a}$ er modsat rettet $\vec{a}$ da -2 er negativ.
$-2\vec{a}$ er 2 gange så lang som $\vec{a}$.



10e. $0\vec{a}$ er nulvektoren $\vec{o}$.

10f. Længden af $k\vec{a}$ er $|k|$ gange længden af $\vec{a}$. *Se 20a.*

10g. $k\vec{a}$ er ensrettet med $\vec{a}$ hvis k er positiv. $k\vec{a}$ er modsatrettet $\vec{a}$ hvis k er negativ.

10h. Hvis $\vec{b}$ er $\vec{o}$ eller parallel med $\vec{a}$, så findes et tal k så $\vec{b}$ er $k\vec{a}$.

11. Vektor plus vektor

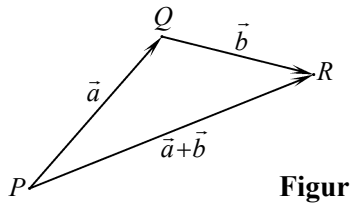
Koordinater til $\vec{a}+\vec{b}$

11a. $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$$

11b. $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$$

11c. $\vec{a}+\vec{b}$ på en figur

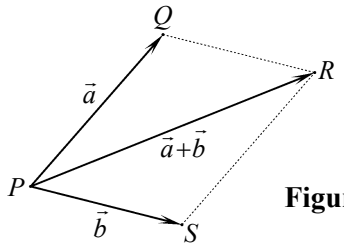
Hvis $\vec{b}$ er afsat i forlængelse af $\vec{a}$ som på figur 11e, så er $\vec{a}+\vec{b}$ vektoren $\overrightarrow{PR}$ fra $\vec{a}$'s startpunkt til $\vec{b}$'s spids.



Figur 11e

11d. $\vec{a}+\vec{b}$ på en figur

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er afsat ud fra samme punkt som på figur 11f, og $PQRS$ er et parallelogram, så er digonalen $\overrightarrow{PR}$ lig $\vec{a}+\vec{b}$.



Figur 11f

11g. Eksempel

Figur 11h viser tre vektorer.

Af regel 11c får vi

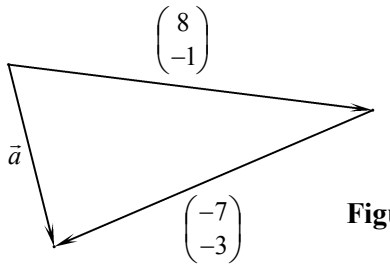
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Heraf og af 11a får vi

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 + (-7) \\ -1 + (-3) \end{pmatrix}$$

Altså er

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$



Figur 11h

12. Vektor minus vektor

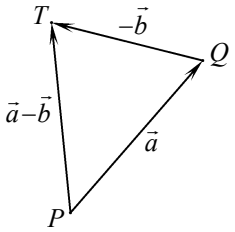
Koordinater til $\vec{a}-\vec{b}$

12a.
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

12b.
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

12c. $\vec{a}-\vec{b}$ på en figur

Hvis $\vec{a}$ og $-\vec{b}$ er afsat i forlængelse af hinanden som på figur 12e, så er $\overrightarrow{PT}$ lig $\vec{a}-\vec{b}$.

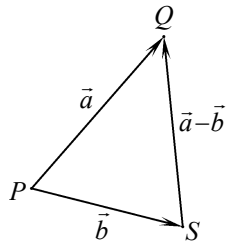


Figur 12e

12d. $\vec{a}-\vec{b}$ på en figur

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er afsat ud fra samme punkt, så er $\vec{a}-\vec{b}$ vektoren fra $\vec{b}$'s spids til $\vec{a}$'s spids.

På figur 12f, er $\overrightarrow{SQ}$ lig $\vec{a}-\vec{b}$.

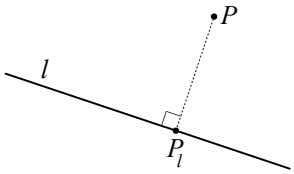


Figur 12f

13. Projektion

13a. Projektion af punkt på linje

Når vi fra et punkt P går vinkelret ind på en linje l, kommer vi til et punkt P_l på l som vi kalder projektionen af P på l.

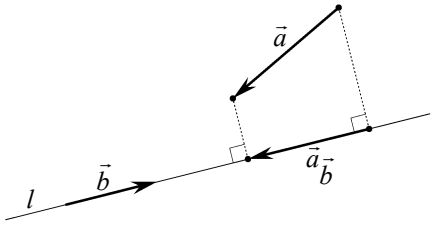


13b. Sådan kan vi tegne projektionen (plangeometri)

For at tegne projektionen af et punkt P på en linje l tegner vi den linje m som går gennem P og er vinkelret på l. Skæringspunktet mellem m og l er det punkt P_l vi kalder projektionen af P på l.

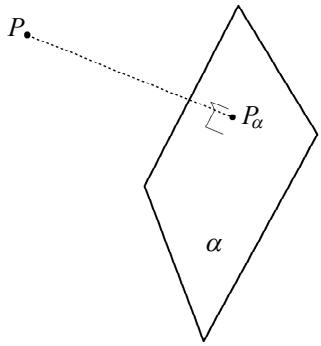
13c. Projektion af vektor på vektor

Linjen l er parallel med $\vec{b}$.
Når vi projicerer startpunkt og endepunkt for $\vec{a}$ på l, så får vi startpunkt og endepunkt for en vektor $\vec{a}_{\vec{b}}$ som vi kalder projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.



13d. Projektion af punkt på plan

Når vi fra et punkt P går vinkelret ind på en plan α, kommer vi til et punkt P_α i α som vi kalder projektionen af P på α.



14. Prikprodukt

14a. Prikproduktet $\vec{a}\cdot\vec{b}$ af to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er et tal.
Når vi kender koordinaterne, kan vi udregne prikproduktet ved hjælp af formlerne i rammerne.
Prikproduktet kaldes også skalarproduktet. "Skalar" betyder tal.

14b.
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

14c.
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

15. Prikprodukt: Vinkelret?

15a. Symbolet $\vec{a} \perp \vec{b}$ læses "$\vec{a}$ er vinkelret på $\vec{b}$" eller "$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale".

15b. $\vec{a} \perp \vec{b}$ netop når $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
hvis hverken $\vec{a}$ eller $\vec{b}$ er nulvektor.

15c. Eksempel

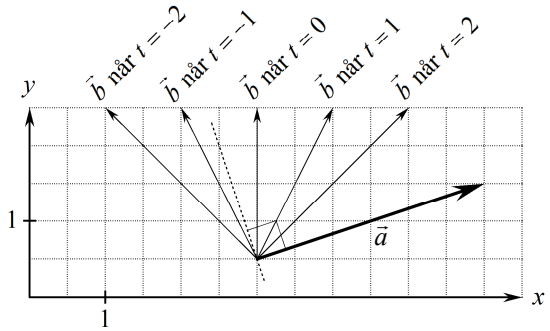
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale netop når $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, altså når

$$3 \cdot t + 1 \cdot 2 = 0$$

dvs. når $t = -\frac{2}{3}$.

I rummet er udregningen den samme bortset fra at hver vektor har tre koordinater.

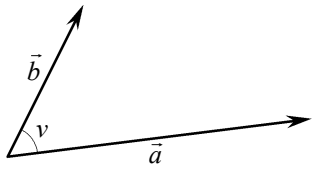


16. Prikprodukt: Vinkel mellem vektorer

16a. Når vi afsætter to vektorer ud fra samme punkt, danner de to vinkler. Den af vinklerne der er mindre end eller lig 180°, kalder vi vinklen mellem vektorerne.

16b. Når v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$, er

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$



16c. Eksempel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Når v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$, er

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

altså

$$\cos(v) = \frac{8 \cdot (-1) + 2 \cdot 3}{\sqrt{8^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 3^2}}$$

I rummet er udregningen den samme bortset fra at hver vektor har tre koordinater.

Nspire løser denne ligning mht. v for $0° \le v \le 180°$ og får $v = 94{,}3987°$.

Vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 94,4°.

17. Prikprodukt: Projektion af vektor

17a. Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}.$$

17b. Længden af projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er

$$\left| \vec{a}_{\vec{b}} \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}.$$

17c. Eksempel

Når $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ er

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{8 \cdot (-1) + 2 \cdot 3}{(-1)^2 + 3^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

17d. Eksempel

Når $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ er

$$\left| \vec{a}_{\vec{b}} \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|0 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

17c og 17d: I rummet er udregningen den samme bortset fra at hver vektor har tre koordinater.

18. Determinant (plangeometri)

18a. Determinanten $\det(\vec{a},\vec{b})$ af to vektorer $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er et tal.
Når vi kender koordinaterne, kan vi udregne determinanten ved hjælp af formlen i rammen.
To vektorer i rummet har ikke en determinant.

18b.

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

18c. Eksempel

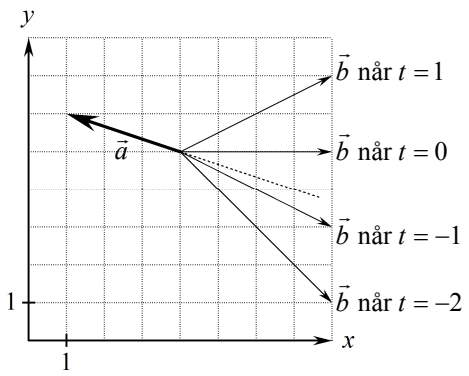
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = 8 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 26 .$$

19. Determinant: Parallel? (plangeometri)

19a. Symbolet $\vec{a} \parallel \vec{b}$ læses "$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle".

19b. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ netop når $\det(\vec{a},\vec{b}) = 0$
hvis hverken $\vec{a}$ eller $\vec{b}$ er nulvektor.



19c. Eksempel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle netop når $\det(\vec{a},\vec{b}) = 0$, altså når

$$(-3) \cdot 2t - 1 \cdot 4 = 0$$

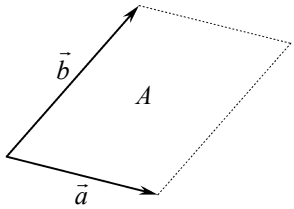
dvs. når $t = -\frac{2}{3}$.

20. Determinant: Areal (plangeometri)

20a. Symbolet $|x|$ læses "den numeriske værdi af x".
Der gælder $|0| = 0$, $|-4| = 4$, $|4| = 4$, $|-0{,}5| = 0{,}5$, $|0{,}5| = 0{,}5$, osv.

20b. Arealet A af det parallelogram der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$A = \left|\det(\vec{a},\vec{b})\right| .$$



20c. Eksempel

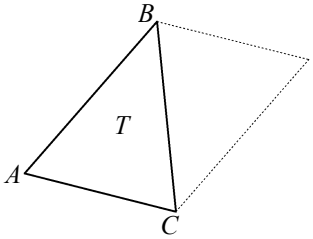
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Arealet A af det parallelogram der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

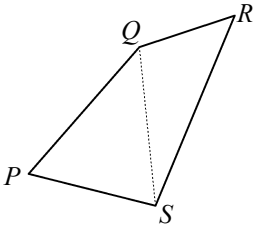
$$A = \left|\det(\vec{a},\vec{b})\right| = \left|(-1) \cdot 2 - 3 \cdot 8\right| = \left|-26\right| = 26 .$$

20d. Eksempel
Arealet T af trekant ABC er

$$T = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right| .$$



20e. Eksempel
En "skæv" firkant $PQRS$ deler vi op i to trekanter for at finde arealet.



21. Krydsprodukt (rumgeometri)

21a. Krydsproduktet $\vec{a}\times\vec{b}$ af to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er en vektor.
Når vi kender koordinaterne, kan vi udregne krydsproduktet ved hjælp af formlen i rammen.
Krydsproduktet kaldes også vektorproduktet.

21b.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Vi skal vide at denne formel findes.
Vi skal ikke huske formlen.
Vi vil altid bruge Nspire til at udregne krydsprodukt.

21c. Eksempel

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 \\ -23 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Dette er udregnet på Nspire ved at taste
crossP({2,-1,5},{-3,6,4})

22. Krydsprodukt: Parallel? (rumgeometri)

22a. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ netop når $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{o}$
hvis hverken $\vec{a}$ eller $\vec{b}$ er nulvektor.

22b. Eksempel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 23 \\ 19 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 92 \\ 76 \\ 64 \end{pmatrix}$$

På Nspire udregner vi

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\vec{a}\times\vec{b}$ er nulvektor, er $\vec{a}$ og $\vec{b}$ parallelle.

23. Krydsprodukt: Areal (rumgeometri)

23a. Arealet A af det parallelogram der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er
$A = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

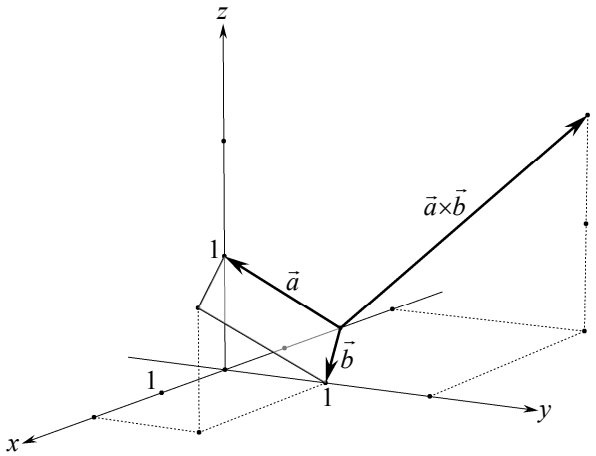
23b. Eksempel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

På Nspire udregner vi $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Arealet A af det parallelogram der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$A = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3 .$$

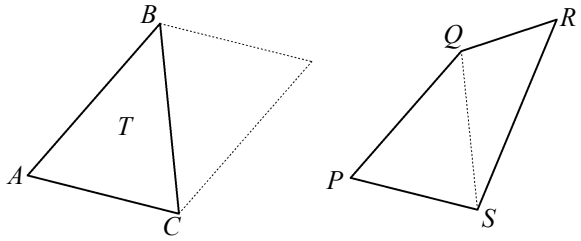


Afsnit 23 fortsætter på næste side.

23c. Eksempel
Arealet T af trekant ABC er

$$T = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

23d. Eksempel: En "skæv" firkant $PQRS$ deler vi op i to trekanter for at finde arealet.



24. Krydsprodukt: Vinkelret vektor (rumgeometri)

24a. Krydsproduktet af to vektorer er en vektor der er vinkelret på begge vektorer:

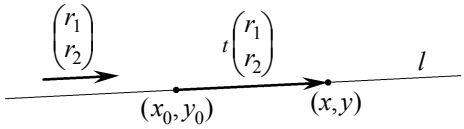
$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a} \quad \text{og} \quad \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$$

24b. **Højrehåndsreglen:**
Grib om $\vec{a}\times\vec{b}$ med højre hånd så fingrene peger fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$.
Så vil $\vec{a}\times\vec{b}$ pege i tommelfingerens retning.

KOORDINATGEOMETRI

25. Parameterfremstilling for linje

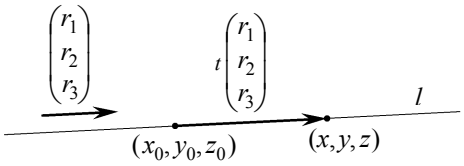
25a.



Når (x_0, y_0) er et punkt på l og $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ er parallel med l, så er følgende en parameterfremstilling for l:

25c. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

25b.



Når (x_0, y_0, z_0) er et punkt på l og $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ er parallel med l, så er følgende en parameterfremstilling for l:

25d. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

25e. Når 25c er en parameterfremstilling for l, så gælder:

(x_0, y_0) er et punkt på l.

$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ er parallel med l.

25f. Når 25d er en parameterfremstilling for l, så gælder:

(x_0, y_0, z_0) er et punkt på l.

$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ er parallel med l.

25g. Antag at x_0, y_0, r_1 og r_2 i 25c er erstattet med bestemte tal. Så gælder:

Hvis vi indsætter et tal for t og udregner højresiden, så får vi koordinaterne til et punkt der ligger på linjen.

Hvis koordinaterne til et punkt ikke kan fås på denne måde, så ligger punktet ikke på linjen.

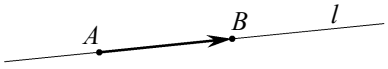
25h. Antag at x_0, y_0, z_0, r_1, r_2 og r_3 i 25d er erstattet med bestemte tal. Så gælder:

Hvis vi indsætter et tal for t og udregner højresiden, så får vi koordinaterne til et punkt der ligger på linjen.

Hvis koordinaterne til et punkt ikke kan fås på denne måde, så ligger punktet ikke på linjen.

25i. En vektor der er parallel med l, kaldes en <u>retningsvektor</u> for l.

25j. Når A og B er to forskellige punkter på l, så er $\overrightarrow{AB}$ parallel med l.



25k. Når A er et punkt på l og $\overrightarrow{AB}$ er parallel med l, så er B et punkt på l.

Afsnit 25 fortsætter på næste side!

25*l*. Eksempel

En linje *l* går gennem punkterne $A(15,20,20)$ og $B(25,27,24)$.

For at bestemme en parameterfremstilling for *l* bruger vi 25j , 4d og 25d.

Da *A* og *B* ligger på *l*, er $\overrightarrow{AB}$ parallel med *l*.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 25-15 \\ 27-20 \\ 24-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ så } l \text{ har parameterfremstillingen } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

26. Ligning for linje (plangeometri)

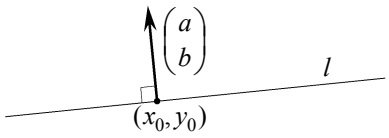
26a. Når (x_0, y_0) er et punkt på *l* og $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er vinkelret på *l*,

så kan vi bestemme en ligning for *l* ved først at sætte ind i formlen

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$

og derefter gange ind i parenteserne og trække sammen så vi får en ligning af typen

$$ax+by+c=0 .$$



26b. Når $ax+by+c=0$ er en ligning for *l*, så er vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vinkelret på *l*.

26c. Når vi kender tallene *a*, *b* og *c* i en ligning $ax+by+c=0$ for en linje *l*,

så kan vi undersøge om et punkt ligger på *l* ved at sætte punktets koordinater ind for *x* og *y* i ligningen.

Hvis ligningen bliver sand, så ligger punktet på *l*.

Hvis ligningen bliver falsk, så ligger punktet ikke på *l*.

26d. En vektor der er vinkelret på *l* kaldes en normalvektor for *l*.

26e. Eksempel

En linje *l* går gennem punkterne $A(2,7)$ og $B(-3,1)$.

For at bestemme en ligning for *l* på formen $ax+by+c=0$ bruger vi 25j , 9a , 9d og 26a .

A og *B* ligger på *l*, så *l* er parallel med $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3-2 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$

Så er *l* vinkelret på $\widehat{\overrightarrow{AB}} = \begin{pmatrix} -(-6) \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$

Så har *l* ligningen $6\cdot(x-2)+(-5)\cdot(y-7) = 0$

Denne omskriver vi til $6x-5y+23=0$

27. Ligning for plan (rumgeometri)

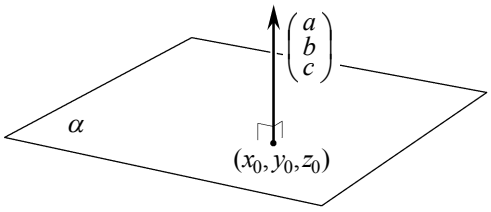
27a. Når (x_0, y_0, z_0) er et punkt i en plan α, og $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ er vinkelret på α,

så kan vi bestemme en ligning for α ved først at sætte ind i formlen

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

og derefter gange ind i parenteserne og trække sammen så vi får en ligning af typen

$$ax+by+cz+d=0 .$$



27b. Når $ax+by+cz+d=0$ er en ligning for α, så er vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vinkelret på α.

27c. Når vi kender tallene *a*, *b*, *c* og *d* i en ligning $ax+by+cz+d=0$ for en plan α,

så kan vi undersøge om et punkt ligger i α ved at sætte punktets koordinater ind for *x*, *y* og *z* i ligningen: Hvis ligningen bliver sand, så ligger punktet i α.

Hvis ligningen bliver falsk, så ligger punktet ikke i α.

27d. Når A og B er to forskellige punkter i α, så er $\overrightarrow{AB}$ parallel med α.

27e. En vektor der er vinkelret på α, kaldes en <u>normalvektor</u> for α.

27f. Når $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle med α, så er $\vec{a}\times\vec{b}$ vinkelret på α
hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke er parallelle, dvs. hvis $\vec{a}\times\vec{b}$ ikke er nulvektor.

27g. Eksempel
Punkterne $A(0,3,4)$, $B(2,-2,1)$, $C(-1,4,3)$ ligger i planen α.
For at bestemme en ligning for α bruger vi 4d, 27d, 27f og 27a.

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2-0\\-2-3\\1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1-0\\4-3\\3-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

En normalvektor til α: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}8\\5\\-3\end{pmatrix}$ (Udregnet på Nspire)

Ligning for α: $8\cdot(x-0)+5\cdot(y-3)+(-3)\cdot(z-4) = 0$

Denne omskriver vi til $8x+5y-3z-3=0$

28. Ligning for cirkel (plangeometri)

28a.
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2 \ .$$
er ligning for en cirkel med centrum $C(x_0, y_0)$ og radius r.

28b. Når P er et punkt på en cirkel med centrum C, er cirklens radius $r=\left|\overrightarrow{CP}\right|$. *Se 7d.*

28c. Eksempel
En cirkel har ligningen $(x-1)^2+(y+5)^2=9$.
Vi omskriver til formen 28a: $(x-1)^2+(y-(-5))^2 = 3^2$.
Heraf ser vi at centrum er $(1,-5)$ og radius er 3.

28d. Metode: Når vi kender en ligning for en cirkel, så kan vi <u>undersøge om et punkt ligger på cirklen</u> ved at sætte punktets koordinater ind for x og y i ligningen.
Hvis ligningen bliver sand, så ligger punktet på cirklen.
Hvis ligningen bliver falsk, så ligger punktet ikke på cirklen.

28e. Eksempel der forklarer en metode
En cirkel har ligningen $x^2-2x+y^2+10y+17=0$.
For at <u>bestemme centrum og radius</u> omskriver vi ligningen til formen $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ med metoden vi har vist i rammen nedenfor. Anden ligning i besvarelsen har vi fået sådan:

Koefficienten til x er -2. Halvdelen er -1, og -1 i anden er 1. Vi lægger 1 til begge sider.
Koefficienten til y er 10. Halvdelen er 5, og 5 i anden er 25. Vi lægger 25 til begge sider.
Konstantleddet er 17. Vi trækker 17 fra begge sider.

Tredje ligning i besvarelsen nedenfor har vi fået af formlerne

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \quad \text{og} \quad (a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

sådan:

Koefficienten til x er -2. Halvdelen er -1. Derfor skal der stå -1 i første parentes.
Koefficienten til y er 10. Halvdelen er 5. Derfor skal der stå $+5$ i anden parentes.

<u>Besvarelsen:</u>

$$x^2-2x+y^2+10y+17=0$$
$$x^2+1-2x + y^2+25+10y = 1+25-17$$
$$(x-1)^2 + (y+5)^2 = 9$$

Heraf ser vi at centrum er $(1,-5)$ og radius er $\sqrt{9}=3$

<u>Hvis x-led eller y-led mangler, ser omskrivningen lidt anderledes ud:</u>

$$x^2+y^2+10y+17=0$$
$$x^2 + y^2+25+10y = 25-17$$
$$(x-0)^2 + (y+5)^2 = 8$$

Centrum er $(0,-5)$ og radius er $\sqrt{8}$.

29. Ligning for kugle (rumgeometri)

29a. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2$.
er ligning for en kugle med centrum $C(x_0, y_0, z_0)$ og radius r .

29b. Når P er et punkt på en kugle med centrum C, er kuglens radius $r = \left|\overrightarrow{CP}\right|$. *Se 7c og 7d.*

29c. **Eksempel**
En kugle har ligningen $(x-1)^2+y^2+(z+5)^2=8$.
Vi omskriver til formen 29a: $(x-1)^2+(y-0)^2+(y-(-5))^2 = \sqrt{8}^2$.
Heraf ser vi at centrum er $(1, 0, -5)$ og radius er $\sqrt{8}$.

29d. **Metode:** Når vi kender en ligning $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2$ for en kugle, så kan vi undersøge om et punkt ligger på kuglen ved at sætte punktets koordinater ind for x, y og z i ligningen.
Hvis ligningen bliver sand, så ligger punktet på kuglen.
Hvis ligningen bliver falsk, så ligger punktet ikke på kuglen.

29e. **Eksempel der forklarer en metode**
En kugle har ligningen $x^2-2x+y^2+z^2+10z+18=0$.
For at bestemme centrum og radius omskriver vi ligningen til formen fra 29a. (Se forklaringen i 28e)

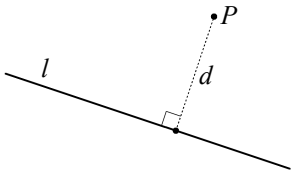
$$x^2-2x+y^2+z^2+10z+18=0$$
$$x^2+1-2x+y^2+z^2+25+10z=1+25-18$$
$$(x-1)^2+y^2+(z+5)^2 = 8$$

Heraf ser vi at centrum er $(1, 0, -5)$ og radius er $\sqrt{8}$.

30. Afstand fra punkt til linje (plangeometri)

30a. Afstanden d fra et punkt $P(x_1, y_1)$ til en linje $l: ax+by+c=0$ er

$$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$



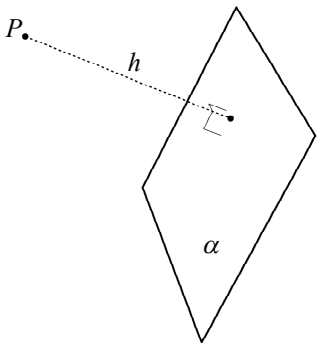
30b. **Eksempel**
Afstanden d fra punktet $P(1, 2)$ til linjen med ligningen $4x-3y+6=0$ er

$$d = \frac{|4\cdot 1-3\cdot 2+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{4}{5} .$$

31. Afstand fra punkt til plan (rumgeometri)

31a. Afstanden h fra et punkt $P(x_1, y_1, z_1)$ til en plan $\alpha: ax+by+cz+d=0$ er

$$h = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} .$$



32. Vinkel mellem linjer

32a. Hvis vi kender retningsvektorer $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ for linjer l_1 og l_2, så find vinklen v mellem $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$.
Så vil v og $180°-v$ være de to vinkler som l_1 og l_2 danner. *Se 16b.*

32b. Hvis vi kender normalvektorer $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$ for to linjer l_1 og l_2 i planen, så find vinklen v mellem $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$. Så vil v og $180°-v$ være de to vinkler som l_1 og l_2 danner. *Se 16b.*

32c. Hvis vi for to linjer l_1 og l_2 i planen kender en retningsvektor $\vec{r}_1$ og en normalvektor $\vec{n}_2$, så find vinklen v mellem $\hat{\vec{r}}_1$ og $\vec{n}_2$. Så vil v og $180°-v$ være de to vinkler som l_1 og l_2 danner. *Se 9d og 16b.*

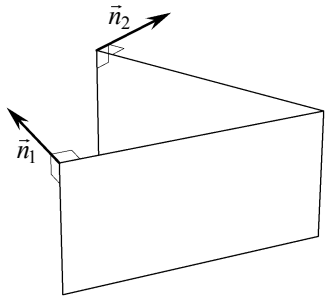
33. Vinkel mellem planer (rumgeometri)

33a. Find vinklen v mellem normalvektorer $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$ til to planer α_1 og α_2.
Så vil v og $180°-v$ være de to vinkler som α_1 og α_2 danner. *Se 16b.*

34. Vinkel mellem sideflader (rumgeometri)

34a. Til den ene sideflade skal vi finde en normalvektor $\vec{n}_1$ der peger ind i vinklen. (Brug højrehåndsreglen 24b)
Til den anden sideflade skal vi finde en normalvektor $\vec{n}_2$ der peger ud af vinklen. (Brug højrehåndsreglen 24b)
Vinklen v mellem $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$ er vinklen mellem sidefladerne.

34b. (Hvis begge vektorer peger ind i vinklen, eller begge peger ud, finder vi en vinkel u som ikke dannes af sidefladerne. De to planer der indeholder sidefladerne, danner vinklerne u og v).



35. Vinkel mellem linje og plan (rumgeometri)

35a. Find vinklen v mellem en normalvektor $\vec{n}$ til planen og en retningsvektor $\vec{r}$ til linjen.
Træk den mindste af vinklerne v og 90° fra den største. Resultatet er vinklen mellem linjen og planen.
Se 16b.

36. Vilkårligt punkt på linje

36a. Vi omskriver parameterfremstillingen for en linje l:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2t \\ 3-t \end{pmatrix}$$

Et vilkårligt punkt på l er $(x, y) = (5+2t\,,\, 3-t)$

I rummet er udregningen den samme bortset fra at der er tre koordinater.

37. Skæring mellem to linjer *l* og *m*

37a. Både *l* og *m* er givet ved parameterfremstilling
Først finder vi et vilkårligt punt på hver linje:

l: $(x, y) = (2s\,,\, 5-3s)$ og m: $(x, y) = (2+2t\,,\, -2+t)$

I 36a står hvordan vi gør.
Parametrene s og t i de to punkter må ikke være samme bogstav.

Vi skal bestemme s og t så de to punkter har ens x-koordinater og ens y-koordinater:

$$2s = 2+2t$$
$$5-3s = -2+t$$

Vi løser dette ligningssystem mht. s og t og får:

$$s = 2 \quad \text{og} \quad t = 1$$

Skriv at Nspire løser ligningssystemet, eller skriv mellemregninger.

Når $s = 2$ er $(x, y) = (2s\,,\, 5-3s) = (2\cdot 2\,,\, 5-3\cdot 2) = (4\,,\, -1)$.

Skæringspunktet er $(x, y) = (4\,,\, -1)$.

I rummet er udregningerne de samme bortset fra at der er 3 koordinater.

37b. Både *l* og *m* er givet ved ligning (plangeometri)
Vi skal finde x og y så begge ligninger er opfyldt:

l: $3x + 2y - 10 = 0$

m: $x - 2y - 6 = 0$

Skriv at Nspire løser ligningssystemet, eller skriv mellemregninger.

Vi løser dette ligningssystem mht. x og y og får $x = 4$ og $y = -1$.

Skæringspunktet er $(x, y) = (4\,,\, -1)$.

37c er på næste side.

37c. ***l* er givet ved ligning, *m* ved parameterfremstilling** (plangeometri)

Først finder vi et vilkårligt punkt på m :

m: $(x,y)=(2+2t\,,-2+t)$.

I 36a står hvordan vi gør.

Vi indsætter dette punkt i ligningen

l: $3x+2y-10=0$

og får

$3(2+2t)+2(-2+t)-10=0$

Skriv at Nspire løser ligningen, eller skriv mellemregninger.

Vi løser denne ligning mht. t og får $t=1$.

Når $t=1$ er $(x,y)=(2+2t\,,-2+t)=(2+2\cdot 1\,,-2+1)=(4\,,-1)$.

Skæringspunktet er $(x,y)=(4\,,-1)$.

38. Skæring mellem linje og cirkel (plangeometri)

38a. Linjen er givet ved parameterfremstilling

Først finder vi et vilkårligt punkt på linjen :

$(x,y)=(2+2t\,,-2+t)$.

I 36a står hvordan vi gør.

Vi indsætter dette punkt i cirklens ligning

$x^2-6x+y^2-2y\ =\ 0$

og får

$(2+2t)^2-6(2+2t)+(-2+t)^2-2(-2+t)\ =\ 0$

Skriv at Nspire løser ligningen, eller skriv mellemregninger.

Vi løser denne ligning mht. t og får $t=0$ eller $t=2$.

Når $t=0$ er $(x,y)=(2+2t\,,-2+t)=(2+2\cdot 0\,,-2+0)=(2\,,-2)$

Når $t=2$ er $(x,y)=(2+2t\,,-2+t)=(2+2\cdot 2\,,-2+2)=(6\,,0)$

Skæringspunkterne er $(2\,,-2)$ og $(6\,,0)$.

38b. Linjen er givet ved ligning

Linjen og cirklen er givet ved ligningerne

$x-2y-6=0$

$x^2-6x+y^2-2y\ =\ 0$

Skriv at Nspire løser ligningssystemet, eller skriv mellemregninger.

Vi løser dette ligningssystem mht. x og y og får

$x=2$ og $y=-2$ eller $x=6$ og $y=0$

Skæringspunktet er $(x,y)=(2\,,-2)$ og $(x,y)=(6\,,0)$.

39. Skæring mellem linje og kugle (rumgeometri)

39a. Vi indsætter et vilkårligt punkt fra linjen i kuglens ligning, osv. Se 36a og 38a.

40. Skæring mellem linje og plan (rumgeometri)

40a. Vi indsætter et vilkårligt punkt fra linjen i planens ligning, osv. Se 36a og 37c.

41. Projektion af punkt på linje (plangeometri)

41a. Vi vil finde projektionen Q af punktet $P(2\,,1)$ på linjen l: $2x+3y-20=0$.

Q er skæringspunktet mellem l og linjen m der går gennem P og er vinkelret på l.

Af ligningen for l ser vi at vektoren $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ er vinkelret på l, så m har parameterfremstillingen

m: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Herefter kan vi bruge metoden fra 37c til finde Q.

42. Projektion af punkt på plan (rumgeometri)

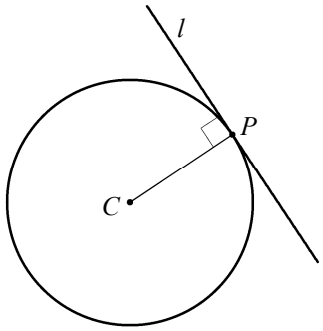
42a. Vi vil finde projektionen Q af punktet $P(6,-2,5)$ på planen α: $2x-3y+z+5=0$.
Q er skæringspunktet mellem α og linjen m der går gennem P og er vinkelret på α.

Af ligningen for α ser vi at vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ er vinkelret på α, så m har parameterfremstillingen

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Herefter kan vi bruge metoden fra 40a til finde Q.

43. Tangent til cirkel (plangeometri)



43a. En tangent til en cirkel er en linje der har præcis ét punkt fælles med cirklen. Dette punkt kaldes røringspunktet.
Når man siger "tangenten i P", betyder det at P er røringspunktet.

43b. En tangent til en cirkel er vinkelret på linjen gennem centrum og røringspunkt.

43c. En linje er tangent til en cirkel netop hvis afstanden fra centrum til linjen er lig radius.

43d. Eksempel
Punktet $P(4,5)$ ligger på en cirkel med centrum $C(3,1)$.
Vi vil finde en ligning for tangenten l i P.
Ifølge 43b er $\overrightarrow{CP}$ vinkelret på l, så vi kan finde ligningen for l ved at bruge 4c og 26a.

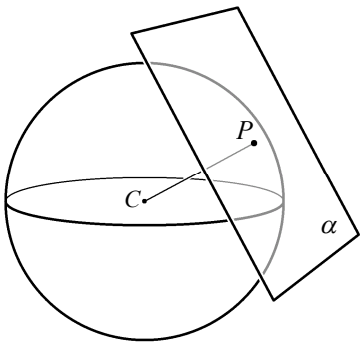
43e. Eksempel
Linjen l: $3x+4y+24=0$ er tangent til en cirkel med centrum $C(2,5)$.
Vi vil finde en ligning for cirklen.
Ifølge 43c kan vi finde radius ved at finde afstanden fra C til l. *Se 30a og 30b.*
Så kan vi bestemme cirklens ligning ved at bruge 28a.

43f. Eksempel
Vi vil undersøge om linjen l: $3x+4y+24=0$ er tangent til cirlen M: $(x-2)^2+(y-5)^2=81$.

Metode 1: Vi finder centrum og radius som i 28c.
Så udregner vi afstanden fra centrum til l og bruger 43c.

Metode 2: Vi finder skæringspunkterne mellem l og M og bruger 43a.
Skæringspunkterne finder vi som i 38b.

44. Tangentplan til kugle (rumgeometri)



44a. En tangentplan til en kugle er en plan der har præcis ét punkt fælles med kuglen. Dette punkt kaldes røringspunktet.
Når man siger "tangentplanen i P", betyder det at P er røringspunktet.

44b. En tangentplan til en kugle er vinkelret på linjen gennem centrum og røringspunkt.

44c. En plan er tangentplan til en kugle netop hvis afstanden fra centrum til planen er lig radius.

44d. Eksempel
Punktet $P(4,5,2)$ ligger på en kugle med centrum $C(3,1,4)$.
Vi vil finde en ligning for tangentplanen α i P.
Ifølge 44b er $\overrightarrow{CP}$ vinkelret på l, så vi kan finde ligningen for α ved at bruge 4d og 27a.

Afsnit 44 fortsætter på næste side!

44e. Eksempel: Planen α: $2x+y-2z+24=0$ er tangentplan til en kugle med centrum $C(-1,0,5)$.
Vi vil finde en ligning for kuglen. Ifølge 44c kan vi finde radius ved at finde afstanden fra C til α. *Se 31a*. Så kan vi bestemme kuglens ligning ved at bruge 29a.

44f. Eksempel: Vi vil undersøge om planen α: $2x+y-2z+24=0$ er tangentplan til kuglen med centrum $C(-1,0,5)$ og radius 4. Vi udregner afstanden fra C til α og bruger 44c. *Se 31a*.

BEVISER

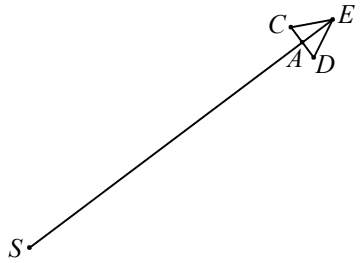
45. Skrivning af formler

I et eksempel som 26e skrev vi udregningerne med bestemte tal.
Hvis vi skal lave samme udreninger med mange forskellige tal, så er det smart at

– starte med at betegne tallene med bogstaver og
– skrive udregningerne med disse bogstaver.

Så kan vi få Nspire til at udregne et resultatet hver gang vi ændrer de givne tal.
Denne metode bruger vi i eksempel 46

46. Bevis for formler til automatisk tegning af pil



Figuren viser en vektor $\overrightarrow{SE}=\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ med startpunkt $S(s_1,s_2)$.

Når vi taster bestemte tal for

<u>vektorens koordinater</u> v_1 og v_2 og
<u>startpunktets koordinater</u> s_1 og s_2,

så skal Nspire tegne pilen.

<u>Vi skal skrive formler som Nspire kan bruge til at udregne koordinaterne til E, C og D.</u>

For at få E's koordinater lægger vi $\vec{v}$'s koordinater til S's:

(1) $e_1=s_1+v_1$
$e_2=s_2+v_2$ Her har vi brugt 5c.

Du skal IKKE huske at reglen er nr. 5c. Du skal slå op på reglen, huske den, og forstå at den bruges her. Det samme gælder alle tilsvarende henvisninger.

Vi vælger at lade pilespidsens længde være 0,1 gange pilens længde. Så må

$\overrightarrow{SA}=0{,}9\vec{v}$. Her har vi brugt 10f og 10g.

For at få $\overrightarrow{SA}$'s koordinater skal vi gange $\vec{v}$'s koordinater med 0,9:

$\overrightarrow{SA}=\begin{pmatrix} 0{,}9v_1 \\ 0{,}9v_2 \end{pmatrix}$ Her har vi brugt 10a.

For at få A's koordinater lægger vi $\overrightarrow{SA}$'s koordinater til B's:

$a_1=s_1+0{,}9v_1$
$a_2=s_2+0{,}9v_2$ Her har vi brugt 5c.

Vi ser at

$\overrightarrow{AC}$ har samme retning som $\hat{\vec{v}}$. Her har vi brugt 9a.

Vi vælger at lade pilespidsens halve bredde være 0,05 gange pilens længde, så

$\overrightarrow{AC}=0{,}05\hat{\vec{v}}$. Her har vi brugt 10f og 10g.

og

$\overrightarrow{AC}=0{,}05\begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0{,}05v_2 \\ 0{,}05v_1 \end{pmatrix}$ Her har vi brugt 9d og 10b.

Afsnit 46 fortsætter på næste side!

For at få C's koordinater lægger vi $\overrightarrow{AC}$'s koordinater til A's :

(2) $$\begin{aligned} c_1 &= s_1 + 0{,}9v_1 - 0{,}05v_2 \\ c_2 &= s_2 + 0{,}9v_2 + 0{,}05v_1 \end{aligned}$$

Her har vi brugt 5c.

Vi ser at

$$\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0{,}05v_2 \\ -0{,}05v_1 \end{pmatrix}.$$

Her har vi brugt 8d og 8b.

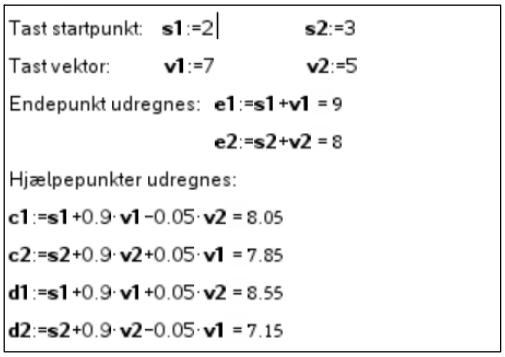
For at få D's koordinater lægger vi $\overrightarrow{AD}$'s koordinater til A's :

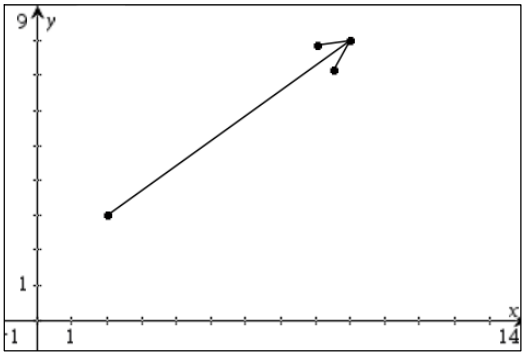
(3) $$\begin{aligned} d_1 &= s_1 + 0{,}9v_1 + 0{,}05v_2 \\ d_2 &= s_2 + 0{,}9v_2 - 0{,}05v_1 \end{aligned}$$

Her har vi brugt 5c.

I afsnit 47 bruger vi formlerne (1), (2) og (3) til at få Nspire til at tegne pilen.

47. Automatisk tegning af pil på Nspire





47a. Venstre skærmbillede viser de formler der udregner koordinaterne til punkterne E, C og D fra afsnit 46.

47b. Højre skærmbillede viser pilen fra afsnit 46.
Når vi på venstre skærmbillede ændrer s_1, s_2, v_1 og/eller v_2, så ændres pilen automatisk.

47c. Forbindelsen mellem venstre og højre skærmbillede laver vi sådan:
Vi sætter markøren på et punkt, højreklikker (på lommeregner taster vi i stedet ctrl menu), vælger **Koord og Lign**, flytter markør til x-koordinat, højreklikker, vælger **Variable** / **Kæd til** og vælger den relevante variable, osv.

48. Bevis for at vi må prikke ind i en parentes

u_1 og u_2 er koordinater til $\vec{u}$, og tilsvarende for $\vec{v}$ og $\vec{w}$.

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (u_1+v_1)\cdot w_1 + (u_2+v_2)\cdot w_2 = u_1\cdot w_1 + v_1\cdot w_1 + u_2\cdot w_2 + v_2\cdot w_2$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = u_1\cdot w_1 + u_2\cdot w_2 + v_1\cdot w_1 + v_2\cdot w_2$$

Da de to udtryk give samme fire led, er de ens, dvs.

48a. $$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$$

Vi har brugt vektorregel 11a og 14b, og talregler: gange ind i parentes, og ved plus er rækkefølge ligegyldig.
I rummet er beviset det samme bortset fra at der er tre koordinater.

49. Bevis for formel 49a

v_1 og v_2 er koordinater til $\vec{v}$.

$$(k\vec{v})\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (kv_1)\cdot v_1 + (kv_2)\cdot v_2 = kv_1^2 + kv_2^2$$

$$k|\vec{v}|^2 = k\sqrt{v_1^2+v_2^2}^{\,2} = k(v_1^2+v_2^2) = kv_1^2 + kv_2^2$$

Da de to udtryk give samme resultat, er de ens, dvs.

49a. $(k\vec{v})\cdot\vec{v} = k|\vec{v}|^2$

Vi har brugt vektorregel 10b, 14b og 7b, og talregler: ved gange er rækkefølge ligegyldig, $x^2=x\cdot x$, kvadratrod i anden, og gange ind i parentes.

I rummet er beviset det samme bortset fra at der er tre koordinater.

50. Bevis for at vi får nul når vi prikker med nulvektor

v_1 og v_2 er koordinater til $\vec{v}$.

$$\vec{o}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 = 0 \quad \text{så}$$

50a. $\vec{o}\cdot\vec{v} = 0$

Vi har brugt vektorregel 14b, og talregel om nul gange tal.

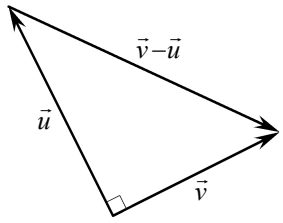
I rummet er beviset det samme bortset fra at der er tre koordinater.

51. Bevis for at vinkelrette vektorer har skalarprodukt nul

u_1 og u_2 er koordinater til $\vec{u}$, og tilsvarende for $\vec{v}$.

Når vi afsætter $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ud fra samme punkt, er $\vec{v}-\vec{u}$ vektoren fra $\vec{u}$'s spids til $\vec{v}$'s spids.

Her har vi brugt 12d.



Når $\vec{u}\perp\vec{v}$ kan vi bruge Pythagoras sætning på den viste trekant:

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = |\vec{v}-\vec{u}|^2$$

$$\sqrt{u_1^2+u_2^2}^{\,2} + \sqrt{v_1^2+v_2^2}^{\,2} = \sqrt{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2}^{\,2}$$

Her har vi brugt 7b og 12a.

$$u_1^2+u_2^2 + v_1^2+v_2^2 = (v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2$$

$$u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2 = v_1^2+u_1^2-2v_1u_1 + v_2^2+u_2^2-2v_2u_2$$

$$v_1u_1+v_2u_2 = 0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

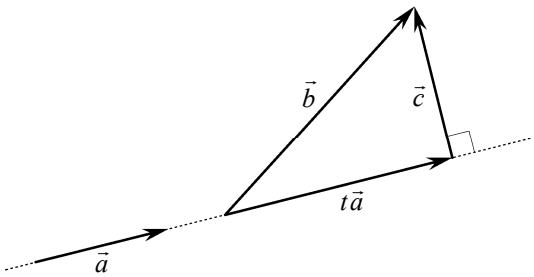
Her har vi brugt 14b.

Nu har vi bevist at

51a. hvis $\vec{u}\perp\vec{v}$ er $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

52. Bevis for formlen for projektion af vektor

Se figuren til højre.



Projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$ er en vektor der er $\vec{o}$ eller parallel med $\vec{a}$, så vi kan få projektionen frem ved at gange $\vec{a}$ med et tal:

$$\vec{b}_{\vec{a}} = t\vec{a}$$

Når $\vec{c}$ er vektoren på figuren, er

$$\vec{b} = t\vec{a}+\vec{c}$$

Begge sider i denne ligning prikker vi med $\vec{a}$ og får:

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = (t\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{a}$$

Vi prikker ind i parentesen og får:

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = (t\vec{a})\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{a}$$

Første led på højre side omskriver vi med 49a, og sidste led er 0 da $\vec{a}\perp\vec{c}$:

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = t|\vec{a}|^2$$

Afsnit 52 fortsætter på næste side!

Begge sider i denne ligning dividerer vi med $|\vec{a}|^2$ og får:

$$\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2} = t$$

Vi indsætter dette udtryk for t i følgende ligning som vi begrundede ovenfor:

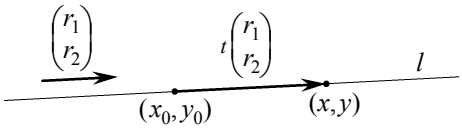
$$\vec{b}_{\vec{a}} = t\vec{a}$$

og får:

52a. $$\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a} \ .$$

53. Bevis for parameterfremstilling for en linje

l er linjen som går gennem (x_0, y_0) og er parallel med $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.



Et punkt (x, y) ligger på l

netop når

vektoren fra (x_0, y_0) til (x, y) er $\vec{o}$ eller parallel med $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ Se figur.

dvs.

vektoren fra (x_0, y_0) til (x, y) er lig $t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, hvor t er et tal

dvs.

vi får (x, y) når vi lægger $t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$'s koordinater til (x_0, y_0)

altså

53a. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

så vi har bevist at 53a er en parameterfremstilling for linjen l som går gennem (x_0, y_0) og har retningsvektoren $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

I rummet er beviset det samme bortset fra at der er tre koordinater.

54. Bevis for ligning for linje (plangeometri)

l er linjen som går gennem (x_0, y_0) og er vinkelret på $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Vektoren fra (x_0, y_0) til (x, y) er $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$. Se figur.

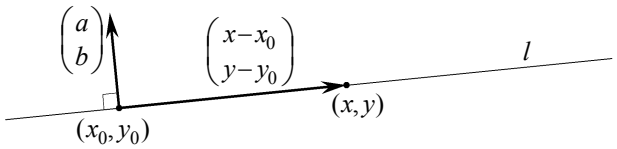
Et punkt (x, y) ligger på l

netop når

$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ er $\vec{o}$ eller vinkelret på $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

og dette gælder netop når

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = 0$$



dvs.

54a. $$a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$$

Vi har nu bevist at 54a er en ligning for linjen der går gennem (x_0, y_0) og har normalvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

55. Bevis for ligning for plan (rumgeometri)

Beviset er magen til beviset i afsnit 54 bortset fra at der er tre koordinater og vi siger ”plan” i stedet for ”linje” .

56. Bevis for ligning for cirkel (plangeometri)

M er cirklen med centrum $C(x_0, y_0)$ og radius r .
Et punkt $P(x, y)$ ligger på M netop når

længden af $\overrightarrow{CP}$ er r

dvs.

længden af $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ er r .

Ved hjælp af længdeformlen (se 7b) kan vi skrive dette sådan:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = r$$

Da begge sider er ≥ 0 , kan vi opløfte til anden. Så får vi

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$$

Dette er cirklens ligning (se 28a).

57. Bevis for ligning for kugle (rumgeometri)

Beviset er magen til beviset i afsnit 56 bortset fra at der er tre koordinater og vi siger kugle i stedet for cirkel.

Dette betyder at du i afsnit 1d kan læse hvordan du skal gøre.

ØVELSER

Brug blyant og viskelæder når du udfylder. Kuglepen o.l. er FORBUDT!

1.1 Øvelse se 1d.

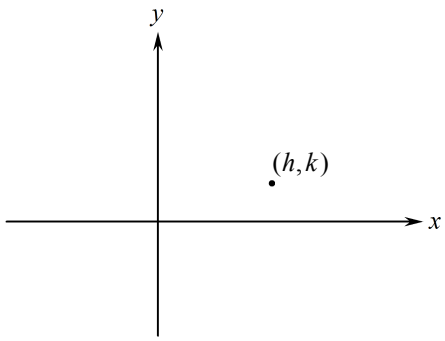
Afsæt følgende punkter i koordinatsystemet:

$(0, h)$

$(-2k, 0)$

$(2h, -2k)$

$(h+k, 0)$



1.2 Øvelse se 1d.

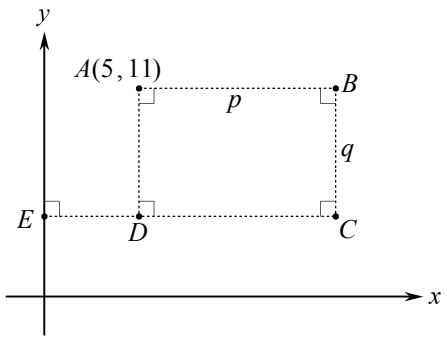
Skriv koordinater ved hjælp af p og q:

$B($, $)$

$C($, $)$

$D($, $)$

$E($, $)$



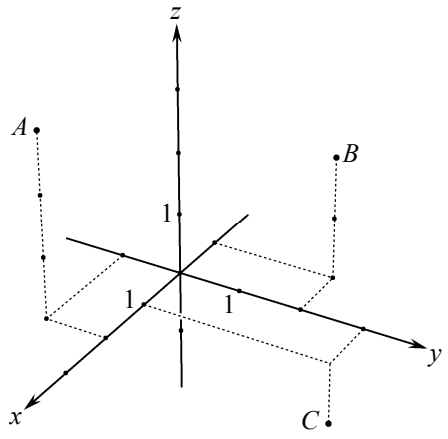
2.1 Øvelse se 2d.

Skriv koordinater:

$A($, , $)$

$B($, , $)$

$C($, , $)$



2.2 Øvelse se 2d.

Afsæt følgende punkter i koordinatsystemet:

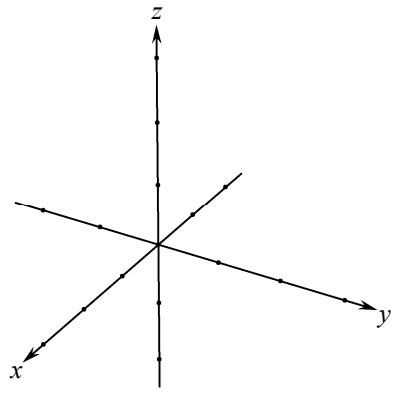
$P(2,3,0)$

$Q(2,3,1)$

$R(0,1,3)$

$S(-2,-2,3)$

$T(1,-2,-2)$



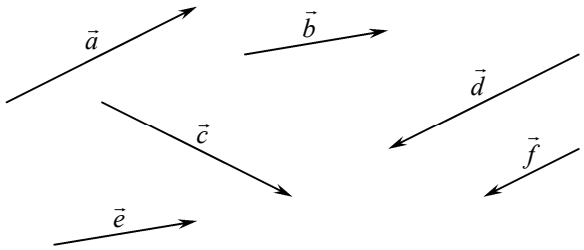
3.1 Øvelse se 3c.

(a) Hvilke af vektorerne er ens?

(b) Hvilke af vektorerne har samme længde?

(c) Hvilke af vektorerne har samme retning?

(d) Hvilke af vektorerne har modsat retning?



3.2 Øvelse se 3e.

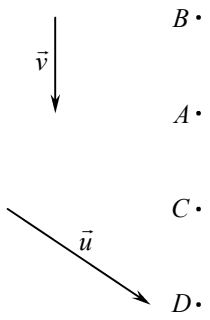
(a) Afsæt $\vec{u}$ ud fra A.

(b) Afsæt $\vec{u}$ ud fra B.

(c) Når $\vec{v}$ afsættes ud fra _____ , er endepunktet C.

(d) Når $\vec{v}$ afsættes ud fra _____ , er endepunktet A.

(e) Når endepunktet for $\vec{v}$ er D, er startpunktet _____.



4.1 Øvelse se 4a og 4b.

Skriv koordinater:

$P = ($

$Q = ($

$\vec{a} = \Big($

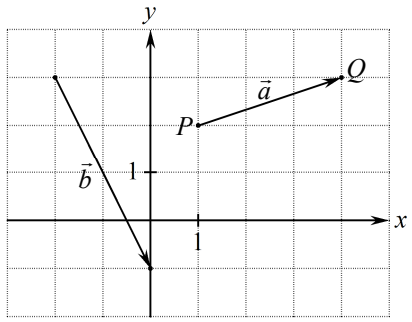
$\vec{b} = \Big($

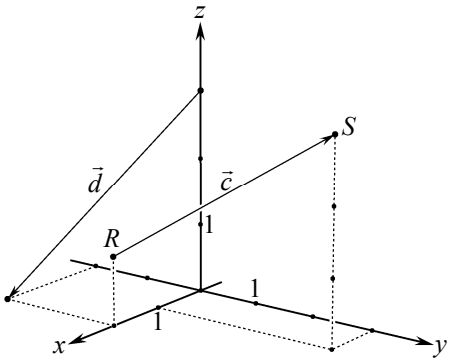
$R = ($

$S = ($

$\vec{c} = \Big($

$\vec{d} = \Big($





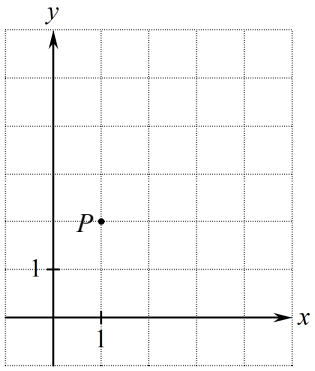
4.2 Øvelse se 4g.

(a) Koordinatsættet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ fortæller at $\vec{a}$ går _____ i x-aksens retning og _____ i y-aksens retning.

(b) Afsæt $\vec{a}$ ud fra P.

(c) Koordinatsættet $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ fortæller at $\vec{b}$ går _____ i x-aksens retning og _____ i y-aksens retning.

(d) Afsæt $\vec{b}$ ud fra P.

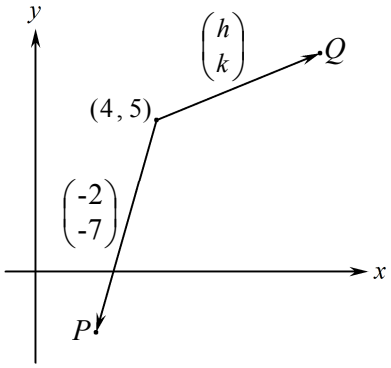


5.1 Øvelse se 5c.

Skriv koordinater:

$P = ($, $) = ($, $)$

$Q = ($



6.1 Øvelse se 6a, 6b, 4a og 5c.

$A = (8, 3)$ og $B = (4, 6)$

(a) $\overrightarrow{AA} = \Big($

(b) Hvis $\overrightarrow{BC} = \vec{o}$, er $C = ($

7.1 Øvelse se 7c og 7d.

(a) Skriv koordinater:

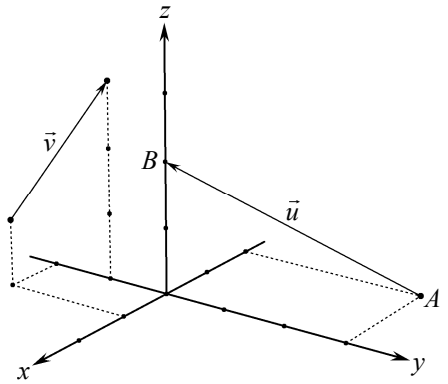
$A = ($

$B = ($

$\overrightarrow{AB} = \left(\right.$

(b) $|\vec{u}| =$

(c) Udregn længden af $\vec{v}$.



7.2 Øvelse se 7b

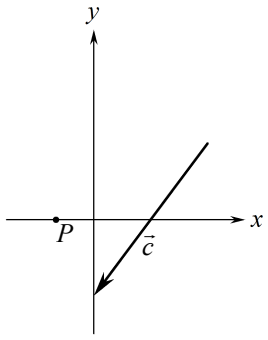
Når $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1+t \end{pmatrix}$, er $|\vec{a}|^2 =$

8.1 Øvelse se 8b.

Når $\vec{u} = \begin{pmatrix} k-3 \\ 9 \end{pmatrix}$, er $-\vec{u} = \left(\right.$

8.2 Øvelse se 8d.

Afsæt den modsatte vektor til $\vec{c}$ ud fra P.



9.1 Øvelse se 9d.

(a) Når $\vec{a} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$, er $\hat{\vec{a}} =$

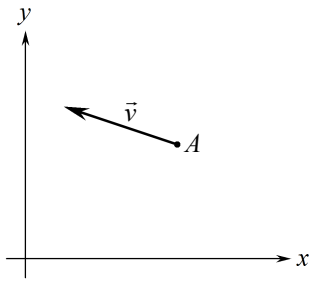
(b) Når $\vec{b} = \begin{pmatrix} k+3 \\ k+1 \end{pmatrix}$, er $\hat{\vec{b}} =$

9.2 Øvelse se 9a og 8d.

(a) Afsæt tværvektoren til $\vec{v}$ ud fra A.

(b) Afsæt den modsatte vektor til $\vec{v}$ ud fra A.

(c) Afsæt $-\hat{\vec{v}}$ ud fra A.



9.3 Øvelse se 9a, 4c, 9d og 5c.

Figuren viser to ens kvadrater.

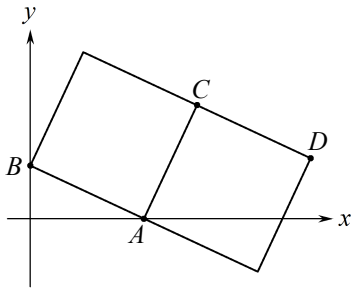
$A(15, 0)$, $B(0, 7)$.

(a) Skriv sand eller falsk ved hver ligning:

$\widehat{\overrightarrow{AB}} = \overrightarrow{AC}$, $\widehat{\overrightarrow{BA}} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

(b) Udregn koordinatsættet til C.

(c) Udregn koordinatsættet til D.



10.1 Øvelse se 10b.

(a) Når $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, er $6\vec{a} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

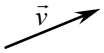
(b) Når $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \end{pmatrix}$, er $4\vec{a} =$

10.2 Øvelse se 10d.

(a) Tegn $3\vec{v}$.

(b) Tegn $0{,}5\vec{v}$.

(c) Tegn $-4\vec{v}$.



11.1 Øvelse se 11a og 10b.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(a) $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

(b) $3\vec{b} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

(c) $\vec{a}+3\vec{b} =$

(d) $2\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

(e) $t\vec{a}+\vec{b} =$

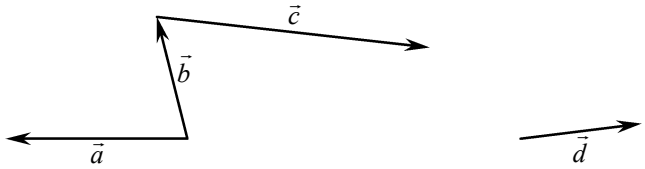
(f) $\vec{a}+2\vec{c} =$

11.2 Øvelse se 11c og 11d.

(a) Tegn vektoren $\vec{a}+\vec{b}$.

(b) Tegn vektoren $\vec{b}+\vec{c}$.

(c) Tegn vektoren $\vec{b}+\vec{d}$.

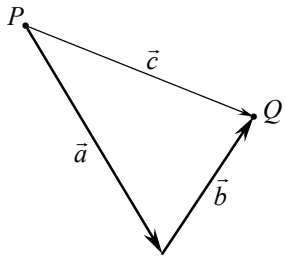


11.3 Øvelse se 11c og 5c.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } P = (1, 2) .$$

(a) Udregn koordinatsættet til $\vec{c}$.

(b) Udregn koordinatsættet til Q .



12.1 Øvelse se 12a og 10b.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ k+2 \end{pmatrix}.$$

(a) $\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

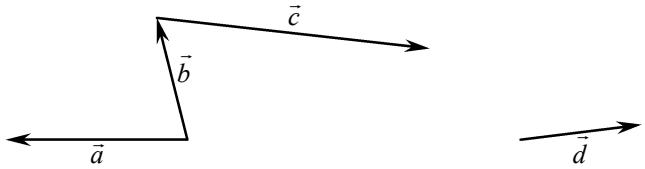
(b) $\vec{a}-5\vec{c} =$

12.2 Øvelse se 12c og 12d.

(a) Tegn vektoren $\vec{a}-\vec{b}$.

(b) Tegn vektoren $\vec{b}-\vec{c}$.

(c) Tegn vektoren $\vec{b}-\vec{d}$.

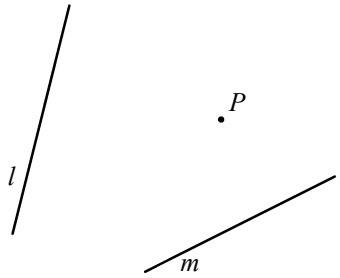


13.1 Øvelse se 13b.

(a) Tegn den linje n som går gennem P og er vinkelret på l.

(b) Tegn det punkt P_l som er projektionen af P på l.

(c) Tegn det punkt P_m som er projektionen af P på m.



13.2 Øvelse se 13b og 13c.

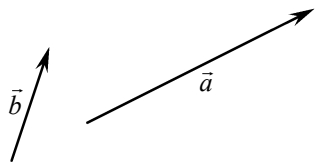
(a) Tegn en linje l som er parallel med $\vec{b}$.

(b) Tegn $\vec{a}$'s startpunkt, og tegn det punkt som er projektionen af dette punkt på l.

(c) Tegn projektionen af $\vec{a}$'s endepunkt på l.

(d) Tegn den vektor som er projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

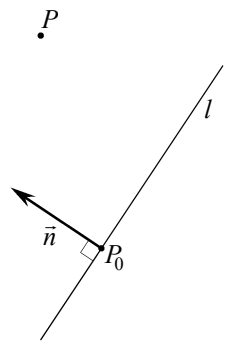
(e) Tegn projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$.



13.3 Øvelse se 13b og 13c

(a) Tegn projektionen af P på l

(b) Tegn projektionen af $\overrightarrow{P_0P}$ på $\vec{n}$.



14.1 Øvelse se 14a, 14b og 14c.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Skriv sand eller falsk ved hver af følgende 5 påstande:

(1) Prikproduktet af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $\vec{c}$.

(2) Prikproduktet af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 14.

(3) Skalarproduktet $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 10.

(4) Prikproduktet $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 10.

(5) $\vec{b} \cdot \vec{c} = 34$.

(b) $\vec{a} \cdot \vec{c} =$ $\qquad\qquad =$

(c) $\vec{b} \cdot \vec{a} =$ $\qquad\qquad =$

(d) $\begin{pmatrix} t-2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3t \end{pmatrix} =$

(e) $\begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} =$ $\qquad\qquad =$

15.1 Øvelse se 15a og 15b.

Skriv sand eller falsk ved hver af følgende 7 påstande:

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

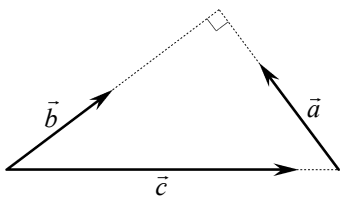
(3) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale

(4) $\vec{a}$ og $\vec{c}$ er ortogonale

(5) $\vec{a}$ er vinkelret på $\vec{b}$

(6) $\vec{a} \perp \vec{c}$

(7) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$



15.2 Øvelse se 5c og 15c.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2t \\ 5 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

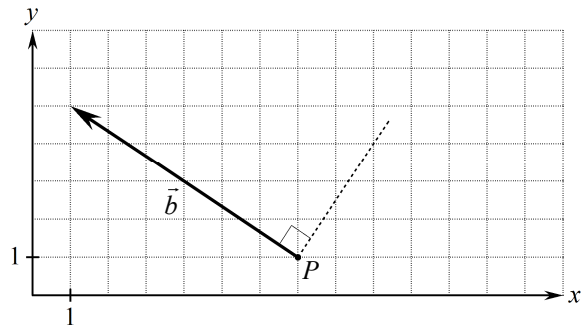
(a) Når $t=3$ er $\vec{a} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$.

(b) Når vi afsætter vektoren fra (a) ud fra punktet $P(7,1)$, så bliver endepunktet

(,) = (,).

(c) Afsæt vektoren fra (a) ud fra P.

(d) For $t=0$, for $t=1$ og for $t=2$ skal du afsætte $\vec{a}$ ud fra P. Skriv t-værdierne ved de 4 vektorer.



(e) $\vec{a}$ er vinkelret på $\vec{b}$ netop når

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____

Når vi udregner venstre side, bliver denne ligning til

=

Vi løser denne ligning mht. t og får

$t =$

dvs. for denne værdi af t er _____.

Vi ser at dette godt kan passe med figuren.

16.1 Øvelse se 16c.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Når v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$, er

$\cos(v) =$ _____

altså

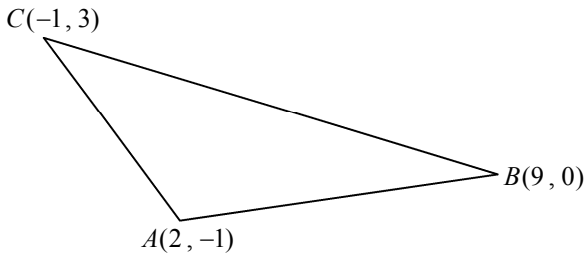
$\cos(v) =$ _____

Nspire løser denne ligning mht. v for _____ og får $v =$ _____.

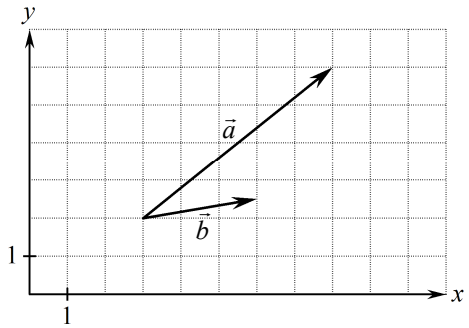
Vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er _____.

16.2 Øvelse se 4c og 16c.

Brug 16b til at udregne vinkel A i trekant ABC.



17.1 Øvelse se 13c og 17c.



(a) Tegn den vektor $\vec{a}_{\vec{b}}$ som er projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

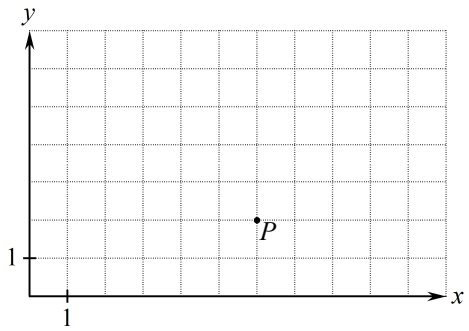
(b) $\vec{a} = \Big($

$\vec{b} = \Big($

(c) Udregn koordinatsættet til $\vec{a}_{\vec{b}}$ og skriv mellemregnnger:

$\vec{a}_{\vec{b}} =$

17.2 Øvelse se 17d, 4g og 13c.



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(a) Udregn længden af $\vec{b}_{\vec{a}}$, og skriv mellemregninger:

$\left|\vec{b}_{\vec{a}}\right| =$

(b) Afsæt $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ud fra P, tegn $\vec{b}_{\vec{a}}$, og mål længden af $\vec{b}_{\vec{a}}$.

18.1 Øvelse se 18c.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(a) Skriv <u>sand</u> eller <u>falsk</u> ved hver af følgende 4 påstande:

(1) Determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $\vec{c}$.

(2) Determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 5.

(3) Determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 11.

(4) $\det(\vec{b}, \vec{c}) = -41$.

(b) $\det(\vec{a}, \vec{c}) =$ $\qquad\qquad =$

(c) $\det(\vec{b}, \vec{a}) =$ $\qquad\qquad =$

(d) $\det\left(\begin{pmatrix} t+3 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$

19.1 Øvelse se 19a og 19b.

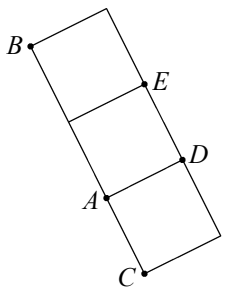
Skriv <u>sand</u> eller <u>falsk</u> ved hver af følgende 6 påstande:

(1) $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ (2) $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 0$

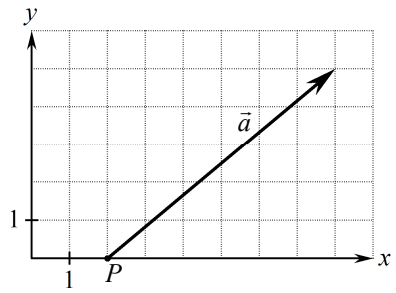
(3) $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = 0$ (4) $\det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}) = 0$

(5) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$

(6) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$



19.2 Øvelse se 19c.



$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2t \\ 4-t \end{pmatrix}$.

(a) For hver af t-værdierne -1, 0, 1, 2 og 3 skal du afsætte $\vec{b}$ ud fra P.

(b) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle netop når

$\det(\vec{a},\vec{b}) =$ _____

Når vi udregner venstre side, bliver denne ligning til

=

Vi løser denne ligning mht. t og får

$t =$

dvs. for denne værdi af t er _____ .

Vi ser at dette godt kan passe med figuren.

20.1 Øvelse se 20a.

Skriv sand eller falsk ved hver af de 4 påstande:

(1) Den numeriske værdi af 5 er -5 .

(2) $|-33| = 33$

(3) $|2| = 2$

(4) Når $x=-2$, er $|x| = -x$.

20.2 Øvelse se 20b, 20d og 18b.

Skriv sand eller falsk ved hver af de 3 påstande:

(1) Når $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er vektorer i planen der udspænder et parallelogram med areal A, så gælder altid at $A = \det(\vec{a},\vec{b})$.

(2) Når PQR er en trekant i planen med areal T, så er $T = \left|\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})\right|$.

(3) $|4\cdot 2 - 3\cdot 1|$ er arealet af det parallelogram der udspændes af vektorerne $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

20.3 Øvelse se 20c

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Udregn arealet A af det parallelogram der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og skriv mellemregninger.

$A =$

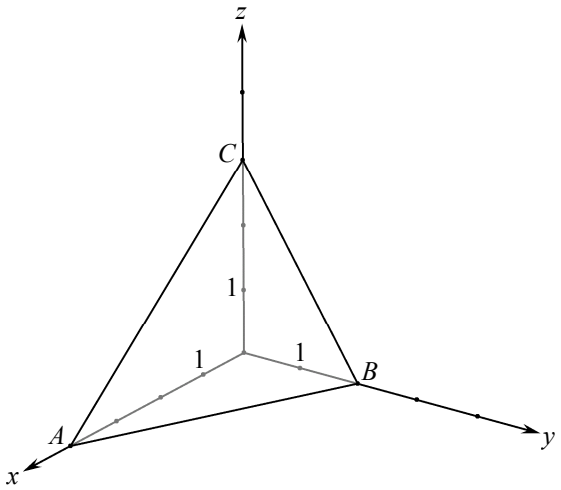
22.1 Øvelse se 21c og 22a.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

(a) $\vec{a} \times b = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

(b) Af (a) kan vi se at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke er parallelle da _____ .

23.1 Øvelse se 23c og 23b.



(a) $A = ($

(b) $B = ($

(c) $C = ($

(d) $\overrightarrow{AB} = \Big($

(e) $\overrightarrow{AC} = \Big($

(f) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \Big($

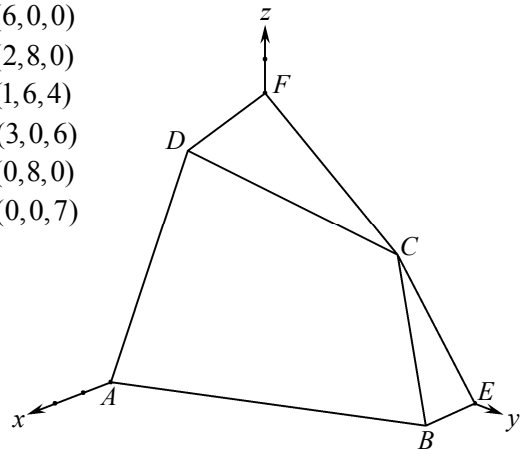
(g) Arealet af trekant ABC er

$T =$

23.2 Øvelse se 23d, 23c og 23b.

Udregn arealet af firkant $ABCD$, og skriv mellemregninger.

$A(6,0,0)$
$B(2,8,0)$
$C(1,6,4)$
$D(3,0,6)$
$E(0,8,0)$
$F(0,0,7)$



23.3 Øvelse se 23a.

(a) Vektorerne $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er vinkelret på hinanden og deres længder er 2 og 3.

$|\vec{u} \times \vec{v}| =$

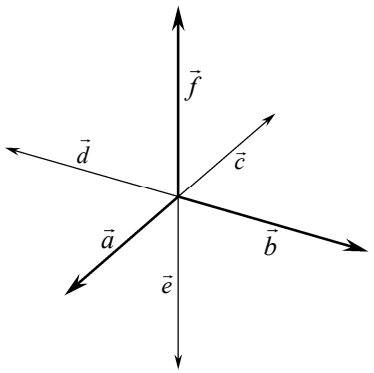
(b) I parallelogrammet $PQRS$ har grundlinjen PQ længden 10, og højden er 4.

$\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| =$

24.1 Øvelse se 24a, 24b, 23a og 22a.

Figuren viser 6 vektorer der er afsat ud fra samme punkt og har længde 1.

Vektorerne er to og to enten modsat rettede eller vinkelret på hinanden.



$\vec{a} \times \vec{b} =$

$\vec{a} \times \vec{c} =$

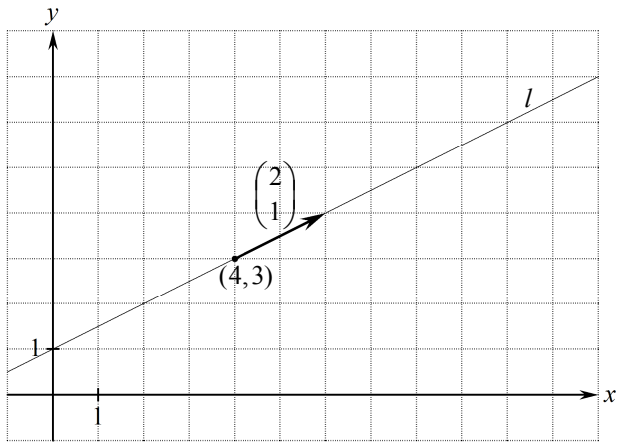
$\vec{a} \times \vec{d} =$

$\vec{e} \times \vec{b} =$

25.1 Øvelse se 10b og 11a.

En linje l har parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



(a) Når $t=2$ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Tegn punktet med disse koordinater.

(b) Når $t=3$ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Tegn punktet med disse koordinater.

(c) Når $t=1$ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Tegn punktet med disse koordinater.

(d) Når $t=0$ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Tegn punktet med disse koordinater.

(e) Når $t=-1$ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Tegn punktet med disse koordinater.

(f) Når $t=-1{,}5$ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Tegn punktet med disse koordinater.

25.2 Øvelse se 25g.

En linje m har parameterfremstillingen

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Når $s=3$ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$, så punktet (,) ligger på m.

(b) Når $s=$ _____ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, så punktet $(5,0)$ ligger på m.

(c) Når $s=$ _____ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 26 \end{pmatrix}$, så punktet $(-8,26)$ ligger på m.

(d) Find et tal s så $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix}$ eller skriv at det ikke kan lade sig gøre.

(e) Ligger punktet $(-3,15)$ på m?

(f) Find et tal s så $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 48 \end{pmatrix}$ eller skriv at det ikke kan lade sig gøre.

(g) Ligger punktet $(-19,48)$ på m?

25.3 Øvelse se 25c, 9a, 9d og 25j.

(a) En linje l går gennem punktet $(3,5)$ og er <u>parallel</u> med vektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Skriv en parameterfremstilling for l:

(b) En linje m går gennem punktet $(-2,1)$ og er <u>vinkelret</u> på vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Skriv en parameterfremstilling for m:

(b) En linje k går gennem punkterne $(1,3)$ og $(-2,8)$.

Skriv en parameterfremstilling for k:

25.4 Øvelse se 25i, 25e, 25f og 15b.

(a) Skriv sand eller falsk ved hver af følgende 6 påstande:

(1) Hvis to linjer k og n begge er parallelle med en vektor $\vec{r}$, så er k og n parallelle.

(2) Hvis $\vec{r}$ er retningsvektor for linjen n, så er $\vec{r}$ vinkelret på n.

(3) Hvis $\vec{r}$ er retningsvektor for linjen n, så er $\vec{r}$ parallel med n.

(4) To linjer er ortogonale netop når deres retningsvektorer er ortogonale.

(5) $\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$ er retningsvektor for linjen med parameterfremstillingen $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

(6) $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ er retningsvektor for linjen med parameterfremstillingen $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

(b) To linjer l og m i rummet har følgende parameterfremstillinger:

$$l:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\1\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad m:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\6\\1\end{pmatrix}.$$

Undersøg om l og m er ortogonale.

26.1 Øvelse se 26c.

En linje l har ligningen

$$l:\ 2x+y-6=0\ .$$

(a) Når vi indsætter koordinaterne for punktet $P(3,0)$ for x og y i ligningen for l, så får vi ligningen

_____ .

(b) Er denne ligning sand? Svar: _____ .

(c) Ligger P på l? Svar: _____ .

(d) Når vi indsætter koordinaterne for punktet $Q(-2,11)$ for x og y i ligningen for l, så får vi ligningen

_____ .

(e) Er denne ligning sand? Svar: _____ .

(f) Ligger Q på l? Svar: _____ .

(g) Når vi indsætter koordinaterne for punktet $R(1,t)$ for x og y i ligningen for l, så får vi ligningen

_____ .

(h) Ligningen er sand netop når $t=$ _____ .

(i) Af punkterne med x-koordinat 1 er det kun punktet (,) der ligger på l.

26.2 Øvelse se 26a, 9a, 9d og 25e .

(a) En linje l går gennem punktet $(-8,5)$ og er vinkelret på vektoren $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Brug 26a til at skrive en ligning for l:

(b) En linje m går gennem punktet $(4,3)$ og er parallel med vektoren $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$. Brug 26a til at skrive en ligning for l:

(c) En linje k har parameterfremstillingen $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. Heraf ser vi at (,) er et punkt på k, og at $\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}$ er parallel med k. Brug 26a til at skrive en ligning for k:

26.3 Øvelse se 26b, 26d og 25e.

(a) Skriv sand eller falsk ved hver af følgende påstande:

(1) Hvis to linjer i planen er vinkelret på samme vektor, så er de to linjer parallelle.

(2) For linjer l og m i planen gælder at hvis l er vinkelret på $\vec{n}$, m er vinkelret på $\vec{p}$, og $\vec{n}$ er vinkelret på $\vec{p}$, så er l vinkelret på m.

(3) Hvis $\vec{n}$ er normalvektor for linjen l, så er $\vec{n}$ vinkelret på l.

(4) Hvis $\vec{n}$ er normalvektor for linjen l, så er $\vec{n}$ parallel med l.

(5) To linjer i planen er ortogonale netop når deres normalvektorer er ortogonale.

(6) To linjer i planen er parallelle netop når deres normalvektorer er parallelle.

(7) $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ er normalvektor for linjen med ligningen $3x + y - 5 = 0$.

(8) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ er retningsvektor for linjen med ligningen $3x + y - 5 = 0$.

(9) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ er normalvektor for linjen med ligningen $3x + y - 5 = 0$.

(10) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ er retningsvektor for linjen med ligningen $3x + y - 5 = 0$.

(b) To linjer l og m er givet ved $l: \ -x + 2y = 0$ og $m: \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Undersøg om l og m er parallelle.

27.1 Øvelse se 27e, 27b, 27d og 27f.

(a) Skriv sand eller falsk ved hver af følgende påstande:

(1) Hvis $\vec{r}$ er parallel med linjen l, og $\vec{n}$ er vinkelret på planen α, så er l parallel med α netop når $\vec{r}$ er vinkelret på $\vec{n}$.

(2) Hvis $\vec{r}$ er parallel med linjen l, og $\vec{n}$ er vinkelret på planen α, så er l parallel med α netop når $\vec{r}$ er parallel med $\vec{n}$.

(3) Hvis $\vec{n}$ er normalvektor for planen α, så er $\vec{n}$ parallel med α.

(4) Hvis $\vec{n}$ er normalvektor for planen α, så er $\vec{n}$ vinkelret på α.

(5) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ er vinkelret på planen med ligningen $x - y + 2z + 6 = 0$.

(6) Hvis en plan α skærer koordinatakserne i punkterne $A(4,0,0)$, $B(0,-2,0)$ og $C(0,0,1)$, så er $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ en normalvektor til α.

28.1 Øvelse se 28a og 28c.

(a) Cirklen med ligningen $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$ har centrum $C(\quad , \quad)$ og radius $r =$.

(b) Cirklen med ligningen $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 7$ har centrum $C(\quad , \quad)$ og radius $r =$.

(c) Cirklen med ligningen $(x+p)^2 + (y-q)^2 = 4^2$ har centrum $C(\quad , \quad)$ og radius $r =$.

28.2 Øvelse se 28e.

Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen

$$x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0$$

29.1 Øvelse se 29a og 29b.

En kugle har centrum $(2,5,-3)$, og punktet $(3,7,0)$ ligger på kuglen.
Skriv en ligning for kuglen.

30.1 Øvelse se 30a.

Skriv sand eller falsk ved hver af følgende påstande:

(1) Afstanden fra $P(3,7)$ til l: $2x-y=3$ er $\dfrac{|2\cdot 3-7-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$.

(2) Afstanden fra $Q(2,3)$ til m: $4x+5y+1=0$ er $\dfrac{|4\cdot 2+5\cdot 3+1|}{\sqrt{2^2+3^2}}$.

(3) Afstanden fra $R(1,-2)$ til n: $3x+y-2=0$ er $\dfrac{|3-2-2|}{\sqrt{9+1}}$.

31.1 Øvelse se 31a og 20a.

Planen α har ligningen $2x-2y+z+d=0$ hvor d er et negativt tal.

(a) Afstanden fra begyndelsespunktet $O(0,0,0)$ til planen α er 2 .
$d=$ _____ .

(b) Afstanden fra $P(t,0,0)$ til planen β: $x+y+z=0$ er $\sqrt{3}$.
$t=$ _____ eller $t=$ _____ .

32.1 Øvelse se 32a, 32b og 32c.

Fire linjer er givet ved

$$l_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},\quad l_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix},\quad l_3\colon ix+jy+k=0,\quad l_4\colon lx+my+n=0 .$$

(a) For at finde vinkel mellem l_1 og l_2 vil vi først finde vinklen v mellem $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$. De to vinkler som l_1 og l_2 danner, er så _____ .

(b) For at finde vinkel mellem l_3 og l_4 vil vi først finde vinklen v mellem $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$. De to vinkler som l_3 og l_4 danner, er så _____ .

(c) For at finde vinkel mellem l_1 og l_4 vil vi først finde vinklen v mellem $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$. De to vinkler som l_1 og l_4 danner, er så _____ .

33.1 Øvelse se 33a, 27b, 27d og 27f.

To planer α og β har ligningerne

$$\alpha:\ ax+by+cz+d=0 \quad \text{og} \quad \beta:\ ex+fy+gz+h=0 .$$

En plan γ indeholder punkterne $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ og $C(c_1,c_2,c_3)$ som ikke ligger på linje.

(a) For at finde vinkel mellem α og β vil vi først finde vinklen v mellem $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$. De to vinkler som α og β danner, er så _____ .

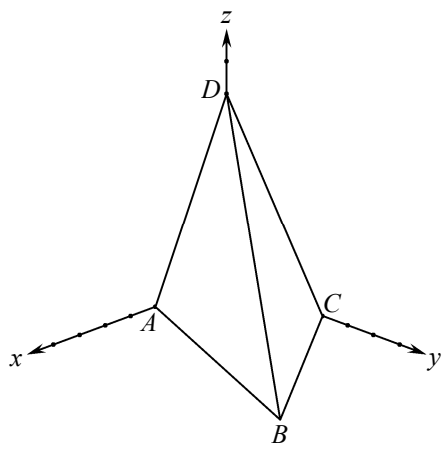
33.1 fortsætter på næste side!

(b) For at finde vinkel mellem α og γ vil vi først finde vinklen v mellem vektoren $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ og vektoren

$\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$. De to vinkler som α og γ danner, er så _____.

34.1 Øvelse se 34a, 24a og 24b.

v er vinklen mellem sidefladerne ABD og BCD.



(a) Skriv sand eller falsk ved hver af følgende påstande:

(1) Vektoren $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ peger ind i vinklen.

(2) Vektoren $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BD}$ peger ind i vinklen.

(3) Vektoren $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$ peger ud af vinklen.

(4) Vektoren $\overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DB}$ peger ud af vinklen.

(5) v er lig vinklen mellem $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$.

(6) v er lig vinklen mellem $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BD}$ og $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}$.

35.1 Øvelse se 35a.

Denne øvelse drejer sig om en plan og to linjer:

$$\alpha:\ 4x+2y-z=0\ ,\quad l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix},\quad m:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}.$$

(a) For at finde vinklen mellem α og l vil vi først finde vinklen mellem $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$.

Hvis denne vinkel er $8°$, så er vinklen mellem α og l lig _____ = _____.

(b) For at finde vinklen mellem α og m vil vi først finde vinklen mellem $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$.

Hvis denne vinkel er $150°$, så er vinklen mellem α og l lig _____ = _____.

36.1 Øvelse se 36a.

(a) l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Et vilkårligt punkt på l er $(x,y) = (\quad , \quad)$.

(b) m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Et vilkårligt punkt på m er $(x,y) = (\quad , \quad)$.

37.1 Øvelse se 37a.

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Brug metoden fra 37a til at finde skæringspunktet mellem linjerne l og m uden at bruge elektronisk hjælpemiddel.

38.1 Øvelse se 38a.

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad C: \ x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0 .$$

Brug metoden fra 38a til at finde de <u>to</u> skæringspunkter mellem linjen l og cirklen C uden at bruge elektronisk hjælpemiddel.

38.2 Øvelse se 38b.

$l: \ 3x - y + 1 = 0$, $\quad C: \ x^2 + (y-1)^2 = 10$.

Brug metoden fra 38b til at finde de <u>to</u> skæringspunkter mellem linjen l og cirklen C uden at bruge elektronisk hjælpemiddel.

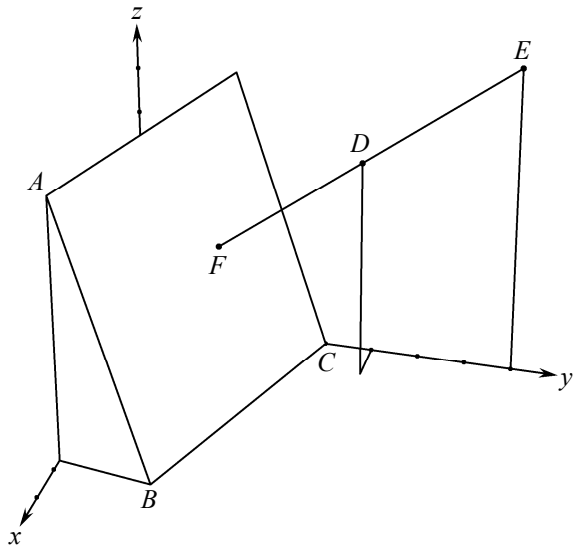
40.1 Øvelse se 40a.

På figuren er en skrå væg der indeholder punkterne A, B og C.

En metalstang er fastgjort på denne væg i punktet F.

Metalstangen er også fastgjort i punkterne D og E øverst på to lodrette stænger.

Skriv hvordan vi kan udregne koordinaterne til F når vi kender koordinaterne til A, B, C, D og E.



42.1 Øvelse se 42a.

Find projektionen af punktet $P(6, 4, 2)$ på planen $\alpha: \ 2x - z = 0$.

43.1 Øvelse

$l: \ ax + by + c = 0$, $\quad C: \ (x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$.

Vi indsætter bestemte tal for a, b og c så linjen l er tangent til cirklen C.

Hvilket tal får vi så når vi udregner $\dfrac{|a \cdot 5 + b \cdot 3 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$? Svar: _____ .

For at svare på dette har vi brugt følgende tre regler fra dette hæfte: _____ og _____ og _____ .

43.2 Øvelse

En opgave drejer sig om en linje l og en cirkel C i planen. Ligningerne for l og C står i opgaven.

(a) Disse to ligninger er et ligningssystem. Hvis vi løser ligningssystemet, hvordan kan vi så se om l er tangent til C? Svar: _____ .

(b) På C's ligning kan vi se centrums koordinater og radius. Hvis vi udregner afstanden fra centrum til l, hvordan kan vi så se om l er tangent til C?
Svar: _____ .

44.1 Øvelse se 44e.

α: $x+y+z+1=0$ er tangentplan til en kugle K med centrum $O(0,0,0)$.
Find en ligning for K.

44.2 Øvelse se 44d.

Punktet $A(1,1,1)$ ligger på en kugle K med centrum $B(1,0,0)$.
Find en ligning for den plan α som er tangentplan til K i A.

48.1 Øvelse se 11a og 14b.

$\vec{a}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(a) $\vec{a}+\vec{b} = \Big($

(b) $\vec{a}\cdot\vec{c} =$

(c) $\vec{b}\cdot\vec{c} =$

(d) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} =$

(e) $\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot c =$

49.1 Øvelse se 10b, 14b og 7b.

$\vec{a}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(a) $3\vec{a} = \Big($

(b) $(3\vec{a})\cdot\vec{a} =$

(c) $|\vec{a}| =$

(d) $|\vec{a}|^2 =$

(e) $3|\vec{a}|^2 =$

(f) Hvilke af de 5 udtryk (a)-(e) er lig hinanden?

51.1 Øvelse se 14b, 7b, 11a, 11c.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

(b) $|\vec{a}| =$

(c) $|\vec{a}|^2 =$

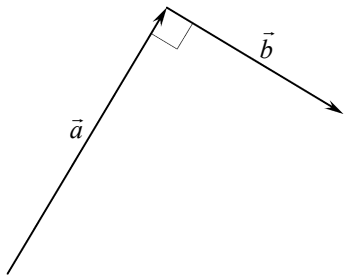
(d) $|\vec{b}|^2 =$

(e) $\vec{a}+\vec{b} = \Big($

(f) $|\vec{a}+\vec{b}| =$

(g) $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\qquad)^2 + (\qquad)^2 =$

(h) Tegn vektoren $\vec{a}+\vec{b}$ på figuren til højre.



(i) Hvis $\vec{a}$ er vinkelret på $\vec{b}$, så følger af

_____ at

$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}+\vec{b}|^2$.

(j) Heri indsætter vi resultaterne fra (c), (d) og (g) og får

_____ = _____ .

(k) Vi trækker det samme fra begge sider i denne ligning og får

0 = _____ .

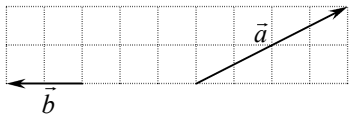
(l) Vi dividerer begge sider med 2 og får

0 = _____ dvs. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ = ____ .

52.1 Øvelse se 13b, 13c og 10d.

Tegn den vektor $\vec{a}_{\vec{b}}$ som er projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

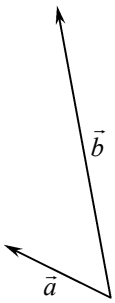
$\vec{a}_{\vec{b}} = t\vec{b}$ når t = ____ .



52.2 Øvelse se 13b, 13c og 10d.

Tegn den vektor $\vec{b}_{\vec{a}}$ som er projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$.

$\vec{b}_{\vec{a}} = t\vec{a}$ når t = ____ .



52.3 Øvelse se 11c, 48a, 15b og 49a.

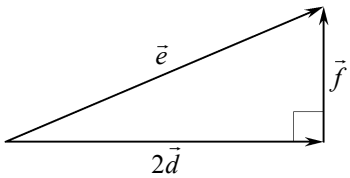
Hvilke af følgende 7 udtryk er lig hinanden?

(1) $\vec{e} \cdot \vec{d}$ (5) $(2\vec{d}) \cdot \vec{d} + \vec{f} \cdot \vec{d}$

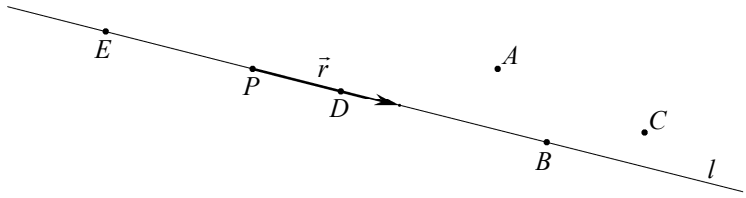
(2) $\vec{f} \cdot \vec{d}$ (6) $3\vec{d}$

(3) $(2\vec{d} + \vec{f}) \cdot \vec{d}$ (7) $2|\vec{d}|^2$

(4) $2\vec{d} + \vec{f} + \vec{d}$



53.3 Øvelse se 10d, 25j og 25k.



(a) Tegn vektoren $\overrightarrow{PA}$.

(b) Skriv sand eller falsk ved hver af følgende 10 påstande:

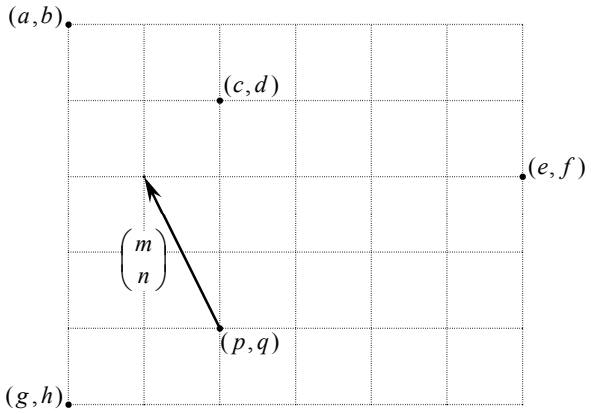
(1) A ligger på l.
(2) $\overrightarrow{PA}$ er parallel med l.
(3) Der findes et tal t så $\overrightarrow{PA} = t\vec{r}$.
(4) B ligger på l.
(5) $\overrightarrow{PB}$ er parallel med l.
(6) Der findes et tal t så $\overrightarrow{PB} = t\vec{r}$.
(7) E ligger på l.
(8) $\overrightarrow{PE}$ er parallel med l.
(9) Der findes et tal t så $\overrightarrow{PE} = t\vec{r}$.
(10) Der findes et tal t så $\overrightarrow{PP} = t\vec{r}$.
(11) Der findes et tal t så $\overrightarrow{PC} = t\vec{r}$.
(12) C ligger på l.

(c) Når $\overrightarrow{PD} = t\vec{r}$, er $t =$ _____.

(d) Når $\overrightarrow{PE} = t\vec{r}$, er $t =$ _____.

54.1 Øvelse se 4c, 15b og 14b.

Figuren viser vektoren $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ og nogle punkter.



(a) Tegn vektoren $\vec{v}$ fra punktet (p,q) til punktet (e,f).

(b) $\vec{v} = \Big($

(c) Skriv sand eller falsk ved hver af følgende påstande:

(1) $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-p \\ b-q \end{pmatrix} = 0$

(2) $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c-p \\ d-q \end{pmatrix} = 0$

(3) $m(c-p) + n(d-q) = 0$

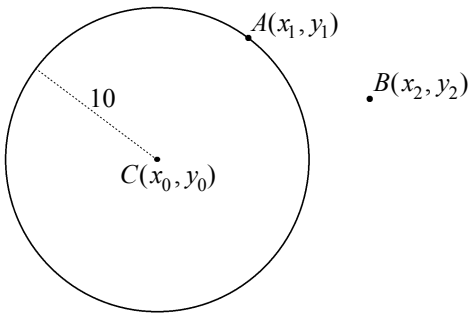
(4) $m(e-p) + n(f-q) = 0$

(5) $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g-p \\ h-q \end{pmatrix} = 0$

(d) Tegn tre nye punkter (x,y) hvor $m(x-p) + n(y-q) = 0$

56.1 Øvelse se 4c og 7b.

På figuren er en cirkel med radius 10.



(a) Tegn vektoren $\overrightarrow{CB}$.

(b) $\overrightarrow{CB} = \Big($

(c) $|\overrightarrow{CB}| =$

(d) $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} =$ ____.

(e) $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 =$ ____.

(f) Tegn tre nye punkter (x,y) hvor $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 100$.

A
afstand 5, 15
afstand fra punkt til linje i planen 15
afstand fra punkt til plan 15
afstand mellem punkter 5
afsætte vektor ud fra punkt 4, 5
areal 10, 11
areal af firkant 10, 12
areal af firkant i rummet 12
areal af parallelogram 10, 11
areal af parallelogram i planen 10
areal af parallelogram i rummet 11
areal af trekant 10, 12
areal af trekant i planen 10
areal af trekant i rummet 12
B
begyndelsespunkt 3
beviser 19
D
determinant 10
E
endepunkt for vektor 4
F
formler 19
G
gange, krydsprodukt 11, 12
gange, prikprodukt 8, 9
gange, tal og vektor 7
gange, vektorprodukt 11
H
højrehåndsregel 12
K
koordinater til punkt i planen 3
koordinater til punkt i rummet 3
koordinater til vektors endepunkt 5
koordinatgeometri 12
koordinatsystem i planen 3
koordinatsystem i rummet 3
koordinatsæt for vektor 4
koordinatsæt til punkt 3
krydsprodukt 11, 12
L
ligning for cirkel 14, 23
ligning for kugle 15, 23
ligning for linje 13, 22
ligning for plan 13, 14, 23
længde af projektion af vektor 9
længde af vektor 5
M
minus, vektorer 8
modsat vektor 6
N
normalvektor 13, 14, 15, 16, 22
normalvektor for linje 13, 22
normalvektor for plan 14
nulvektor 5, 21
numerisk værdi 10
P
parallel 10, 11
parallel i planen 10
parallel i rummet 11
parameterfremstilling for linje 12, 13, 22
plus, vektorer 7
prikke ind i en parentes 20
prikke med nulvektor 21
prikprodukt 8, 9
projektion 8, 9, 17, 18, 21
projektion af punkt på linje 8, 17
projektion af punkt på plan 8, 18
projektion af vektor på vektor 8, 9, 21
R
retningsvektor 12, 15, 16
røringspunkt 18
røringspunkt på cirkel 18
røringspunkt på kugle 18
S
skalarprodukt 8
skæring 16, 17
skæring mellem linje og cirkel 17
skæring mellem linje og kugle 17
skæring mellem linje og plan 17
skæring mellem to linjer 16, 17
startpunkt for vektor 4
T
tal gange vektor 7
tangent 18
tangent til cirkel 18
tangentplan 18, 19
tværvektor 6
V
vektor 4
vektor gange tal 7
vektor minus vektor 8
vektor plus vektor 7
vektorprodukt 11
vektors endepunkt 4
vektors endepunkt, koordinater 5
vektors koordinatsæt 4
vektors længde 5
vektors startpunkt 4
vilkårligt punkt på linje 16
vinkel 9, 15, 16
vinkel mellem linje og plan 16
vinkel mellem linjer 15
vinkel mellem planer 16
vinkel mellem sideflader 16
vinkel mellem vektorer 9
vinkelret 9, 12, 21