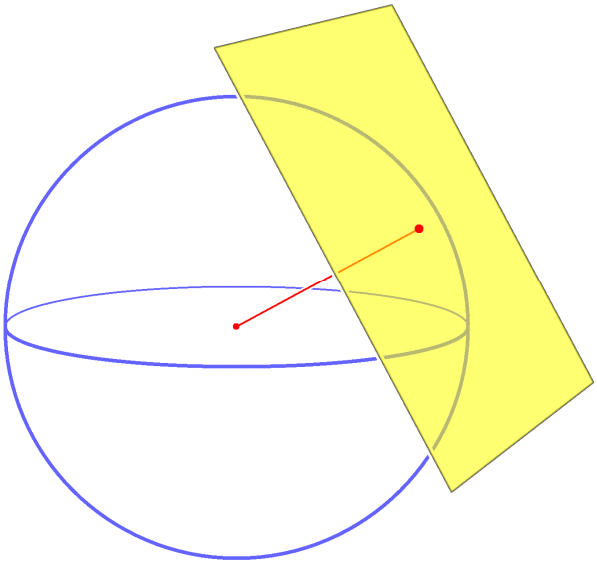
Vektorer
og
koordinatgeometri

for gymnasiet, udgave 2



2014 Karsten Juul

VEKTORER

1. Koordinater til punkt i planen 1
2. Koordinater til punkt i rummet....1
3. Vektor: Definition, sprogbrug, m.m. 2
4. Vektor: Koordinater 2
5. Koordinater til vektors endepunkt....3
6. Nulvektor 3
7. Længde af vektor....3
8. Modsat vektor....4
9. Tværvektor 4
10. Tal gange vektor....5
11. Vektor plus vektor....5
12. Vektor minus vektor....6
13. Projektion 6
14. Prikprodukt....7
15. Prikprodukt: Vinkelret?....7
16. Prikprodukt: Vinkel mellem vektorer....8
17. Prikprodukt: Projektion af vektor....8
18. Determinant....9
19. Determinant: Parallel?....10
20. Determinant: Areal....10
21. Krydsprodukt....11
22. Krydsprodukt: Parallel?....11
23. Krydsprodukt: Areal....11
24. Krydsprodukt: Vinkelret vektor 12

KOORDINATGEOMETRI

25. Parameterfremstilling for linje 13
26. Ligning for linje 14
27. Ligning for plan....15
28. Ligning for cirkel 16
29. Ligning for kugle....16
30. Afstand fra punkt til linje 17
31. Afstand fra punkt til plan 17
32. Vinkel mellem linjer....17
33. Vinkel mellem planer....18
34. Vinkel mellem sideflader 18
35. Vinkel mellem linje og plan 19
36. Vilkårligt punkt på linje 19
37. Skæring mellem to linjer *l* og *m* 19
38. Skæring mellem linje og cirkel 20
39. Skæring mellem linje og kugle....20
40. Skæring mellem linje og plan....20
41. Projektion af punkt på linje 21
42. Projektion af punkt på plan 21
43. Tangent til cirkel 22
44. Tangentplan til kugle....22

BEVISER

45. Bevis for at vi må prikke ind i en parentes....23
46. Bevis for formel 46a....23
47. Bevis for at vi får nul når vi prikker med nulvektor....23
48. Bevis for at vinkelrette vektorer har skalarprodukt nul....23
49. Bevis for formlen for projektion af vektor 24
50. Bevis for parameterfremstilling for en linje 24
51. Bevis for ligning for linje 25
52. Bevis for ligning for plan 25
53. Bevis for ligning for cirkel 25
54. Bevis for ligning for kugle 25

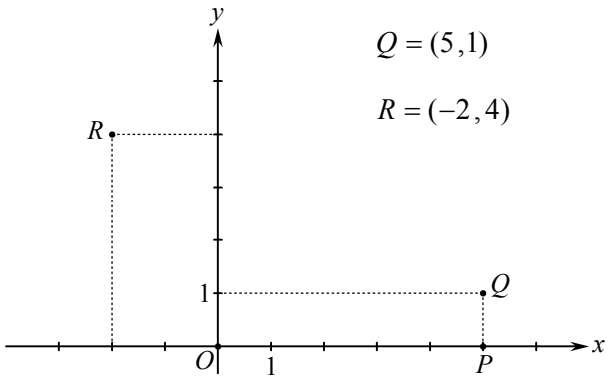
En tidligere version af dete hæfte har skiftet adresse til
http://mat1.dk/vektorer_og_koordinatgeometri_for_gymnasiet_udgave_1.pdf
Denne tidligere version indeholder mange øvelser.

Vektorer og koordinatgeometri for gymnasiet, udgave 2 © 2014 Karsten Juul
Nyeste version af dette hæfte kan downloades fra mat1.dk/noter.htm . Hæftet må bruges i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til kj@mat1.dk som oplyser at dette hæfte benyttes, og oplyser hold, niveau, lærer og skole. 10/5-2015

VEKTORER.

Det hedder **et** plan, ikke **en** plan, men i geometri er begge dele korrekt. I eksamensopgaver skrives **en** plan.

1. Koordinater til punkt i planen



1a. Koordinatsystem i planen

Figuren viser et koordinatsystem i planen
De to koordinatakser er vinkelret på hinanden.

1b. Begyndelsepunkt *O*

Begyndelsespunktet er koordinataksernes skæringspunkt. Bogstavet O bruges ofte til at betegne begyndelsespunktet.
O har koordinatsættet (0,0).

1c. Koordinatsæt til punktet *Q*

Vi anbringer et flytbart punkt i O.
Vi forskyder punktet 5 enheder i x-aksens retning så det kommer fra O til P.
Når vi forskyder 5 enheder i x-aksens retning, så bliver x-koordinaten 5 enheder større.
Når vi forskyder i x-aksens retning er det kun x-koordinaten der ændres.
Altså har P koordinatsættet $(5,0)$.

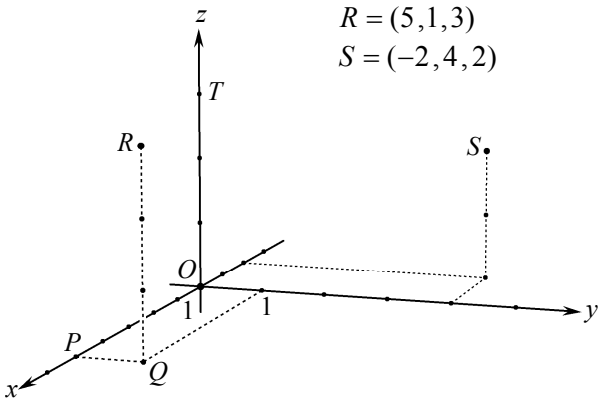
Fra P forskyder vi punktet 1 enhed i y-aksens retning så det kommer fra P til Q.
Når vi forskyder 1 enhed i y-aksens retning, så bliver y-koordinaten 1 enhed større.
Når vi forskyder i y-aksens retning er det kun y-koordinaten der ændres.
Altså har Q koordinatsættet $(5,1)$.

Det første tal i koordinatsættet er punktets x-koordinat.
Det andet tal i koordinatsættet er punktets y-koordinat.

1d. Koordinatsæt til punktet *R*

På den øverste figur kan vi kan komme til R ved at starte i O, forskyde -2 i x-aksens retning og forskyde 4 i y-aksens retning. Derfor er $R = (-2,4)$.

2. Koordinater til punkt i rummet



2a. Koordinatsystem i rummet

Figuren viser et koordinatsystem i rummet
De tre koordinatakser er vinkelret på hinanden.

2b. Begyndelsepunkt *O*.

Begyndelsespunktet er koordinataksernes skæringspunkt. Bogstavet O bruges ofte til at betegne begyndelsespunktet.
O har koordinatsættet (0,0,0).

2c. Koordinatsæt til punktet *R*

Vi anbringer et flytbart punkt i O.
Vi forskyder punktet 5 enheder i x-aksens retning så det kommer fra O til P.
Når vi forskyder 5 enheder i x-aksens retning, så bliver x-koordinaten 5 enheder større.
Når vi forskyder i x-aksens retning er det kun x-koordinaten der ændres.
Altså har P koordinatsættet $(5,0,0)$.

Fra P forskyder vi punktet 1 enhed i y-aksens retning så det kommer fra P til Q.
Når vi forskyder 1 enhed i y-aksens retning, så bliver y-koordinaten 1 enhed større.
Når vi forskyder i y-aksens retning er det kun y-koordinaten der ændres.
Altså har Q koordinatsættet $(5,1,0)$.

Fra Q forskyder vi punktet 3 enheder i z-aksens retning så det kommer fra Q til R.
Når vi forskyder 3 enheder i z-aksens retning, så bliver z-koordinaten 3 enheder større.
Når vi forskyder i z-aksens retning, er det kun z-koordinaten der ændres.
Altså har R koordinatsættet $(5,1,3)$.

Det første tal i koordinatsættet er punktets x-koordinat. Det andet tal i koordinatsættet er punktets y-koordinat. Det tredje tal i koordinatsættet er punktets z-koordinat.

Bemærk at punkterne R og T ligger lige langt over xy-planen som indeholder x-aksen og y-aksen.

Afsnit 2 fortsætter på næste side!

2d. Koordinatsæt til punktet *S*

På den nederste figur på side 3 kan vi komme til S ved at

starte i O, forskyde -2 i x-aksens retning, 4 i y-aksens retning og 2 i z-aksens retning.

Derfor er $S=(-2,4,2)$.

3. Vektor: Definition, sprogbrug, mm.

3a. En vektor er en pil. Hvis vi forskyder en pil uden at dreje den, så er pilen stadig samme vektor.

3b. En vektor kan betegnes med et lille bogstav med pil over.

3c. På figurerne 3f og 3g gælder:

Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er samme vektor, for de kan forskydes over i hinanden da de har samme længde og samme retning.

Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{c}$ er ikke samme vektor da de har forskellig længde.

Vektorerne $\vec{d}$ og $\vec{e}$ er ikke samme vektor da de har forskellig retning.

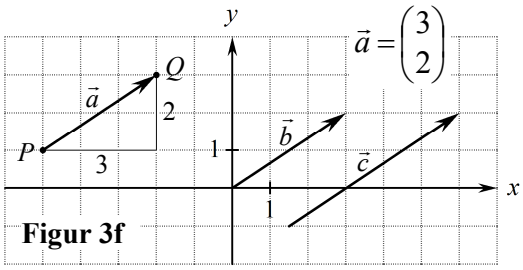
3d. På figur 3f går vektoren $\vec{a}$ fra punktet P til punktet Q. Så kan denne vektor betegnes med $\overrightarrow{PQ}$.

Der gælder at $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}$ og $\vec{b}=\overrightarrow{PQ}$.

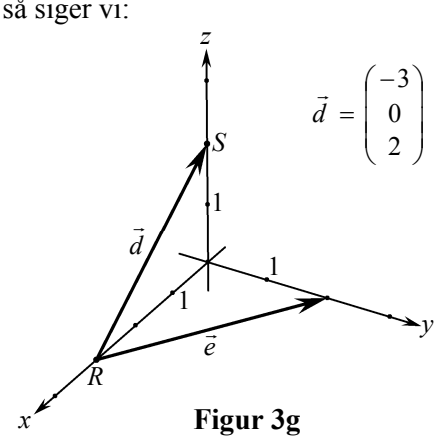
3e. Når en vektor $\vec{a}$ er anbragt så den går fra et punkt P til et punkt Q, så siger vi:

P er vektorens startpunktog er Q vektorens slutpunkt.

Når vi afsætter vektoren ud fra P, så er dens slutpunkt Q.

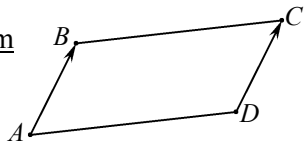


Figur 3f



Figur 3g

3h. En firkant $ABCD$ er et parallelogram netop hvis $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.



4. Vektor: Koordinater

4a. Vi kan få en vektors koordinatsæt ved at

trække startpunktets koordinater fra slutpunktets koordinater.

4b. En vektors koordinatsæt skrives lodret.

4c. Når $A=(a_1,a_2)$ og $B=(b_1,b_2)$, er

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \end{pmatrix}$$

4d. Når $A=(a_1,a_2,a_3)$ og $B=(b_1,b_2,b_3)$, er

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}$$

4e. Eksempel

På figur 3f er $P=(-5,1)$ og $Q=(-2,3)$

så $$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix} -2-(-5) \\ 3-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dvs. $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4f. Eksempel

På figur 3g er $R=(3,0,0)$ og $S=(0,0,2)$

så $$\overrightarrow{RS}=\begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-0 \\ 2-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dvs. $\vec{d}=\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4g. Dette koordinatsæt fortæller at $\vec{a}$ går

3 i x-aksens retning og

2 i y-aksens retning.

Dette kan vi også se på figur 3f.

4h. Dette koordinatsæt fortæller at $\vec{d}$ går

-3 i x-aksens retning,

0 i y-aksens retning og

2 i z-aksens retning.

Dette kan vi også se på figur 3g.

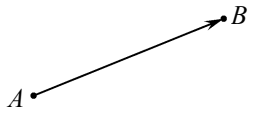
Afsnit 4 fortsætter på næste side!

4i. Hvis en vektors startpunkt er O(0,0) , så er vektorens koordinater = slutpunktets koordinater.
En vektor er stedvektor for et punkt hvis den går fra O(0,0) til punktet. $\overrightarrow{OA}$ er stedvektor for A .

5. Koordinater til vektors slutpunkt

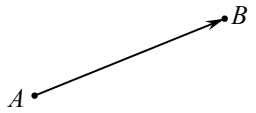
5a. Når $A=(a_1,a_2)$ og $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ er

$$B=(a_1+x\ ,\ a_2+y)$$



5b. Når $A=(a_1,a_2,a_3)$ og $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ er

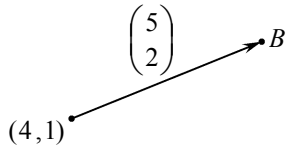
$$B=(a_1+x\ ,\ a_2+y\ ,\ a_3+z)$$



5c. I ord kan de to formler udtrykkes sådan:

Når en vektor er afsat ud fra et punkt,
og man lægger vektorens koordinater til punktets koordinater,
så får man koordinaterne til vektorens slutpunkt.

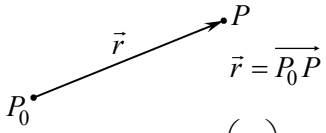
5d. Eksempel



Ud fra figuren slutter vi:

$$B\ =\ (4+5\ ,\ 1+2)\ =\ (9\ ,3)$$

5e. Eksempel



$$\vec{r}=\overrightarrow{P_0P}$$

$$P_0=(x_0,y_0,z_0)\ ,\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}\ ,\quad P=(x,y,z)$$

Med disse betegnelser får vi ud fra figuren:

$$(x,y,z)\ =\ (x_0+r_1\ ,\ y_0+r_2\ ,\ z_0+r_3)$$

6. Nulvektor

6a. Vekoren med længde 0 kaldes nulvektor og betegnes med $\vec{o}$ som er bogstavet lille o med pil over.

6b. I planen er $\vec{o}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, og i rummet er $\vec{o}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

6c. På en figur er nulvektor et punkt.

7. Længde af vektor

7a. Symbolet $|\vec{v}|$ betyder længden af vektoren $\vec{v}$.

7b. Når $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, er

$$|\vec{v}|\ =\ \sqrt{x^2+y^2}\ .$$

7c. Når $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, er

$$|\vec{v}|\ =\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

7d. **Opgave** Bestem længden af vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1{,}5\\3{,}6\end{pmatrix}$.

I rummet er udregningerne de samme bortset fra at der er tre koordinater.

Svar 1 Se 7b.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1{,}5\\3{,}6\end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{1{,}5^2+3{,}6^2}\ =\ \underline{\underline{3{,}9}}$$

Svar 2

norm = længde

$\vec{a}=\begin{bmatrix}1.5\\3.6\end{bmatrix}$

$\text{norm}\left(\begin{bmatrix}1.5\\3.6\end{bmatrix}\right)=3.9$ udregnet af Nspire

Længde af $\vec{a}$ er 3.9

Svar 3

norm = længde

$\mathbf{a}:=\begin{bmatrix}1.5\\3.6\end{bmatrix}$

$\text{norm}(\mathbf{a})=3.9$ udregnet af Nspire

Længde af $\vec{a}$ er 3.9

Afsnit 7 fortsætter på næste side!

7e. **Opgave** Bestem afstand mellem $A(-2,11)$ og $B(6,5)$.

I rummet er udregningerne de samme bortset fra at der er tre koordinater.

Svar 1 Se 4c, 7b.

$A(-2,11)$ $B(6,5)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-(-2) \\ 5-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8^2+(-6)^2} = 10$$

Afstand mellem A og B er $\underline{\underline{10}}$

Svar 2 Se 4c.

norm = længde

$A(-2,\ 11)$ $B(6,\ 5)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 6-(-2) \\ 5-11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{norm}\left(\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}\right) = 10$$ udregnet af Nspire

Afstand mellem A og B er 10

Svar 3 Se 4i, 4c.

norm = længde

$$\mathbf{OA} := \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix} \quad \mathbf{OB} := \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} := \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}$$ udregnet af Nspire

$$\text{norm}(\mathbf{AB}) = 10$$ udregnet af Nspire

Afstand mellem A og B er 10

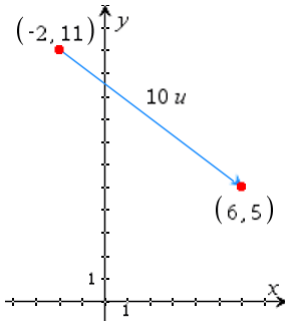
Kontrol ved elektronisk aflæsning på figur

Afsætter punkter med A's og B's koordinater.

Forbinder disse med vektor.

Måler elektronisk dennes længde.

Resultat er 10 ligesom ved udregning.



8. Modsat vektor

8a. **Koordinater til modsat vektor**

8b. En vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ har den <u>modsatte vektor</u>

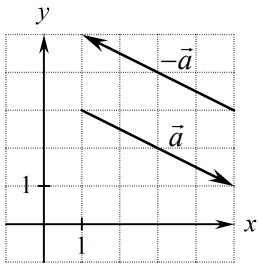
$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$$

8c. En vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ har den <u>modsatte vektor</u>

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}.$$

8d. **Modsat vektor på figur**

Den <u>modsatte vektor</u> til $\vec{a}$ har <u>samme længde</u> som $\vec{a}$ og har <u>modsat retning</u> af $\vec{a}$



8e. **Eksempel**

På figuren er $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Så er $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Se 8b

I rummet er udregningen den samme bortset fra at der er tre koordinater.

9. Tværvektor

Kun plangeometri. I rummet kan bruges krydsprodukt.

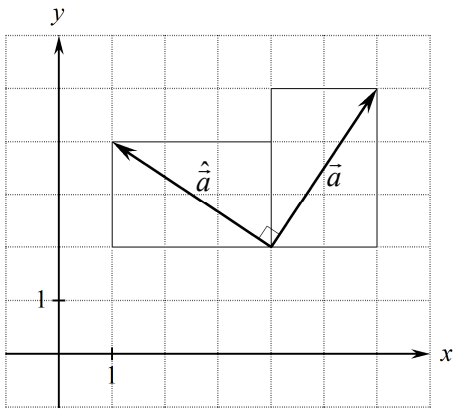
9a. Når vi drejer en vektor 90° mod uret, så får vi vektorens <u>tværvektor</u>. Se figur 9b

Vi skriver $\frown$ over en vektor for at betegne tværvektoren.

$\hat{\vec{a}}$ er tværvektoren til $\vec{a}$.

<u>En vektor i rummet har IKKE en tværvektor.</u>

Dette skyldes at en vektor i rummet kan drejes 90° på uendelig mange måder. Vi kan ikke vide hvilken af disse vi skal bruge.



Figur 9b

Afsnit 9 fortsætter på næste side!

9c. Formel for tværvektor

Vi udregner koordinaterne til tværvektoren ved hjælp af følgende formel:

9d.
$$\widehat{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

9e. Eksempel: Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, er $\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Se figur 9b.

9f. Eksempel

Figur 9g viser et kvadrat.

Af 9a får vi

Du skal IKKE huske at reglen er nr. 9a. Du skal læse reglen, huske den, og forstå at den bruges her. Det samme gælder alle tilsvarende henvisninger.

$$\overrightarrow{AB} = \widehat{\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Vi omskriver højresiden med Formel 9d og får

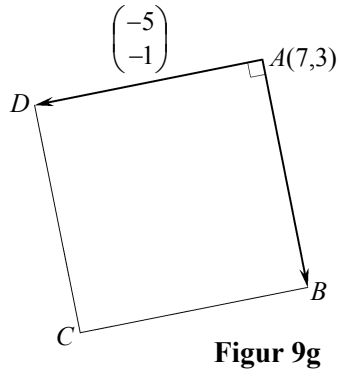
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Af dette og Formel 5a får vi

$$B = (7+1,\, 3+(-5))$$

Altså er

$$B = (8,-2)$$



Figur 9g

10. Tal gange vektor

10a. Koordinater til $k\vec{a}$

Vi ganger en vektor med et tal ved at gange hver af vektorens koordinater med tallet:

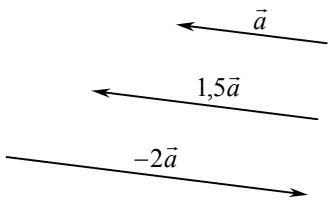
10b.
$$k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

10c.
$$k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

10d. $k\vec{a}$ på en figur

$1{,}5\vec{a}$ er ensrettet med $\vec{a}$ da $1{,}5$ er positiv.
$1{,}5\vec{a}$ er $1{,}5$ gange så lang som $\vec{a}$.

$-2\vec{a}$ er modsat rettet $\vec{a}$ da -2 er negativ.
$-2\vec{a}$ er 2 gange så lang som $\vec{a}$.



10e. $0\vec{a}$ er nulvektoren $\vec{o}$.

10f. Længden af $k\vec{a}$ er $|k|$ gange længden af $\vec{a}$. Se 17c.

10g. $k\vec{a}$ er ensrettet med $\vec{a}$ hvis k er positiv. $k\vec{a}$ er modsatrettet $\vec{a}$ hvis k er negativ.

10h. Hvis $\vec{b}$ er $\vec{o}$ eller parallel med $\vec{a}$, så findes et tal k så $\vec{b}$ er $k\vec{a}$.

11. Vektor plus vektor

Koordinater til $\vec{a}+\vec{b}$

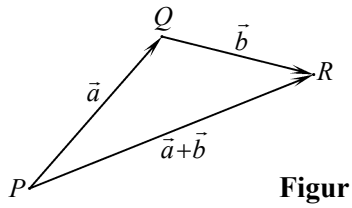
11a.
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$$

11b.
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$$

Afsnit 11 fortsætter på næste side!

11c. $\vec{a}+\vec{b}$ på en figur

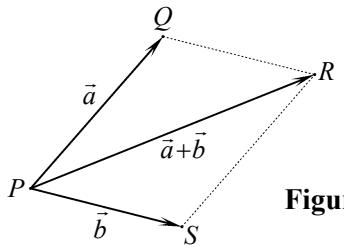
Hvis $\vec{b}$ er afsat i forlængelse af $\vec{a}$ som på figur 11e, så er $\vec{a}+\vec{b}$ vektoren $\overrightarrow{PR}$ fra $\vec{a}$'s startpunkt til $\vec{b}$'s spids.



Figur 11e

11d. $\vec{a}+\vec{b}$ på en figur

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er afsat ud fra samme punkt som på figur 11f, og $PQRS$ er et parallelogram, så er digonalen $\overrightarrow{PR}$ lig $\vec{a}+\vec{b}$.



Figur 11f

11g. Eksempel

Figur 11h viser tre vektorer. Af regel 11c får vi

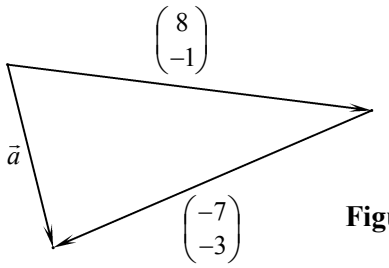
$$\vec{a}=\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7\\-3\end{pmatrix}$$

Heraf og af 11a får vi

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}8+(-7)\\-1+(-3)\end{pmatrix}$$

Altså er

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$$



Figur 11h

12. Vektor minus vektor

Koordinater til $\vec{a}-\vec{b}$

12a.

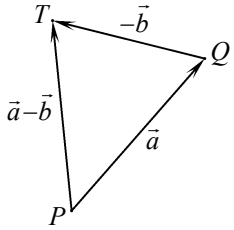
$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\end{pmatrix}$$

12b.

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{pmatrix}$$

12c. $\vec{a}-\vec{b}$ på en figur

Hvis $\vec{a}$ og $-\vec{b}$ er afsat i forlængelse af hinanden som på figur 12e, så er $\overrightarrow{PT}$ lig $\vec{a}-\vec{b}$.

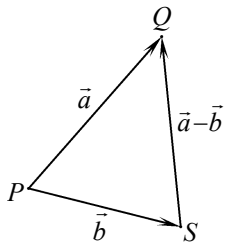


Figur 12e

12d. $\vec{a}-\vec{b}$ på en figur

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er afsat ud fra samme punkt, så er $\vec{a}-\vec{b}$ vektoren fra $\vec{b}$'s spids til $\vec{a}$'s spids.

På figur 12f, er $\overrightarrow{SQ}$ lig $\vec{a}-\vec{b}$.

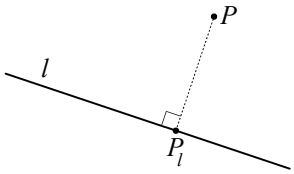


Figur 12f

13. Projektion

13a. Projektion af punkt på linje

Når vi fra et punkt P går vinkelret ind på en linje l, kommer vi til et punkt P_l på l som vi kalder projektionen af P på l.



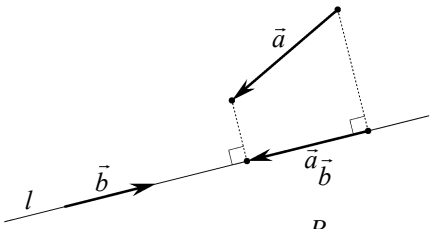
13b. Sådan kan vi tegne projektionen (plangeometri)

For at tegne projektionen af et punkt P på en linje l tegner vi den linje m som går gennem P og er vinkelret på l. Skæringspunktet mellem m og l er det punkt P_l vi kalder projektionen af P på l.

Afsnit 13 fortsætter på næste side!

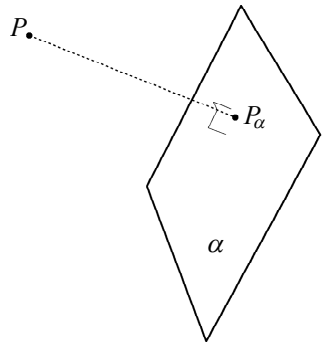
13c. Projektion af vektor på vektor

Linjen l er parallel med $\vec{b}$.
Når vi projicerer startpunkt og slutpunkt for $\vec{a}$ på l, så får vi startpunkt og slutpunkt for en vektor $\vec{a}_{\vec{b}}$ som vi kalder projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.



13d. Projektion af punkt på plan

Når vi fra et punkt P går vinkelret ind på en plan α, kommer vi til et punkt P_α i α som vi kalder projektionen af P på α.



14. Prikprodukt

14a. Prikproduktet $\vec{a}\cdot\vec{b}$ af to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er et tal.
Når vi kender koordinaterne, kan vi udregne prikproduktet ved hjælp af formlerne i rammerne.
Prikproduktet kaldes også skalarproduktet. "Skalar" betyder tal.

14b.
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2$$

14c.
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$

15. Prikprodukt: Vinkelret?

15a. Symbolet $\vec{a}\perp\vec{b}$ læses "$\vec{a}$ er vinkelret på $\vec{b}$" eller "$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale".

15b. $\vec{a}\perp\vec{b}$ netop når $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
hvis hverken $\vec{a}$ eller $\vec{b}$ er nulvektor.

15c. **Opgave** $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestem t så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

I rummet er udregningerne de samme bortset fra at der er tre koordinater.

Svar 1 Uden hjælpemidler, se 14b.

$\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$ er ikke nulvektor så de er ortogonale netop når deres prikprodukt er 0.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}=0$$
$$3\cdot t+1\cdot 2=0$$
$$3\cdot t=-2$$
$$t=-\tfrac{2}{3}$$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale når $\underline{\underline{t=-\tfrac{2}{3}}}$.

Svar 2

$\vec{a}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix}$ er ikke nulvektor, så de er ortogonale netop når deres prikprodukt er 0.

Nspire løser ligningen $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix}=0$ mht. t og får $t=-\dfrac{2}{3}$.

Her står hvad Nspire gør i solve-linjen. Det er ikke nok at skrive solve-linjen.

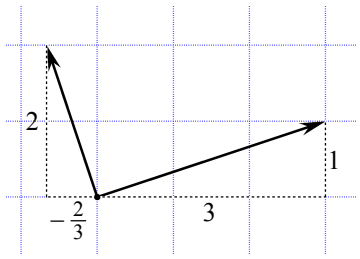
$\text{solve}\left(\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix}\right)=0,t\right) \blacktriangleright t=\dfrac{-2}{3}$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale når $t=-\dfrac{2}{3}$.

Kontrol på kvadreret papir

Når $t=-\tfrac{2}{3}$ er $\vec{b}=\begin{pmatrix} -\tfrac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$.

På kvadreret papir tegner vi denne vektor og $\vec{a}$.
Med vinkelmåler måler vi vinklen mellem vektorerne.
Vi får at vinklen er 90°, som den skulle være.



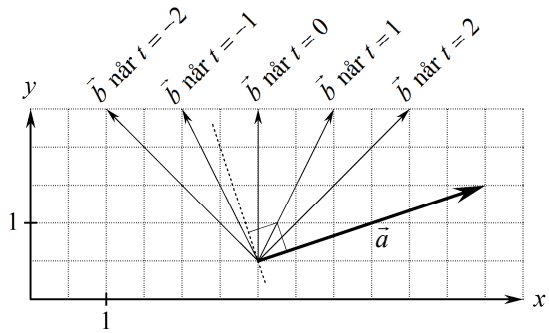
Afsnit 15c fortsætter på næste side!

Tankegang bag spørgsmålet

På figuren er den punkterede linje vinkelret på $\vec{a}$.

Vi ser at når t stiger fra –2 til 2, så drejer $\vec{b}$'s retning.

Det ser ud til at $\vec{a} \perp \vec{b}$ for en værdi af t som ligger mellem -1 og 0 .

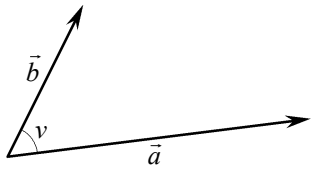


16. Prikprodukt: Vinkel mellem vektorer

16a. Når vi afsætter to vektorer ud fra samme punkt, danner de to vinkler. Den af vinklerne der er mindre end eller lig 180°, kalder vi vinklen mellem vektorerne.

16b. Når v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$, er

$$\cos(v) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} .$$



16c. Når $-1 \le p \le 1$ har ligningen $\cos(v) = p$ netop én løsning i intervallet $0° \le v \le 180°$.

Denne løsning betegnes $\cos^{-1}(p)$.

I Nspire må $\cos^{-1}$ ikke skrives som en potens. Tegnet $^{-1}$ skal vælges på tegnpaletten.

16d. **Opgave** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestem vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Svar 1 Se 16b, 16c, 14b, 7b.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Vinkel mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

I rummet er udregningerne de samme bortset fra at der er tre koordinater.

$$\cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{8\cdot(-1)+2\cdot 3}{\sqrt{8^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+3^2}}\right) = 94{,}3987° \approx \underline{\underline{94{,}4°}}$$

Svar 2

dotp = prikprodukt norm = længde

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ Vinkel mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)}{\text{norm}\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}\right)\cdot\text{norm}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)}\right) = 94.3987° \approx 94{,}4°$$

udregnet af Nspire

Svar 3

dotp = prikprodukt norm = længde

$\mathbf{a} := \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} := \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ Vinkel mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\text{norm}(\mathbf{a})\cdot\text{norm}(\mathbf{b})}\right) = 94.3987° \approx 94{,}4°$$

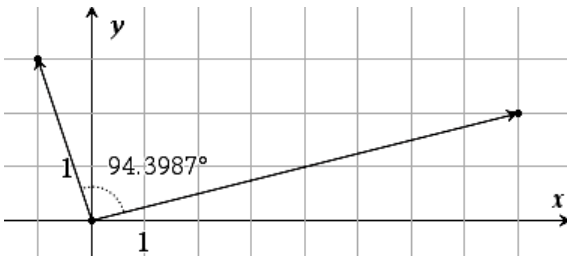
udregnet af Nspire

Kontrol ved elektronisk aflæsning på figur

Vi tegner $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ved elektronisk måling af vinklen mellem disse får vi 94,3987°.

Det er samme resultat som vi fik ved udregning.



17. Prikprodukt: Projektion af vektor

17a. Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} .$$

17b. Længden af projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er

$$\left|\vec{a}_{\vec{b}}\right| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|} .$$

Afsnit 17 fortsætter på næste side!

17c. Symbolet $|x|$ læses "den numeriske værdi af x" når x er et tal.

Der gælder $|0|=0$, $|-4|=4$, $|4|=4$, $|-0{,}5|=0{,}5$, $|0{,}5|=0{,}5$, osv.

$|\vec{b}|$ er **længden** af $\vec{b}$ fordi $\vec{b}$ er en **vektor**. $|\vec{a}\cdot\vec{b}|$ er den **numeriske værdi** af $\vec{a}\cdot\vec{b}$ fordi $\vec{a}\cdot\vec{b}$ er et **tal**.

17d. **Opgave** $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Bestem projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

I rummet er udregningerne de samme bortset fra at der er tre koordinater.

Svar 1

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = \frac{-3\cdot3+2\cdot1}{3^2+1^2}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = -0{,}7\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-2{,}1\\-0{,}7\end{pmatrix}}} .$$

Se 17a, 14b, 7b, 10b.

Svar 2

dotp = prikprodukt norm = længde

$\vec{a}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ Projektion af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er

$$\frac{\mathrm{dotP}\left(\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right)}{\left(\mathrm{norm}\left(\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right)\right)^2}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2.1\\-0.7\end{bmatrix}$$

udregnet af Nspire

Svar 3

dotp = prikprodukt norm = længde

$\mathbf{a}:=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}:=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ Projektion af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er

$$\frac{\mathrm{dotP}(\mathbf{a},\mathbf{b})}{(\mathrm{norm}(\mathbf{b}))^2}\cdot\mathbf{b} = \begin{bmatrix}-2.1\\-0.7\end{bmatrix}$$

udregnet af Nspire

Kontrol ved elektronisk aflæsning på figur

Elektronisk konstruktion af

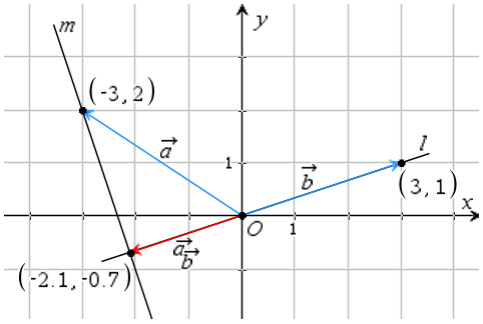
vektor $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ud fra $O(0,0)$

linje l gennem $\vec{b}$'s start- og slutpunkt

linje m som er vinkelret på l og går gennem $\vec{a}$'s slutpunkt

skæringspunkt mellem l og m

vektor fra O til skæringspunkt



Denne vektor er projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Dens koordinater er lig endepunkts koordinater da startpunkt er O

Vi aflæser elektronisk slutpunkts koordinater. Det er (-2,1 , -0,7), samme resultat som ved udregning.

17e. **Opgave** $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. Bestem længden af projektionen $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

I rummet er udregningerne de samme bortset fra at der er tre koordinater.

Svar 1

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \qquad |\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|0\cdot2+5\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\sqrt{5}}} .$$

Se 17b,14b, 7b, 17c.

Svar 2

dotp = prikprodukt norm = længde

$\vec{a}=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$

Længde af projektion af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er

$$\frac{\left|\mathrm{dotP}\left(\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right)\right|}{\mathrm{norm}\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{5}$$

udregnet af Nspire

Svar 3

dotp = prikprodukt norm = længde

$\mathbf{a}:=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}:=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$

Længde af projektion af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er

$$\frac{|\mathrm{dotP}(\mathbf{a},\mathbf{b})|}{\mathrm{norm}(\mathbf{b})} = \sqrt{5}$$

udregnet af Nspire

18. Determinant Kun plangeometri.

18a. Determinanten $\det(\vec{a},\vec{b})$ af to vektorer $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er et tal.

Når vi kender koordinaterne, kan vi udregne determinanten ved hjælp af formlen i rammen.

To vektorer i rummet har ikke en determinant.

18b.

$$\boxed{\det\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right) = a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1}$$

Afsnit 18 fortsætter på næste side!

18c. **Opgave** $\vec{a}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$. Bestem $\det(\vec{a},\vec{b})$.

Svar 1 Uden hjælpemidler, se 18b.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

$\det(\vec{a},\vec{b}) = 8\cdot 3-2\cdot(-1) = 26$

Svar 2

$\vec{a}=\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$

$\det(\vec{a},\vec{b}) = \det\left(\begin{bmatrix}8 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}\right) = 26$

udregnet af Nspire

Svar 3

augment samler vektorer

$\mathbf{a}:=\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}:=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$

$\det(\text{augment}(\mathbf{a},\mathbf{b})) = 26$ udregnet af Nspire

$\det(\vec{a},\vec{b}) = 26$

19. Determinant: Parallel? Kun plangeometri. I rummet kan bruges krydsprodukt.

19a. Symbolet $\vec{a}\parallel\vec{b}$ læses "$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle".

19b.

$\vec{a}\parallel\vec{b}$ netop når $\det(\vec{a},\vec{b})=0$
hvis hverken $\vec{a}$ eller $\vec{b}$ er nulvektor.

19c. **Opgave** $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2t\end{pmatrix}$. Bestem t så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

Svar 1 Uden hjælpemidler, se 19b, 18b.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2t\end{pmatrix}$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ikke nulvektor,
så de er parallel netop når

$\det(\vec{a},\vec{b})=0$

$(-3)\cdot 2t - 1\cdot 4 = 0$

$-6t-4=0$

$-6t=4$

$\frac{-6t}{-6}=\frac{4}{-6}$

$t=-\frac{2}{3}$

Svar 2

$\vec{a}=\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}4\\2t\end{bmatrix}$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ikke nulvektor så de er parallelle
netop når deres determinant er 0.

Nspire løser ligningen $\det\left(\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\2t\end{bmatrix}\right)=0$

mht. t og får $t=-\frac{2}{3}$.

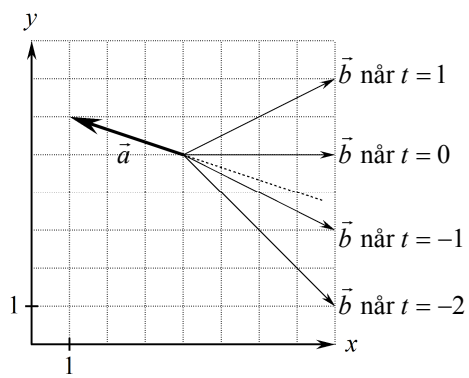
Her står hvad Nspire gør i solve-linjen. Det er ikke nok at skrive solve-linjen.

$\text{solve}\left(\det\left(\begin{bmatrix}-3 & 4\\1 & 2\cdot t\end{bmatrix}\right)=0,t\right) \blacktriangleright t=\frac{-2}{3}$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle når $t=-\frac{2}{3}$.

Tankegang bag spørgsmålet

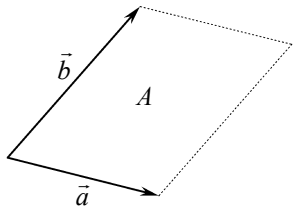
På figuren er den punkterede linje parallel med $\vec{a}$.
Vi ser at når t stiger fra -2 til 1 , så drejer $\vec{b}$'s retning. Det ser ud til at $\vec{a}\parallel\vec{b}$ for en værdi af t som ligger mellem -1 og 0 .



20. Determinant: Areal Kun plangeometri. I rummet kan bruges krydsprodukt.

20a.

Arealet A af det parallelogram der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er
$A = \lvert\det(\vec{a},\vec{b})\rvert$. Se figur.



Afsnit 20 fortsætter på næste side!

20b. **Opgave** $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$. Bestem areal af parallelogram udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Svar 1 Se 20a, 18b, 17c.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$

Areal af parallelogram udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$\left|\det(\vec{a},\vec{b})\right| = \left|(-1)\cdot 2 - 3\cdot 8\right| = \left|-26\right| = \underline{\underline{26}}$$

Svar 2

$\vec{a}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}$

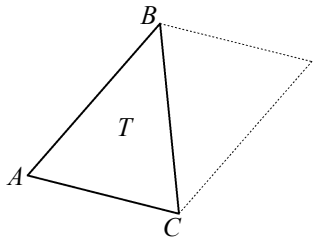
Areal af parallelogram udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$\left|\det\left(\begin{bmatrix}-1 & 8\\3 & 2\end{bmatrix}\right)\right| = 26$ udregnet af Nspire

20c. **Eksempel**

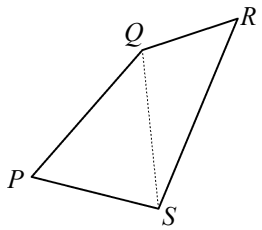
Arealet T af trekant ABC er

$$T = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|.$$



20d. **Eksempel**

En "skæv" firkant $PQRS$ deler vi op i to trekanter for at finde arealet.



21. Krydsprodukt Kun rumgeometri.

21a. Krydsproduktet $\vec{a}\times\vec{b}$ af to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er en vektor.
Når vi kender koordinaterne, kan vi udregne krydsproduktet ved hjælp af formlen i rammen.
Krydsproduktet kaldes også vektorproduktet.

21b.

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\\a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3\\a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1\end{pmatrix}$$

Vi skal vide at denne formel findes.
Vi skal ikke huske formlen.
Vi vil altid bruge Nspire til at udregne krydsprodukt.

21c. **Eksempel**

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-34\\-23\\9\end{pmatrix}$$

Dette er udregnet på Nspire ved at taste

crossP({2,-1,5},{-3,6,4}) eller crossP$\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\6\\4\end{pmatrix}\right)$

22. Krydsprodukt: Parallel? Kun rumgeometri. I planen kan bruges determinant.

22a. $\vec{a}\parallel\vec{b}$ netop når $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$

hvis hverken $\vec{a}$ eller $\vec{b}$ er nulvektor.

22b. **Eksempel**

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}23\\19\\16\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}92\\76\\64\end{pmatrix}$$

På Nspire udregner vi

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Da $\vec{a}\times\vec{b}$ er nulvektor, er $\vec{a}$ og $\vec{b}$ parallelle.

23. Krydsprodukt: Areal Kun rumgeometri. I planen kan bruges determinant.

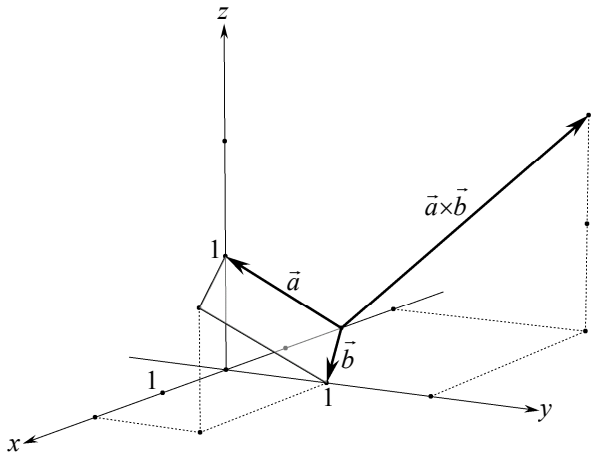
23a. Arealet A af det parallelogram der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$A = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Afsnit 23 fortsætter på næste side!

23b. Eksempel

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}.$$



På Nspire udregner vi $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$.

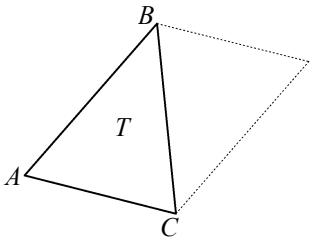
Arealet A af det parallelogram der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$A = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-1)^2+2^2+2^2} = 3 .$$

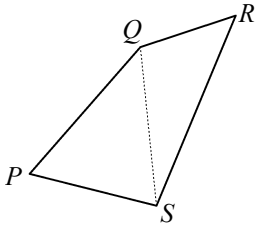
23c. Eksempel

Arealet T af trekant ABC er

$$T = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

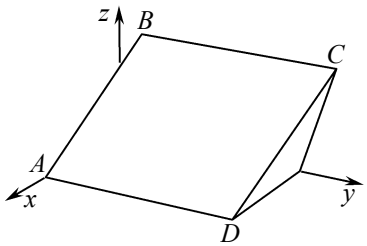


23d. Eksempel: En "skæv" firkant $PQRS$ deler vi op i to trekanter for at finde arealet.



23e. <u>Opgave</u> Figur viser klods i koordinatsystem med enhed dm.

Gør rede for at at $ABCD$ er et parallelogram, og bestem areal af $ABCD$.



$A(2,0,0)$
$B(1,1,2)$
$C(1,4,2)$
$D(2,3,0)$

<u>Svar 1</u> Se 3f, 4d, 23a.

$A(2,0,0)$ $B(1,1,2)$ $C(1,4,2)$ $D(2,3,0)$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1-2\\1-0\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}1-2\\4-3\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ er $ABCD$ et parallelogram.

$$\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}2-2\\3-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$$

Areal af $ABCD$ er

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\right|=6{,}7082$$

udregnet af Nspire

Areal af $ABCD$ er $6{,}71\ \text{dm}^2$

<u>Svar 2</u> Se 3f, 4d, 23a.

norm = længde crossP = krydsprodukt

$A(2,0,0)$ $B(1,1,2)$ $C(1,4,2)$ $D(2,3,0)$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}1-2\\1-0\\2-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}=\begin{bmatrix}1-2\\4-3\\2-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$$

Da $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ er er $ABCD$ et parallelogram.

$$\overrightarrow{AD}=\begin{bmatrix}2-2\\3-0\\0-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$$

Areal af $ABCD$ er

$$\text{norm}\left(\text{crossP}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}\right)\right) = 6.7082$$

udregnet af Nspire

Areal af $ABCD$ er $6{,}71\ \text{dm}^2$

24. Krydsprodukt: Vinkelret vektor

Kun rumgeometri. I planen kan bruges tværvektor.

24a. Krydsproduktet af to vektorer er en vektor der er vinkelret på begge vektorer:

$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a} \quad \text{og} \quad \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$$

24b. Højrehåndsreglen:

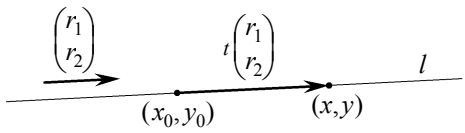
Grib om $\vec{a}\times\vec{b}$ med højre hånd så fingrene peger fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$.

Så vil $\vec{a}\times\vec{b}$ pege i tommelfingerens retning.

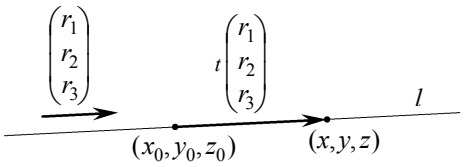
KOORDINATGEOMETRI

25. Parameterfremstilling for linje

25a.



25b.



Når (x_0, y_0) er et punkt på l og $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ er parallel med l, så er følgende en parameterfremstilling for l:

25c. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Når (x_0, y_0, z_0) er et punkt på l og $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ er parallel med l, så er følgende en parameterfremstilling for l:

25d. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

25e. Når 25c er en parameterfremstilling for l, så gælder:

(x_0, y_0) er et punkt på l.

$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ er parallel med l.

25f. Når 25d er en parameterfremstilling for l, så gælder:

(x_0, y_0, z_0) er et punkt på l.

$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ er parallel med l.

25g. Antag at x_0, y_0, r_1 og r_2 i 25c er erstattet med bestemte tal. Så gælder:

Hvis vi indsætter et tal for t og udregner højresiden, så får vi koordinaterne til et punkt der ligger på linjen.

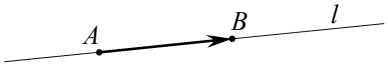
Hvis koordinaterne til et punkt ikke kan fås på denne måde, så ligger punktet ikke på linjen.

25h. Antag at x_0, y_0, z_0, r_1, r_2 og r_3 i 25d er erstattet med bestemte tal. Så gælder:

Hvis vi indsætter et tal for t og udregner højresiden, så får vi koordinaterne til et punkt der ligger på linjen.

Hvis koordinaterne til et punkt ikke kan fås på denne måde, så ligger punktet ikke på linjen.

25i. En vektor der er parallel med l, kaldes en <u>retningsvektor</u> for l.



25j. Når A og B er to forskellige punkter på l, så er $\overrightarrow{AB}$ parallel med l.

25k. Når A er et punkt på l og $\overrightarrow{AB}$ er parallel med l, så er B et punkt på l.

25*l*. **<u>Opgavetype:</u>** Bestem parameterfremstilling for linje.

<u>Metode:</u> Hvis der ikke er oplyst koordinater til et punkt på linjen, så find koordinater til et punkt på linjen.

Hvis der ikke er oplyst koordinater til en vektor der er parallel med linjen, så find koordinater til en vektor der er parallel med linjen.

Indsæt koordinater fra punkt og vektor i 25c eller 25d.

25m. Eksempel

En linje l går gennem punkterne $A(15, 20, 20)$ og $B(25, 27, 24)$.

For at bestemme en parameterfremstilling for l bruger vi 25j, 4d og 25d.

Da A og B ligger på l, er $\overrightarrow{AB}$ parallel med l.

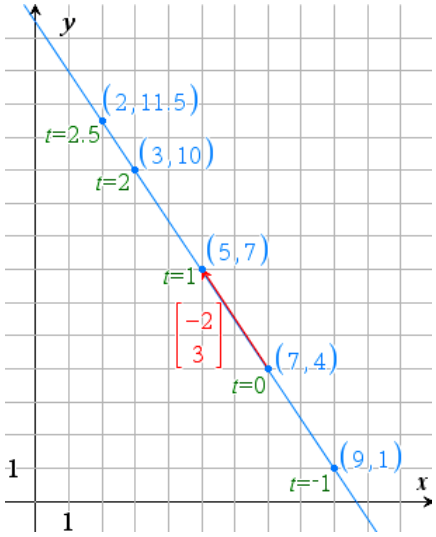
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 25-15 \\ 27-20 \\ 24-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ så } l \text{ har parameterfremstillingen } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Afsnit 25 fortsætter på næste side!

25n. Eksempel

Linjen på figuren har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$



Når $t = -1$ er $\quad x = 7 + (-1)\cdot(-2) = 9$
$\quad y = 4 + (-1)\cdot 3 = 1$

Når $t = 2$ er $\quad x = 7 + 2\cdot(-2) = 3$
$\quad y = 4 + 2\cdot 3 = 10$

Når $t = 2{,}5$ er $\quad x = 7 + 2{,}5\cdot(-2) = 2$
$\quad y = 4 + 2{,}5\cdot 3 = 11{,}5$

25o. **Opgave** l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ligger punktet $(-13\,,\,33)$ på l? (Se 25n).

Svar Uden hjælpemidler

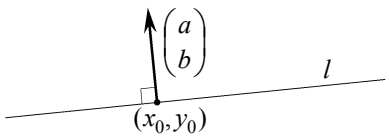
$(-13\,,\,33)$ ligger kun på l hvis der er et tal t så

$$7 + t\cdot(-2) = -13$$
$$4 + t\cdot 3 = 33$$

Af første ligning får vi $t = -10$.
Når $t = -10$ giver den anden lignings venstreside 34. Da den ikke giver 33:
$(-13\,,\,33)$ ligger ikke på l.

26. Ligning for linje Kun plangeometri.

26a. Når (x_0, y_0) er et punkt på l og $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er vinkelret på l,
så kan vi bestemme en ligning for l ved først at sætte ind i formlen



$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

og derefter gange ind i parenteserne og trække sammen så vi får en ligning af typen

$$ax + by + c = 0 .$$

26b. Når $ax + by + c = 0$ er en ligning for l, så er vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vinkelret på l.

26c. Når vi kender tallene a, b og c i en ligning $ax + by + c = 0$ for en linje l,
så kan vi undersøge om et punkt ligger på l ved at sætte punktets koordinater ind for x og y i ligningen.
Hvis ligningen bliver sand, så ligger punktet på l.
Hvis ligningen bliver falsk, så ligger punktet ikke på l.

26d. En vektor der er vinkelret på l kaldes en normalvektor for l.

26e. **Opgave** l: $3x + by - 4 = 0$. Punktet $(1\,,\,2)$ ligger på l. Bestem b. Se 26c.

Svar Uden hjælpemidler.

Da $(1\,,\,2)$ ligger på linjen l med ligningen $3x + by - 4 = 0$, bliver ligningen sand når vi indsætter punktet.

$$3\cdot 1 + b\cdot 2 - 4 = 0$$
$$2b = 1$$
$$b = \tfrac{1}{2}$$

Afsnit 26 fortsætter på næste side!

26f. **Opgave** En linje l går gennem punkterne $A(2,7)$ og $B(-3,1)$
Bestem ligning for l på formen $ax+by+c=0$. Se 25j , 9a , 9d og 26a .

Svar Uden hjælpemidler.

Da $A(2,7)$ og $B(-3,1)$ ligger på l , er l parallel med $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3-2\\1-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}$

Så er l vinkelret på $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-(-6)\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$

Da $(x_0,y_0)=(2,7)$ er et punkt på l , og $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$ er vinkelret på l, har l ligningen

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$
$$6\cdot(x-2)+(-5)\cdot(y-7)=0$$
$$\underline{\underline{6x-5y+23=0}}$$

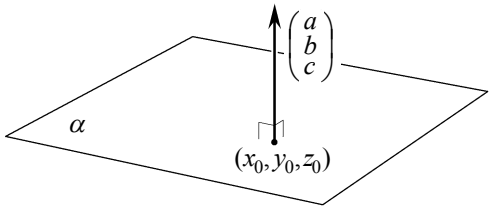
27. Ligning for plan Kun rumgeometri.

27a. Når (x_0,y_0,z_0) er et punkt i en plan α , og $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ er vinkelret på α,
så kan vi bestemme en ligning for α ved først at sætte ind i formlen

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

og derefter gange ind i parenteserne og trække sammen så vi får en ligning af typen

$$ax+by+cz+d=0 \ .$$



27b. Når $ax+by+cz+d=0$ er en ligning for α, så er vektoren $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ vinkelret på α.

27c. Når vi kender tallene a, b, c og d i en ligning $ax+by+cz+d=0$ for en plan α,
så kan vi undersøge om et punkt ligger i α ved at sætte punktets koordinater ind for x, y og z i ligningen:
Hvis ligningen bliver sand, så ligger punktet i α.
Hvis ligningen bliver falsk, så ligger punktet ikke i α.

27d. Når A og B er to forskellige punkter i α, så er $\overrightarrow{AB}$ parallel med α.

27e. En vektor der er vinkelret på α, kaldes en normalvektor for α.

27f. Når $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle med α, så er $\vec{a}\times\vec{b}$ vinkelret på α
hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke er parallelle, dvs. hvis $\vec{a}\times\vec{b}$ ikke er nulvektor.

27g. **Opgave** $A(0,3,4)$, $B(2,-2,1)$ og $C(-1,4,3)$ ligger i plan α. Bestem ligning for α . Se 4d, 27d, 27f, 27a.

Svar

Da $A(0,3,4)$, $B(2,-2,1)$ og $C(-1,4,3)$ ligger i α, er følgende to vektorer parallelle med α :

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2-0\\-2-3\\1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1-0\\4-3\\3-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} .$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}8\\5\\-3\end{pmatrix}$$ *Udregnet på Nspire*

Denne vektor er vinkelret på α da den ikke er nulvektor og $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er parallelle med α .

Da $(x_0,y_0,z_0)=(0,3,4)$ er et punkt i α , og $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\5\\-3\end{pmatrix}$ er vinkelret på α, har α ligningen

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$8\cdot(x-0)+5\cdot(y-3)+(-3)\cdot(z-4)=0$$
$$\underline{\underline{8x+5y-3z-3=0}}$$

28. Ligning for cirkel Kun plangeometri.

28a. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$.
er ligning for en cirkel med centrum $C(x_0, y_0)$ og radius r .

28b. Når P er et punkt på en cirkel med centrum C, er cirklens radius $r=\left|\overrightarrow{CP}\right|$. Se 7e.

28c. **Eksempel**
En cirkel har ligningen $(x-1)^2+(y+5)^2=9$.
Vi omskriver til formen 28a : $(x-1)^2+(y-(-5))^2 = 3^2$.
Heraf ser vi at centrum er $(1,-5)$ og radius er 3 .

28d. **Metode:** Når vi kender en ligning for en cirkel, så kan vi <u>undersøge om et punkt ligger på cirklen</u> ved at sætte punktets koordinater ind for x og y i ligningen.
- Hvis ligningen bliver sand, så ligger punktet på cirklen.
- Hvis ligningen bliver falsk, så ligger punktet ikke på cirklen.

28e. **<u>Opgave</u>** En cirkel har ligningen $x^2-2x+y^2+10y+17=0$. Bestem centrum og radius.

<u>Svar</u> Uden hjælpemidler.

$x^2-2x+y^2+10y+17=0$ Se i **28f-1** hvordan du kommer frem til næste linje.

$x^2+1-2x + y^2+25+10y = 1+25-17$ Se i **28f-2** hvordan du kommer frem til næste linje.

$(x-1)^2 + (y+5)^2 = 9$

Heraf ser vi at centrum er $\underline{\underline{(1,-5)}}$ og radius er $\sqrt{9} = \underline{\underline{3}}$. Se **28a**.

28f. **<u>Forklaring til 28e</u>**

28f-1 Koefficienten til x er –2. Halvdelen er –1, og –1 i anden er 1. Vi lægger 1 til begge sider.
Koefficienten til y er 10. Halvdelen er 5, og 5 i anden er 25. Vi lægger 25 til begge sider.
Konstantleddet er 17. Vi trækker 17 fra begge sider.

28f-2 Koefficienten til x er –2. Halvdelen er –1. Derfor skal der stå –1 i første parentes.
Koefficienten til y er 10. Halvdelen er 5. Derfor skal der stå +5 i anden parentes.

Bemærk: Ifølge kvadratsætninger er $(x-1)^2=x^2+1-2x$ og $(y+5)^2=y^2+25+10y$.

Bemærk: Indsættes $x_0=1$, $y_0=-5$ og $r=3$ i $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$, så får vi $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 9$.

28f-3 <u>Hvis x-led eller y-led mangler, ser omskrivningen lidt anderledes ud:</u>

$x^2+y^2+10y+17=0$

$x^2 + y^2+25+10y = 25-17$

$(x-0)^2 + (y+5)^2 = 8$ Centrum er $(0,-5)$ og radius er $\sqrt{8}$.

29. Ligning for kugle Kun rumgeometri.

29a. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2$.
er ligning for en kugle med centrum $C(x_0, y_0, z_0)$ og radius r .

29b. Når P er et punkt på en kugle med centrum C, er kuglens radius $r=\left|\overrightarrow{CP}\right|$. Se 7c og 7e.

29c. **Eksempel**
En kugle har ligningen $(x-1)^2+y^2+(z+5)^2=8$.
Vi omskriver til formen 29a: $(x-1)^2+(y-0)^2+(y-(-5))^2 = \sqrt{8}^2$.
Heraf ser vi at centrum er $(1,0,-5)$ og radius er $\sqrt{8}$.

29d. **Metode:** Når vi kender en ligning $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2$ for en kugle, så kan vi <u>undersøge om et punkt ligger på kuglen</u> ved at sætte punktets koordinater ind for x, y og z i ligningen.
- Hvis ligningen bliver sand, så ligger punktet på kuglen.
- Hvis ligningen bliver falsk, så ligger punktet ikke på kuglen.

29e. **<u>Opgave</u>** En kugle har ligningen $x^2-2x+y^2+z^2+10z+18=0$. Bestem centrum og radius.

<u>Svar</u> Se forklaring i 28e-28f .

$x^2-2x+y^2+z^2+10z+18=0$

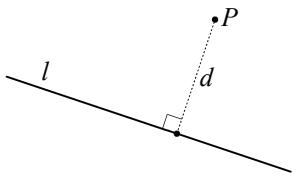
$x^2+1-2x+y^2+z^2+25+10z=1+25-18$

$(x-1)^2 + y^2+(z+5)^2 = 8$ Heraf ser vi at centrum er $(1,0,-5)$ og radius er $\sqrt{8}$.

30. Afstand fra punkt til linje Kun plangeometri.

30a. Afstanden d fra et punkt $P(x_1, y_1)$ til en linje $l: ax+by+c=0$ er

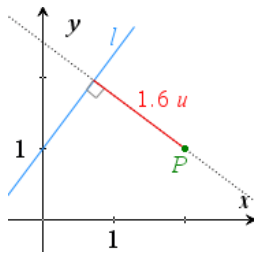
$$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$



30b. **Opgave** Bestem afstand fra $P(1,2)$ til linjen $l: 4x-3y+3=0$.

Svar Afstanden fra $P(x_1,y_1)=P(2,1)$ til linjen $l: ax+by+c=0$ med $a=4$, $b=-3$, $c=3$ er

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4\cdot 2-3\cdot 1+3|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \underline{\underline{\frac{8}{5}}} = 1{,}6 .$$

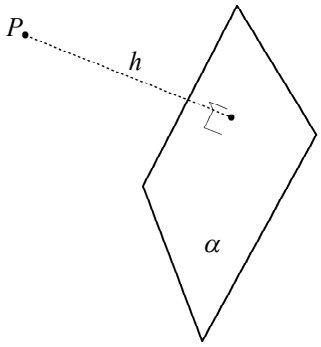


31. Afstand fra punkt til plan Kun rumgeometri.

31a. Afstanden h fra et punkt $P(x_1,y_1,z_1)$ til en plan $\alpha: ax+by+cz+d=0$ er

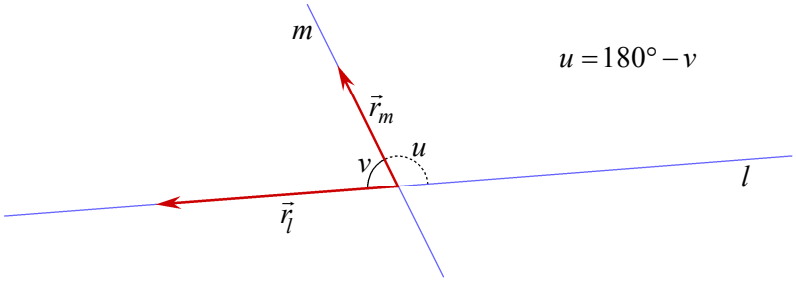
$$h = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} .$$

Se 30b.



32. Vinkel mellem linjer

32a. Hvis vi kender <u>retningsvektorer</u> $\vec{r}_l$ og $\vec{r}_m$ for linjer l og m, så find vinklen v mellem $\vec{r}_l$ og $\vec{r}_m$. Så vil v og $180°-v$ være de to vinkler som l og m danner. Se 16b og 16d.



$u = 180° - v$

32b. Hvis vi kender <u>normalvektorer</u> $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$ for to linjer l_1 og l_2 <u>i planen</u>, så find vinklen v mellem $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$. Så vil v og $180°-v$ være de to vinkler som l_1 og l_2 danner. Se 16b og 16d.

32c. Hvis vi for to linjer l_1 og l_2 <u>i planen</u> kender en retningsvektor $\vec{r}_1$ og en normalvektor $\vec{n}_2$, så find vinklen v mellem $\hat{\vec{r}}_1$ og $\vec{n}_2$. Så vil v og $180°-v$ være de to vinkler som l_1 og l_2 danner. Se 9d og 16b og 16d.

32d. **Opgave** To linjer l og m er givet ved $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bestem den spidse vinkel mellem l og m. Se 32 a.

Svar 1

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Af parameterfremstillingerne ser vi at $\vec{r}_l$ er parallel l og at $\vec{r}_m$ er parallel med m, så vinklen v mellem disse vektorer er en af de to vinkler mellem l og m:

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{r}_l\cdot\vec{r}_m}{|\vec{r}_l|\cdot|\vec{r}_m|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2\cdot 1+(-1)\cdot 3+0\cdot 3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+3^2}}\right) = 95{,}8888° \approx 95{,}9°$$

Da $v > 90°$ gælder: Den spidse vinkel mellem l og m er $180°-95{,}9° = \underline{\underline{84{,}1°}}$.

Afsnit 32d fortsætter på næste side!

Svar 2

dotP = prikprodukt norm = længde

$l: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $m: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{rl} := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{rm} := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

Af parameterfremstillingerne ser vi at $\vec{r_l}$ er parallel med l, og at $\vec{r_m}$ er parallel med m,

så vinklen v mellem disse vektorer er en af de to vinkler mellem l og m:

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(\mathbf{rl},\mathbf{rm})}{\text{norm}(\mathbf{rl}) \cdot \text{norm}(\mathbf{rm})}\right) = 95.8888° \approx 95.9°$$ udregnet af Nspire

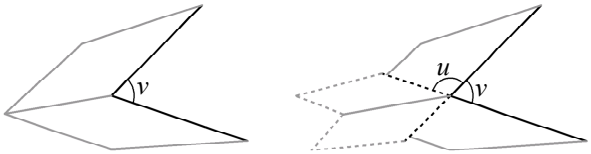
$v > 90°$. $180-95.9 = 84.1$ Den spidse vinkel mellem l og m er 84,1°.

33. Vinkel mellem planer Kun rumgeometri.

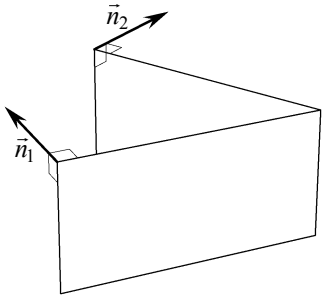
33a. Find vinklen v mellem normalvektorer $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$ til to planer α_1 og α_2.
Så vil v og $180°-v$ være de to vinkler som α_1 og α_2 danner. Se 16b og 16d.

34. Vinkel mellem sideflader Kun rumgeometri.

34a. Figuren viser vinklen v mellem to flader.
Når vi skal finde v, finder vi vinkler mellem de to planer der indeholder fladerne.
Der er to vinkler v og u mellem disse planer.
Hvis det ikke er oplyst om vinklen mellem fladerne er den spidse eller stumpe af vinklerne mellem planerne, så må vi bruge 34b.

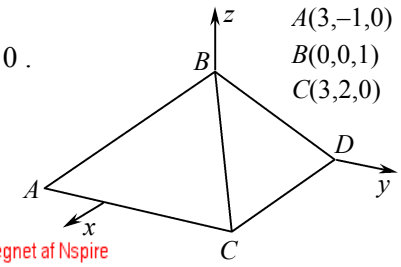


34b. Til den ene sideflade skal vi finde en normalvektor $\vec{n}_1$ der peger ind i vinklen. (Brug højrehåndsreglen 24b)
Til den anden sideflade skal vi finde en normalvektor $\vec{n}_2$ der peger ud af vinklen. (Brug højrehåndsreglen 24b)
Vinklen v mellem $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$ er vinklen mellem sidefladerne.



34c. (Hvis begge vektorer peger ind i vinklen, eller begge peger ud, finder vi en vinkel u som ikke dannes af sidefladerne. De to planer der indeholder sidefladerne, danner vinklerne u og v).

34b. **Opgave** Fladen BCD er indeholdt i planen med ligningen $y + 2z - 2 = 0$.
Bestem den stumpe vinkel mellem fladerne ABC og BCD.



$A(3,-1,0)$
$B(0,0,1)$
$C(3,2,0)$

Svar

dotP = prikprodukt norm = længde

$\mathbf{ab} := \begin{bmatrix} 0-3 \\ 0--1 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{ac} := \begin{bmatrix} 3-3 \\ 2--1 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{n} := \text{crossP}(\mathbf{ab},\mathbf{ac}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix}$ udregnet af Nspire

$\vec{n}$ er ikke nulvektor, og den er krydsprodukt af $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ der er parallelle med fladen ABC, så

$\vec{n}$ er vinkelret på ABC.

Med $\mathbf{a}:=0$ $\mathbf{b}:=1$ $\mathbf{c}:=2$ $\mathbf{d}:=-2$ er $\mathbf{a} \cdot x + \mathbf{b} \cdot y + \mathbf{c} \cdot z + \mathbf{d} = 0$ ligningen $y + 2 \cdot z - 2 = 0$ som er ligningen for planen der indeholder fladen BCD, så vektoren $\mathbf{m} := \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **er vinkelret på BCD**.

Da $\vec{n}$ er vinkelret på ABC og $\vec{m}$ er vinkelret på BCD, må vinklen v mellem $\vec{\mathbf{n}}$ og $\vec{\mathbf{m}}$ være lig en af de to vinkler mellem planerne der indeholder ABC og BCD.

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(\mathbf{n},\mathbf{m})}{\text{norm}(\mathbf{n}) \cdot \text{norm}(\mathbf{m})}\right) = 148.052°$$ udregnet af Nspire

Da v er stump (mellem 90° og 180°) gælder: Den stumpe vinkel mellem ABC og BCD er 148,1°.

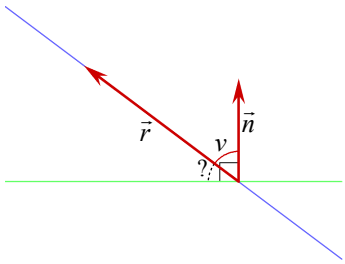
35. Vinkel mellem linje og plan Kun rumgeometri.

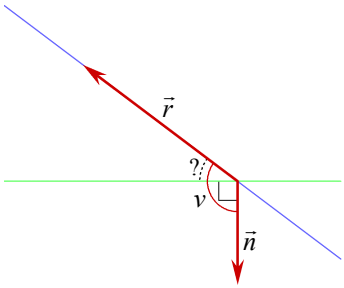
35a. Først: Find vinklen v mellem en normalvektor $\vec{n}$ til planen og en retningsvektor $\vec{r}$ til linjen.

Så: Hvis v er mindre end $90°$: Fra $90°$ trækkes v for at få vinkel mellem linje og plan.
Hvis v er større end $90°$: Fra v trækkes $90°$ for at få vinkel mellem linje og plan.

Se 16b og 16d.

Grøn streg er plan set fra siden.
Blå streg er linje.





36. Vilkårligt punkt på linje

36a. Vi omskriver parameterfremstillingen for en linje l:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2t \\ 3-t \end{pmatrix}$$

I rummet er udregningen den samme bortset fra at der er tre koordinater.

Et vilkårligt punkt på l er $(x, y) = (5+2t, 3-t)$

37. Skæring mellem to linjer *l* og *m*

37a. Både *l* og *m* er givet ved parameterfremstilling

Først finder vi et vilkårligt punt på hver linje:

I 36a står hvordan vi gør.
Parametrene s og t i de to punkter må ikke være samme bogstav.

l: $(x, y) = (2s, 5-3s)$ og m: $(x, y) = (2+2t, -2+t)$

Vi skal bestemme s og t så de to punkter har ens x-koordinater og ens y-koordinater:

$$2s = 2+2t$$
$$5-3s = -2+t$$

Vi løser dette ligningssystem mht. s og t og får:

Skriv at Nspire løser ligningssystemet med solve, eller skriv mellemregninger.

$$s = 2 \quad \text{og} \quad t = 1$$

Når $s = 2$ er $(x, y) = (2s, 5-3s) = (2\cdot 2, 5-3\cdot 2) = (4, -1)$.

I rummet er udregningerne de samme bortset fra at der er 3 koordinater.

Skæringspunktet er $(x, y) = (4, -1)$.

37b. Både *l* og *m* er givet ved ligning (kun plangeometri)

Vi skal finde x og y så begge ligninger er opfyldt:

l: $3x + 2y - 10 = 0$

m: $x - 2y - 6 = 0$

Vi løser dette ligningssystem mht. x og y og får $x = 4$ og $y = -1$.

Skriv at Nspire løser ligningssystemet med solve, eller skriv mellemregninger.

Skæringspunktet er $(x, y) = (4, -1)$.

37c. *l* er givet ved ligning, *m* ved parameterfremstilling (kun plangeometri)

Først finder vi et vilkårligt punkt på m:

I 36a står hvordan vi gør.

m: $(x, y) = (2+2t, -2+t)$.

Vi indsætter dette punkt i ligningen

l: $3x + 2y - 10 = 0$

og får

$$3(2+2t) + 2(-2+t) - 10 = 0$$

Vi løser denne ligning mht. t og får $t = 1$.

Skriv at Nspire løser ligningen med solve, eller skriv mellemregninger.

Når $t = 1$ er $(x, y) = (2+2t, -2+t) = (2+2\cdot 1, -2+1) = (4, -1)$.

Skæringspunktet er $(x, y) = (4, -1)$.

38. Skæring mellem linje og cirkel Kun plangeometri.

38a. Linjen er givet ved parameterfremstilling

Først finder vi et vilkårligt punkt på linjen : I 36a står hvordan vi gør.

$$(x,y)=(2+2t,-2+t)\ .$$

Vi indsætter dette punkt i cirklens ligning

$$x^2-6x+y^2-2y\ =\ 0$$

og får

$$(2+2t)^2-6(2+2t)+(-2+t)^2-2(-2+t)\ =\ 0$$

Vi løser denne ligning mht. t og får $t=0$ eller $t=2$. Skriv at Nspire løser ligningen med solve, eller skriv mellemregninger.

Når $t=0$ er $(x,y)=(2+2t,-2+t)=(2+2\cdot 0,-2+0)=(2,-2)$

Når $t=2$ er $(x,y)=(2+2t,-2+t)=(2+2\cdot 2,-2+2)=(6,0)$

Skæringspunkterne er $(2,-2)$ og $(6,0)$.

38b. Linjen er givet ved ligning

Linjen og cirklen er givet ved ligningerne

$$x-2y-6=0$$

$$x^2-6x+y^2-2y\ =\ 0$$

Vi løser dette ligningssystem mht. x og y og får Skriv at Nspire løser ligningssystemet med solve, eller skriv mellemregninger.

$x=2$ og $y=-2$ eller $x=6$ og $y=0$

Skæringspunktet er $(x,y)=(2,-2)$ og $(x,y)=(6,0)$.

39. Skæring mellem linje og kugle Kun rumgeometri.

39a. Vi indsætter et vilkårligt punkt fra linjen i kuglens ligning, osv. Se 36a og 38a.

40. Skæring mellem linje og plan Kun rumgeometri.

40a. Vi indsætter et vilkårligt punkt fra linjen i planens ligning, osv. Se 36a og 37c.

40b. **Opgave** Plan α og ligning l er givet ved: $\alpha:\ 3x-z+9=0$ $\quad l:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}9\\-5\\12\end{pmatrix}$

Bestem skæringspunkt mellem l og α .

Svar

α: $3x-z+9=0$ $\qquad l$: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\4\\0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}9\\-5\\12\end{bmatrix}$

$(x,y,z)=\{8+9\cdot t,4-5\cdot t,12\cdot t\}$ er et vilkårligt punkt på l .

Det ligger i α når det opfylder α's ligning, dvs. når

$$3\cdot(8+9\cdot t)-12\cdot t+9=0$$

Nspire løser denne ligning mht. t og får $t=\frac{-11}{5}$:

$$\text{solve}(3\cdot(8+9\cdot t)+0\cdot(4-5\cdot t)-1\cdot 12\cdot t+9=0,t)\ \blacktriangleright\ t=\frac{-11}{5}$$

Når t har denne værdi er det vilkårlige punkt

$$\{8+9\cdot t,4-5\cdot t,12\cdot t\}|t=\frac{-11}{5}=\left\{\frac{-59}{5},15,\frac{-132}{5}\right\}$$

Skæringspunktet mellem l og α er $\left(\frac{-59}{5},15,\frac{-132}{5}\right)\approx(-11.8,15.,-26.4)$

41. Projektion af punkt på linje Kun plangeometri.

41a. Vi vil finde projektionen Q af punktet $P(2,1)$ på linjen l: $2x+3y-20=0$.
Q er skæringspunktet mellem l og linjen m der går gennem P og er vinkelret på l.

Af ligningen for l ser vi at vektoren $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ er vinkelret på l, så m har parameterfremstillingen

$$m:\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Herefter kan vi bruge metoden fra 37c til finde Q.

41b. Opgave En linje l går gennem punkterne $A(0,11)$ og $B(9,-4)$.
Bestem projektionen af $P(21,10)$ på l .

Svar

Projektionen af P på l er skæringspunktet mellem l og linjen m der er vinkelret på l og går gennem P.

Bestemme ligning for l

$A(0,11)$ og $B(9,-4)$ ligger på en linje l . $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}9-0\\-4-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-15\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$

Vektor parallel med l: $\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$. Vektor vinkelret på l: $\widehat{\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.

l går gennem $(x_1,y_1)=(0,11)$ og er vinkelret på $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, så l har følgende ligning:

$$a\cdot(x-x_1)+b\cdot(y-y_1)=0$$
$$5\cdot(x-0)+3\cdot(y-11)=0$$
$$5x+3y-33=0$$

Bestemme parameterfremstilling for m

m går gennem $(x_0,y_0)=(21,10)$ og er parallel med $\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, så m har følgende parameterfremstilling: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}$ dvs. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\10\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.

Bestemme skæringspunkt mellem l og m

Vilkårligt punkt på m som er $(21+5t\ ,\ 10+3t)$ indsætter vi i ligning for l :

$$5(21+5t)+3(10+3t)-33=0$$

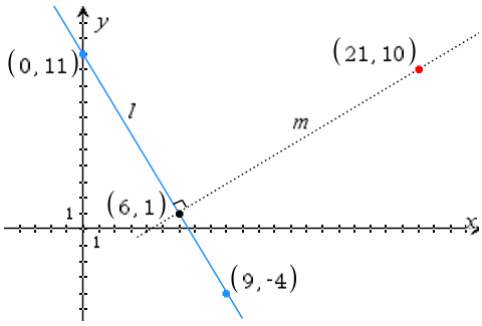
Nspire løser denne ligning mht. t og får $t=-3$. solve(5·(21+5·t)+3·(10+3·t)−33=0,t) ▸ t=-3

Når $t=-3$ er det vilkårlige punkt lig $(21+5\cdot(-3)\ ,\ 10+3\cdot(-3))=(6,1)$

Projektionen af P på l er $\underline{\underline{(6,1)}}$.

Kontrol ved elektronisk aflæsning på figur

Elektronisk konstruktion:
Tegn punkter (0,11) og (9,-4).
Tegn linje l gennem disse.
Tegn punkt (21,10).
Tegn linje m som er vinkelret på l og går gennem (21,10).
Tegn skæringspunkt mellem l og m.
Dette skæringspunkt er projektionen af P på l .
Aflæs elektronisk koordinater til skæringspunkt.
Resultatet er (6,1) ligesom i udregningen af projektionen.



42. Projektion af punkt på plan Kun rumgeometri.

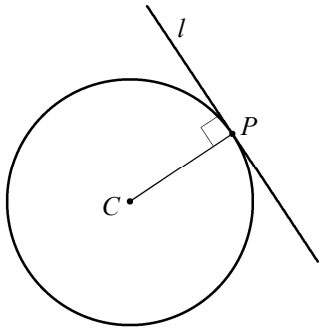
42a. Vi vil finde projektionen Q af punktet $P(6,-2,5)$ på planen α: $2x-3y+z+5=0$.
Q er skæringspunktet mellem α og linjen m der går gennem P og er vinkelret på α.

Af ligningen for α ser vi at vektoren $\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ er vinkelret på α, så m har parameterfremstillingen

$$m:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

Herefter kan vi bruge metoden fra 40a til finde Q.

43. Tangent til cirkel Kun plangeometri.



43a. En tangent til en cirkel er en linje der har præcis ét punkt fælles med cirklen. Dette punkt kaldes røringspunktet.
Når man siger "tangenten i P", betyder det at P er røringspunktet.

43b. En tangent til en cirkel er vinkelret på linjen gennem centrum og røringspunkt.

43c. En linje er tangent til en cirkel netop hvis afstanden fra centrum til linjen er lig radius.

43d. **Eksempel**
Punktet $P(4,5)$ ligger på en cirkel med centrum $C(3,1)$.
Vi vil finde en ligning for tangenten l i P.
Ifølge 43b er $\overrightarrow{CP}$ vinkelret på l, så vi kan finde ligningen for l ved at bruge 4c og 26a.

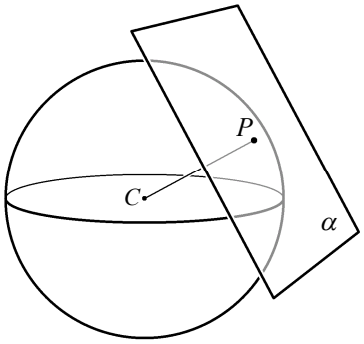
43e. **Eksempel**
Linjen l: $3x+4y+24=0$ er tangent til en cirkel med centrum $C(2,5)$.
Vi vil finde en ligning for cirklen.
Ifølge 43c kan vi finde radius ved at finde afstanden fra C til l. *Se 30a og 30b.*
Så kan vi bestemme cirklens ligning ved at bruge 28a.

43f. **Eksempel**
Vi vil undersøge om linjen l: $3x+4y+24=0$ er tangent til cirlen M: $(x-2)^2+(y-5)^2=81$.

Metode 1: Vi finder centrum og radius som i 28c.
Så udregner vi afstanden fra centrum til l og bruger 43c.

Metode 2: Vi finder skæringspunkterne mellem l og M og bruger 43a.
Skæringspunkterne finder vi som i 38b.

44. Tangentplan til kugle Kun rumgeometri.



44a. En tangentplan til en kugle er en plan der har præcis ét punkt fælles med kuglen. Dette punkt kaldes røringspunktet.
Når man siger "tangentplanen i P", betyder det at P er røringspunktet.

44b. En tangentplan til en kugle er vinkelret på linjen gennem centrum og røringspunkt.

44c. En plan er tangentplan til en kugle netop hvis afstanden fra centrum til planen er lig radius.

44d. **Eksempel**
Punktet $P(4,5,2)$ ligger på en kugle med centrum $C(3,1,4)$.
Vi vil finde en ligning for tangentplanen α i P.
Ifølge 44b er $\overrightarrow{CP}$ vinkelret på l, så vi kan finde ligningen for α ved at bruge 4d og 27a.

44e. **Eksempel:** Planen α: $2x+y-2z+24=0$ er tangentplan til en kugle med centrum $C(-1,0,5)$.
Vi vil finde en ligning for kuglen. Ifølge 44c kan vi finde radius ved at finde afstanden fra C til α. *Se 31a.*
Så kan vi bestemme kuglens ligning ved at bruge 29a.

44f. **Eksempel:** Vi vil undersøge om planen α: $2x+y-2z+24=0$ er tangentplan til kuglen med centrum $C(-1,0,5)$ og radius 4. Vi udregner afstanden fra C til α og bruger 44c. Se 31a.

BEVISER

45. Bevis for at vi må prikke ind i en parentes

u_1 og u_2 er koordinater til $\vec{u}$, og tilsvarende for $\vec{v}$ og $\vec{w}$.

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (u_1+v_1)\cdot w_1 + (u_2+v_2)\cdot w_2 = u_1\cdot w_1 + v_1\cdot w_1 + u_2\cdot w_2 + v_2\cdot w_2$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = u_1\cdot w_1 + u_2\cdot w_2 + v_1\cdot w_1 + v_2\cdot w_2$$

De to udtryk giver samme fire led, så de er samme tal:

45a. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

Vi har brugt vektorregel 11a og 14b, og talregler: gange ind i parentes, og ved plus er rækkefølge ligegyldig.
I rummet er beviset det samme bortset fra at der er tre koordinater.

46. Bevis for formel 46a

v_1 og v_2 er koordinater til $\vec{v}$.

$$(k\vec{v})\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (kv_1)\cdot v_1+(kv_2)\cdot v_2 = kv_1^2+kv_2^2$$

$$k|\vec{v}|^2 = k\sqrt{v_1^2+v_2^2}^{\,2} = k(v_1^2+v_2^2) = kv_1^2+kv_2^2$$

De to udtryk give samme resultat, så de er samme tal:

46a. $(k\vec{v})\cdot\vec{v} = k|\vec{v}|^2$

Vi har brugt vektorregel 10b, 14b og 7b, og talregler: ved gange er rækkefølge ligegyldig, $x^2=x\cdot x$, kvadratrod i anden, og gange ind i parentes.
I rummet er beviset det samme bortset fra at der er tre koordinater.

47. Bevis for at vi får nul når vi prikker med nulvektor

v_1 og v_2 er koordinater til $\vec{v}$.

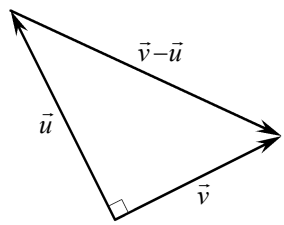
$$\vec{o}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0\cdot v_1+0\cdot v_2 = 0 \quad \text{så}$$

47a. $\vec{o}\cdot\vec{v} = 0$

Vi har brugt vektorregel 14b, og talregel om nul gange tal.
I rummet er beviset det samme bortset fra at der er tre koordinater.

48. Bevis for at vinkelrette vektorer har skalarprodukt nul

u_1 og u_2 er koordinater til $\vec{u}$, og tilsvarende for $\vec{v}$.



Når vi afsætter $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ud fra samme punkt, er $\vec{v}-\vec{u}$ vektoren fra $\vec{u}$'s spids til $\vec{v}$'s spids.

Her har vi brugt 12d.

Når $\vec{u}\perp\vec{v}$ kan vi bruge Pythagoras sætning på den viste trekant:

$$|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2 = |\vec{v}-\vec{u}|^2$$

$$\sqrt{u_1^2+u_2^2}^{\,2}+\sqrt{v_1^2+v_2^2}^{\,2} = \sqrt{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2}^{\,2}$$

Her har vi brugt 7b og 12a.

$$u_1^2+u_2^2 + v_1^2+v_2^2 = (v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2$$

$$u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2 = v_1^2+u_1^2-2v_1u_1 + v_2^2+u_2^2-2v_2u_2$$

$$v_1u_1+v_2u_2 = 0$$

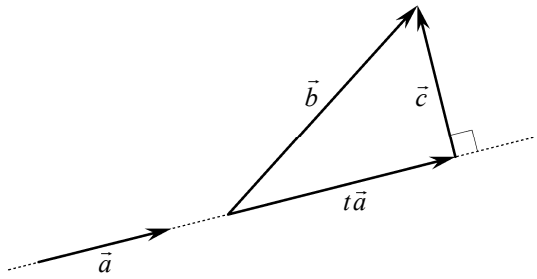
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Her har vi brugt 14b.

Nu har vi bevist at

48a. hvis $\vec{u}\perp\vec{v}$ er $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

49. Bevis for formlen for projektion af vektor



Se figuren til højre.

Projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$ er en vektor der er $\vec{o}$ eller parallel med $\vec{a}$, så vi kan få projektionen frem ved at gange $\vec{a}$ med et tal:

$$\vec{b}_{\vec{a}} = t\vec{a}$$

Når $\vec{c}$ er vektoren på figuren, er

$$\vec{b} = t\vec{a} + \vec{c}$$

Begge sider i denne ligning prikker vi med $\vec{a}$ og får:

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = \left(t\vec{a} + \vec{c}\right)\cdot\vec{a}$$

Vi prikker ind i parentesen og får:

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = (t\vec{a})\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{a}$$

Første led på højre side omskriver vi med 46a, og sidste led er 0 da $\vec{c}$ er nulvektor eller vinkelret på $\vec{a}$:

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = t\left|\vec{a}\right|^2$$

Begge sider i denne ligning dividerer vi med $\left|\vec{a}\right|^2$ og får:

$$\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|^2} = t$$

Vi indsætter dette udtryk for t i følgende ligning som vi begrundede ovenfor:

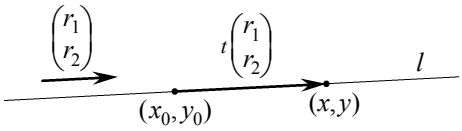
$$\vec{b}_{\vec{a}} = t\vec{a}$$

og får:

49a. $$\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|^2}\vec{a}\ .$$

50. Bevis for parameterfremstilling for en linje

l er linjen som går gennem (x_0, y_0) og er parallel med $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.



Et punkt (x, y) ligger på l

netop når

vektoren fra (x_0, y_0) til (x, y) er $\vec{o}$ eller parallel med $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ Se figur.

dvs.

vektoren fra (x_0, y_0) til (x, y) er lig $t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, hvor t er et tal

dvs.

vi får (x, y) når vi lægger $t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$'s koordinater til (x_0, y_0)

altså

50a. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

så vi har bevist at 50a er en parameterfremstilling for

linjen l som går gennem (x_0, y_0) og har retningsvektoren $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

I rummet er beviset det samme bortset fra at der er tre koordinater.

51. Bevis for ligning for linje Kun plangeometri.

l er linjen som går gennem (x_0, y_0) og er vinkelret på $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Vektoren fra (x_0, y_0) til (x, y) er $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$. Se figur.

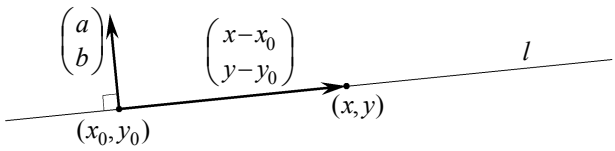
Et punkt (x, y) ligger på l

netop når

$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ er $\vec{o}$ eller vinkelret på $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

og dette gælder netop når

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = 0$$



dvs.

51a. $$a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$$

Vi har nu bevist at 51a er en ligning for linjen der går gennem (x_0, y_0) og har normalvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

52. Bevis for ligning for plan Kun rumgeometri.

Beviset er magen til beviset i afsnit 51 bortset fra at der er tre koordinater og vi siger ”plan” i stedet for ”linje” .

53. Bevis for ligning for cirkel Kun plangeometri.

M er cirklen med centrum $C(x_0, y_0)$ og radius r.
Et punkt $P(x, y)$ ligger på M netop når

længden af $\overrightarrow{CP}$ er r

dvs.

længden af $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ er r.

Ved hjælp af længdeformlen (se 7b) kan vi skrive dette sådan:

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$$

Da begge sider er ≥ 0, kan vi opløfte til anden. Så får vi

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Dette er cirklens ligning (se 28a).

54. Bevis for ligning for kugle Kun rumgeometri.

Beviset er magen til beviset i afsnit 53 bortset fra at der er tre koordinater og vi siger kugle i stedet for cirkel.

A
afstand 4, 17
afstand fra punkt til linje i planen 17
afstand fra punkt til plan 17
afstand mellem punkter 4
afsætte vektor ud fra punkt 2, 3
areal 10, 11
areal af firkant 11, 12
areal af firkant i planen 11
areal af firkant i rummet 12
areal af parallelogram 10, 11
areal af parallelogram i planen 10
areal af parallelogram i rummet 11
areal af trekant 11, 12
areal af trekant i planen 11
areal af trekant i rummet 12
B
begyndelsespunkt 1
beviser 23
D
determinant 9, 10
G
gange, krydsprodukt 11, 12
gange, prikprodukt 7, 8
gange, tal og vektor 5
gange, vektorprodukt 11
H
højrehåndsregel 12
K
koordinater til punkt i planen 1
koordinater til punkt i rummet 1
koordinater til vektors slutpunkt 3
koordinatgeometri 13
koordinatsystem i planen 1
koordinatsystem i rummet 1
koordinatsæt til punkt 1
koordinatsæt til vektor 2
krydsprodukt 11, 12
L
ligning for cirkel 16, 25
ligning for kugle 16, 25
ligning for linje 14, 25
ligning for plan 15, 25
længde af projektion af vektor 8
længde af vektor 3, 9
M
minus, vektorer 6
modsat vektor 4
N
normalvektor 14, 15, 17, 19
normalvektor for linje 14
normalvektor for plan 15
nulvektor 3, 23
numerisk værdi 9
O
ortogonal 7
P
parallel 10, 11
parallel i planen 10
parallel i rummet 11
parallelogram 2
parameterfremstilling for linje 13, 24
plus, vektorer 5
prikke ind i en parentes 23
prikke med nulvektor 23
prikprodukt 7, 8
projektion 6, 7, 8, 21
projektion af punkt på linje 6, 21
projektion af punkt på plan 7, 21
projektion af vektor på vektor 7, 8
R
retningsvektor 13, 17, 19
røringspunkt 22
røringspunkt på cirkel 22
røringspunkt på kugle 22
S
skalarprodukt 7
skæring 19, 20
skæring mellem linje og cirkel 20
skæring mellem linje og kugle 20
skæring mellem linje og plan 20
skæring mellem to linjer 19
slutpunkt 3
slutpunkt for vektor 2
startpunkt for vektor 2
stedvektor 3
T
tal gange vektor 5
tangent 22
tangent til cirkel 22
tangentplan 22
tværvektor 4
V
vektor 2
vektor gange tal 5
vektor minus vektor 6
vektor plus vektor 5
vektorprodukt 11
vektors koordinatsæt 2
vektors længde 3
vektors slutpunkt 2, 3
vektors startpunkt 2
vilkårligt punkt på linje 19
vinkel 8, 17, 18, 19
vinkel mellem linje og plan 19
vinkel mellem linjer 17
vinkel mellem planer 18
vinkel mellem sideflader 18
vinkel mellem vektorer 8
vinkelret 7, 12, 23
X
xy-planen 1