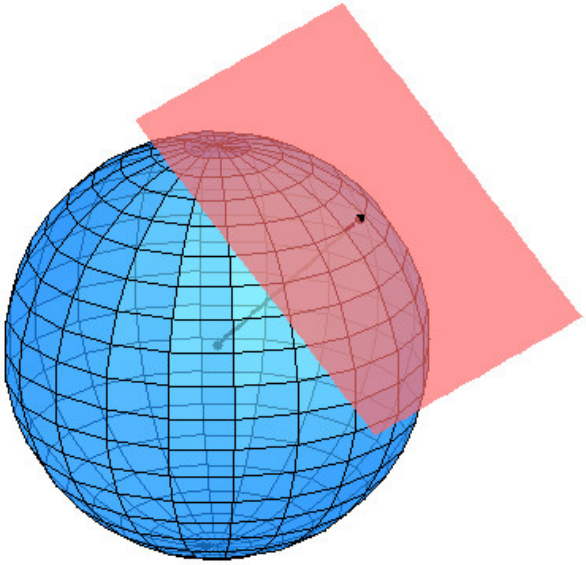
Vektorer
og
koordinatgeometri

for gymnasiet, udgave 5



2017 Karsten Juul

VEKTORER

1. Koordinater til punkt i planen 1
2. Koordinater til punkt i rummet....1
3. Vektor: Definition, sprogbrug, m.m. 2
4. Vektor: Koordinater 2
5. Koordinater til vektors slutpunkt....3
6. Nulvektor 3
7. Længde af vektor....3
8. Modsat vektor....4
9. Tværvektor 4
10. Tal gange vektor....5
11. Vektor plus vektor....5
12. Vektor minus vektor....6
13. Projektion 6
14. Prikprodukt....7
15. Prikprodukt: Vinkelret?....7
16. Prikprodukt: Vinkel mellem vektorer....8
17. Prikprodukt: Projektion af vektor....8
18. Determinant....9
19. Determinant: Parallel?....10
20. Determinant: Areal....10
21. Krydsprodukt....11
22. Krydsprodukt: Parallel?....11
23. Krydsprodukt: Areal....11
24. Krydsprodukt: Vinkelret vektor 12

KOORDINATGEOMETRI

25. Parameterfremstilling for linje 13
26. Ligning for linje 14
27. Ligning for plan....15
28. Ligning for cirkel 16
29. Ligning for kugle....16
30. Afstand fra punkt til linje 17
31. Afstand fra punkt til plan 17
32. Vinkel mellem linjer....17
33. Vinkel mellem planer....18
34. Vinkel mellem sideflader 18
35. Vinkel mellem linje og plan 19
36. Vilkårligt punkt på linje 19
37. Skæring mellem to linjer *l* og *m* 19
38. Skæring mellem linje og cirkel 20
39. Skæring mellem linje og kugle....20
40. Skæring mellem linje og plan....20
41. Projektion af punkt på linje 21
42. Projektion af punkt på plan 21
43. Tangent til cirkel 22
44. Tangentplan til kugle....22

BEVISER

45. Bevis for at vi må prikke ind i en parentes....23
46. Bevis for formel 46a....23
47. Bevis for at vi får nul når vi prikker med nulvektor....23
48. Bevis for regel om skalarprodukt og vinkelret 23
49. Bevis for formlen for projektion af vektor 24
50. Bevis for parameterfremstilling for en linje 24
51. Bevis for ligning for linje 25
52. Bevis for ligning for plan 25
53. Bevis for ligning for cirkel 25
54. Bevis for ligning for kugle 25

ØVELSER 26-41

Tidligere versioner af dete hæfte har skiftet adresse til

http://mat1.dk/vektorer_og_koordinatgeometri_for_gymnasiet_udgave_1.pdf
http://mat1.dk/vektorer_og_koordinatgeometri_for_gymnasiet_udgave_2.pdf
http://mat1.dk/vektorer_og_koordinatgeometri_for_gymnasiet_udgave_3.pdf
http://mat1.dk/vektorer_og_koordinatgeometri_for_gymnasiet_udgave_4.pdf

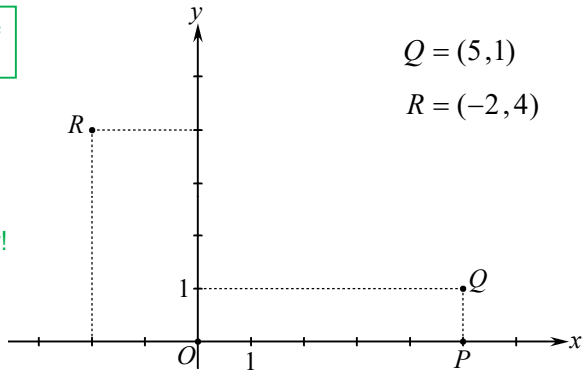
Vektorer og koordinatgeometri for gymnasiet, udgave 5 © 2017 Karsten Juul

Nyeste version af dette hæfte kan downloades fra mat1.dk/noter.htm . Hæftet må bruges i undervisningen hvis læreren med det samme sender en e-mail til kj@mat1.dk som oplyser at dette hæfte benyttes, og oplyser hold, niveau, lærer og skole. 5/8-2017

VEKTORER

Det hedder **et** plan, ikke **en** plan, men i geometri er begge dele korrekt. I eksamensopgaver skrives **en** plan.

1. Koordinater til punkt i planen



$Q = (5,1)$

$R = (-2,4)$

1a. Koordinatsystem i planen. Se figur.
De to koordinatakser er vinkelret på hinanden.

1b. Begyndelsepunkt O er koordinataksernes skæringspunkt og har koordinatsættet (0,0).

O er et bogstav!

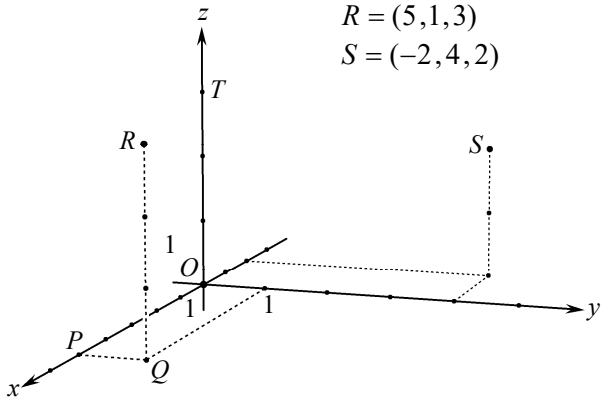
1c. Koordinatsæt til punktet Q
Vi anbringer et flytbart punkt i O.
Vi forskyder punktet 5 enheder i x-aksens retning så det kommer fra O til P.
Når vi forskyder 5 enheder i x-aksens retning, så bliver x-koordinaten 5 enheder større.
Når vi forskyder i x-aksens retning er det kun x-koordinaten der ændres.
Altså har P koordinatsættet $(5,0)$.

Fra P forskyder vi punktet 1 enhed i y-aksens retning så det kommer fra P til Q.
Når vi forskyder 1 enhed i y-aksens retning, så bliver y-koordinaten 1 enhed større.
Når vi forskyder i y-aksens retning er det kun y-koordinaten der ændres.
Altså har Q koordinatsættet $(5,1)$.

Det første tal i koordinatsættet er punktets x-koordinat.
Det andet tal i koordinatsættet er punktets y-koordinat.

1d. Koordinatsæt til punktet R
På den øverste figur kan vi kan komme til R ved at starte i O, forskyde -2 i x-aksens retning og forskyde 4 i y-aksens retning. Derfor er $R = (-2,4)$.

2. Koordinater til punkt i rummet



$R = (5,1,3)$

$S = (-2,4,2)$

2a. Koordinatsystem i rummet
Figuren viser et koordinatsystem i rummet
De tre koordinatakser er vinkelret på hinanden.

2b. Begyndelsepunkt O.
Begyndelsespunktet er koordinataksernes skæringspunkt. Bogstavet O bruges ofte til at betegne begyndelsespunktet.
O har koordinatsættet (0,0,0).

2c. Koordinatsæt til punktet R
Vi anbringer et flytbart punkt i O.
Vi forskyder punktet 5 enheder i x-aksens retning så det kommer fra O til P.
Når vi forskyder 5 enheder i x-aksens retning, så bliver x-koordinaten 5 enheder større.
Når vi forskyder i x-aksens retning er det kun x-koordinaten der ændres.
Altså har P koordinatsættet $(5,0,0)$.

Fra P forskyder vi punktet 1 enhed i y-aksens retning så det kommer fra P til Q.
Når vi forskyder 1 enhed i y-aksens retning, så bliver y-koordinaten 1 enhed større.
Når vi forskyder i y-aksens retning er det kun y-koordinaten der ændres.
Altså har Q koordinatsættet $(5,1,0)$.

Fra Q forskyder vi punktet 3 enheder i z-aksens retning så det kommer fra Q til R.
Når vi forskyder 3 enheder i z-aksens retning, så bliver z-koordinaten 3 enheder større.
Når vi forskyder i z-aksens retning, er det kun z-koordinaten der ændres.
Altså har R koordinatsættet $(5,1,3)$.

Det første tal i koordinatsættet er punktets x-koordinat. Det andet tal i koordinatsættet er punktets y-koordinat. Det tredje tal i koordinatsættet er punktets z-koordinat.

Bemærk at punkterne R og T ligger lige langt over xy-planen som indeholder x-aksen og y-aksen.
Planen der indeholder x-akse og z-akse, kaldes xz-planen, og yz-planen indeholder y-akse og z-akse.

2d. Koordinatsæt til punktet S
Der gælder at $S = (-2,4,2)$ da vi kan komme til punktet S ved at
starte i O, forskyde -2 i x-aksens retning, 4 i y-aksens retning og 2 i z-aksens retning.

3. Vektor: Definition, sprogbrug, mm.

3a. En vektor er en pil. Hvis vi forskyder en pil uden at dreje den, så er pilen stadig samme vektor.

3b. En vektor kan betegnes med et lille bogstav med pil over.

3c. På figurerne 3f og 3g gælder:

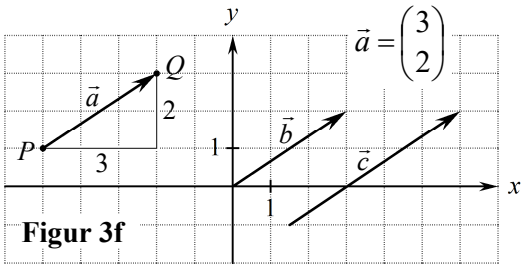
Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er samme vektor, for de kan forskydes over i hinanden da de har samme længde og samme retning.

Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{c}$ er ikke samme vektor da de har forskellig længde.

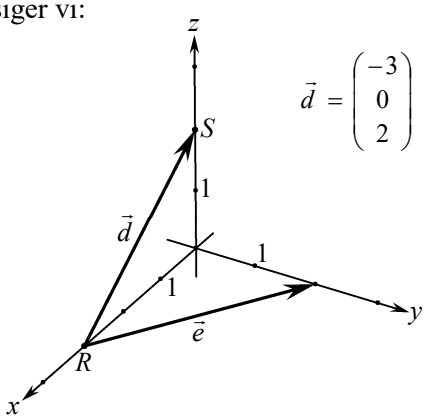
Vektorerne $\vec{d}$ og $\vec{e}$ er ikke samme vektor da de har forskellig retning.

3d. På figur 3f går vektoren $\vec{a}$ fra punktet P til punktet Q. Så kan denne vektor betegnes med $\overrightarrow{PQ}$.
Der gælder at $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ og $\vec{b} = \overrightarrow{PQ}$.

3e. Når en vektor $\vec{a}$ er anbragt så den går fra et punkt P til et punkt Q, så siger vi:
P er vektorens startpunkt og Q er vektorens slutpunkt.
Når vi afsætter vektoren ud fra P, så er dens slutpunkt Q.

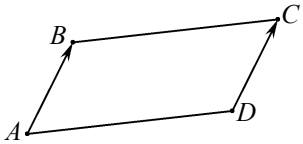


Figur 3f



Figur 3g

3h. En firkant $ABCD$ er et parallelogram netop hvis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



4. Vektor: Koordinater

4a. **Regel:** Vi kan få en vektors koordinatsæt ved at trække startpunktets koordinater fra slutpunktets koordinater.

4b. **Skrivemåde:** En vektors koordinatsæt skrives lodret.

4c. Når $A = (a_1, a_2)$ og $B = (b_1, b_2)$, er

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

4d. Når $A = (a_1, a_2, a_3)$ og $B = (b_1, b_2, b_3)$, er

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

4e. **Eksempel**

På figur 3f er $P = (-5, 1)$ og $Q = (-2, 3)$

så $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 - (-5) \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

dvs. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4f. **Eksempel**

På figur 3g er $R = (3, 0, 0)$ og $S = (0, 0, 2)$

så $\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ 0 - 0 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

dvs. $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4g. Dette koordinatsæt fortæller at $\vec{a}$ går
3 i x-aksens retning og
2 i y-aksens retning.
Dette kan vi også se på figur 3f.

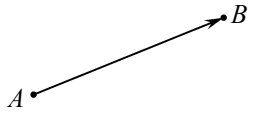
4h. Dette koordinatsæt fortæller at $\vec{d}$ går
–3 i x-aksens retning,
0 i y-aksens retning og
2 i z-aksens retning.
Dette kan vi også se på figur 3g.

4i. Hvis en vektors startpunkt er O(0,0), så er vektorens koordinater = slutpunktets koordinater.
En vektor er stedvektor for et punkt hvis den går fra O(0,0) til punktet. $\overrightarrow{OA}$ er stedvektor for A.

5. Koordinater til vektors slutpunkt

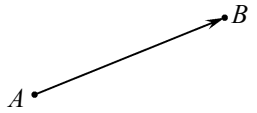
5a. Når $A=(a_1,a_2)$ og $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ er

$$B=(a_1+x\ ,\ a_2+y)$$



5b. Når $A=(a_1,a_2,a_3)$ og $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ er

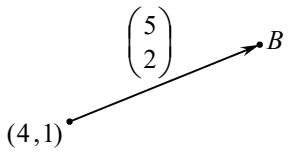
$$B=(a_1+x\ ,\ a_2+y\ ,\ a_3+z)$$



5c. I ord kan de to formler udtrykkes sådan:

Når en vektor er afsat ud fra et punkt,
og man lægger vektorens koordinater til punktets koordinater,
så får man koordinaterne til vektorens slutpunkt.

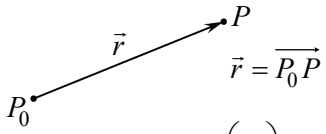
5d. **Eksempel**



Ud fra figuren slutter vi:

$$B\ =\ (4+5\ ,\ 1+2)\ =\ (9\ ,3)$$

5e. **Eksempel**



$$\vec{r}=\overrightarrow{P_0P}$$

$$P_0=(x_0,y_0,z_0)\ ,\quad \vec{r}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}\ ,\quad P=(x,y,z)$$

Med disse betegnelser får vi ud fra figuren:

$$(x,y,z)\ =\ (x_0+r_1\ ,\ y_0+r_2\ ,\ z_0+r_3)$$

6. Nulvektor

6a. Vekoren med længde 0 kaldes <u>nulvektor</u> og betegnes med $\vec{o}$ som er <u>bogstavet lille o</u> med pil over.

6b. I planen er $\vec{o}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, og i rummet er $\vec{o}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

6c. På en figur er nulvektor et punkt.

7. Længde af vektor

7a. **Skrivemåde:** Symbolet $|\vec{v}|$ betyder længden af vektoren $\vec{v}$.

7b. Når $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, er

$$|\vec{v}|\ =\ \sqrt{x^2+y^2}\ .$$

7c. Når $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, er

$$|\vec{v}|\ =\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

7d. **Opgave** Bestem længden af vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1{,}5\\3{,}6\end{pmatrix}$.

I rummet er udregningerne de samme bortset fra at der er tre koordinater.

Svar 1 Se 7b.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1{,}5\\3{,}6\end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{1{,}5^2+3{,}6^2}\ =\ \underline{\underline{3{,}9}}$$

Svar 2

norm = længde

$\vec{a}=\begin{bmatrix}1.5\\3.6\end{bmatrix}$

$\text{norm}\left(\begin{bmatrix}1.5\\3.6\end{bmatrix}\right)=3.9$ udregnet af Nspire

Længde af $\vec{a}$ er 3.9

Svar 3

norm = længde

$\mathbf{a}:=\begin{bmatrix}1.5\\3.6\end{bmatrix}$

$\text{norm}(\mathbf{a})=3.9$ udregnet af Nspire

Længde af $\vec{a}$ er 3.9

Afsnit 7 fortsætter på næste side!

7e. **Opgave** Bestem afstand mellem $A(-2,11)$ og $B(6,5)$.

I rummet er udregningerne de samme bortset fra at der er tre koordinater.

Svar 1 Se 4c, 7b.

$A(-2,11)$ $B(6,5)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-(-2) \\ 5-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8^2+(-6)^2} = 10$$

Afstand mellem A og B er $\underline{\underline{10}}$

Svar 2 Se 4c.

norm = længde

$A(-2, 11)$ $B(6, 5)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 6-(-2) \\ 5-11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{norm}\left(\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}\right) = 10$$ udregnet af Nspire

Afstand mellem A og B er 10

Svar 3 Se 4i, 4c.

norm = længde

$$\mathbf{OA} := \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \end{bmatrix} \quad \mathbf{OB} := \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} := \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}$$ udregnet af Nspire

$$\text{norm}(\mathbf{AB}) = 10$$ udregnet af Nspire

Afstand mellem A og B er 10

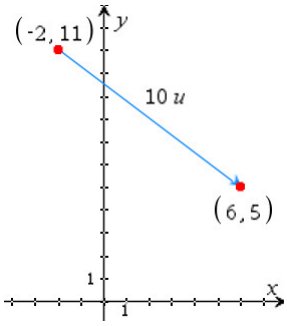
Kontrol ved elektronisk aflæsning på figur

Afsætter punkter med A's og B's koordinater.

Forbinder disse med vektor.

Måler elektronisk dennes længde.

Resultat er 10 ligesom ved udregning.



8. Modsat vektor

8a. Koordinater til modsat vektor

8b. En vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ har den modsatte vektor

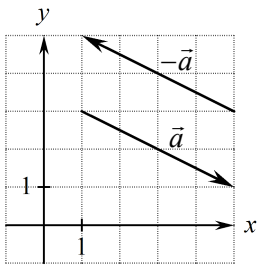
$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$$

8c. En vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ har den modsatte vektor

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}.$$

8d. **Modsat vektor på figur**

Den modsatte vektor til $\vec{a}$ har samme længde som $\vec{a}$ og har modsat retning af $\vec{a}$



8e. **Eksempel**

På figuren er $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Så er $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Se 8b

I rummet er udregningen den samme bortset fra at der er tre koordinater.

9. Tværvektor

Kun plangeometri. I rummet kan bruges krydsprodukt.

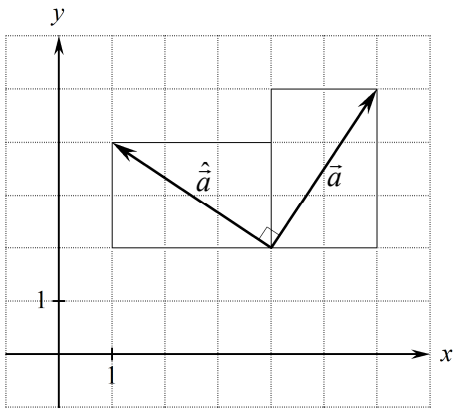
9a. Når vi drejer en vektor 90° mod uret, så får vi vektorens tværvektor. Se figur 9b

Vi skriver $\frown$ over en vektor for at betegne tværvektoren.

$\hat{\vec{a}}$ er tværvektoren til $\vec{a}$.

En vektor i rummet har IKKE en tværvektor.

Dette skyldes at en vektor i rummet kan drejes 90° på uendelig mange måder. Vi kan ikke vide hvilken af disse vi skal bruge.



Figur 9b

Afsnit 9 fortsætter på næste side!

9c. Formel for tværvektor

Vi udregner koordinaterne til tværvektoren ved hjælp af følgende formel: **9d.**

$$\widehat{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

9e. Eksempel: Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, er $\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Se figur 9b.

9f. Eksempel

Figur 9g viser et kvadrat.

Af 9a får vi

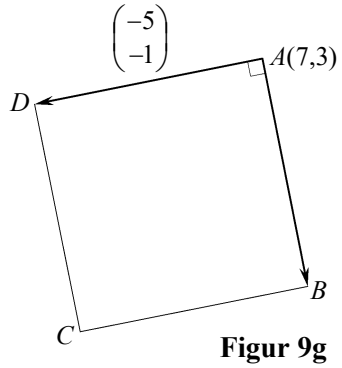
Du skal IKKE huske at reglen er nr. 9a. Du skal læse reglen, huske den, og forstå at den bruges her. Det samme gælder alle tilsvarende henvisninger.

$$\overrightarrow{AB} = \widehat{\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Vi omskriver højresiden med Formel 9d og får $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Af dette og Formel 5a får vi $B = (7+1, 3+(-5))$

Altså er $B = (8, -2)$



Figur 9g

10. Tal gange vektor

10a. Koordinater til $k\vec{a}$

Vi ganger en vektor med et tal ved at gange hver af vektorens koordinater med tallet:

10b.

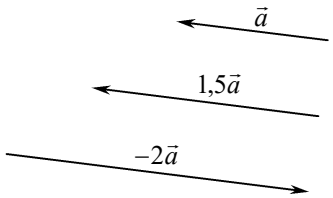
$$k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

10c.

$$k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

10d. $k\vec{a}$ på en figur

$1{,}5\vec{a}$ er ensrettet med $\vec{a}$ da $1{,}5$ er positiv.
$1{,}5\vec{a}$ er $1{,}5$ gange så lang som $\vec{a}$.
$-2\vec{a}$ er modsat rettet $\vec{a}$ da -2 er negativ.
$-2\vec{a}$ er 2 gange så lang som $\vec{a}$.



10e. $0\vec{a}$ er nulvektoren $\vec{o}$.

10f. Længden af $k\vec{a}$ er $|k|$ gange længden af $\vec{a}$. Se 17c.

10g. $k\vec{a}$ er ensrettet med $\vec{a}$ hvis k er positiv. $k\vec{a}$ er modsatrettet $\vec{a}$ hvis k er negativ.

10h. Hvis $\vec{b}$ er $\vec{o}$ eller parallel med $\vec{a}$, så findes et tal k så $\vec{b}$ er $k\vec{a}$.

11. Vektor plus vektor

Koordinater til $\vec{a}+\vec{b}$

11a.

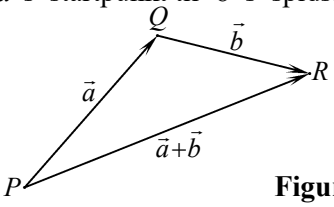
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$$

11b.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$$

11c. $\vec{a}+\vec{b}$ på en figur

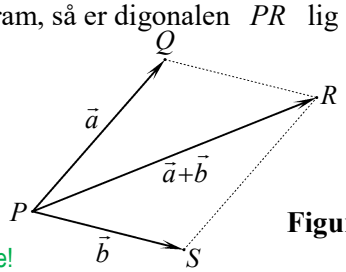
Hvis $\vec{b}$ er afsat i forlængelse af $\vec{a}$ som på figur 11e, så er $\vec{a}+\vec{b}$ vektoren $\overrightarrow{PR}$ fra $\vec{a}$'s startpunkt til $\vec{b}$'s spids.



Figur 11e

11d. $\vec{a}+\vec{b}$ på en figur

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er afsat ud fra samme punkt som på figur 11f, og $PQRS$ er et parallelogram, så er digonalen $\overrightarrow{PR}$ lig $\vec{a}+\vec{b}$.



Figur 11f

Afsnit 11 fortsætter på næste side!

11g. Eksempel

Figur 11h viser tre vektorer. Af regel 11c får vi

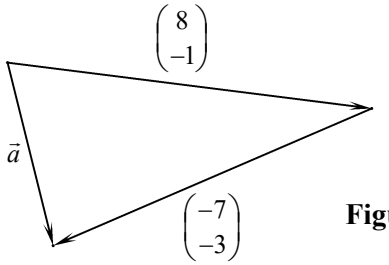
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Heraf og af 11a får vi

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 + (-7) \\ -1 + (-3) \end{pmatrix}$$

Altså er

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$



Figur 11h

12. Vektor minus vektor

Koordinater til $\vec{a} - \vec{b}$

12a.

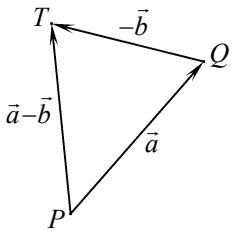
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

12b.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

12c. $\vec{a} - \vec{b}$ på en figur

Hvis $\vec{a}$ og $-\vec{b}$ er afsat i forlængelse af hinanden som på figur 12e, så er $\overrightarrow{PT}$ lig $\vec{a} - \vec{b}$.

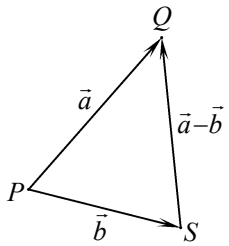


Figur 12e

12d. $\vec{a} - \vec{b}$ på en figur

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er afsat ud fra samme punkt, så er $\vec{a} - \vec{b}$ vektoren fra $\vec{b}$'s spids til $\vec{a}$'s spids.

På figur 12f, er $\overrightarrow{SQ}$ lig $\vec{a} - \vec{b}$.



Figur 12f

12e. Omskrivninger med plus, minus og gange med tal

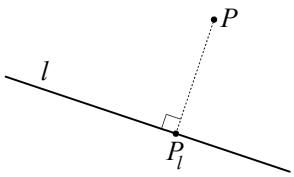
$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - (-3) \\ 20 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \cdot 4 \\ t \cdot 1 \\ t \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t \\ t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 4t \\ -3 + t \\ 2 - t \end{pmatrix}$$

13. Projektion

13a. Projektion af punkt på linje

Når vi fra et punkt P går vinkelret ind på en linje l, kommer vi til et punkt P_l på l som vi kalder projektionen af P på l.



13b. Sådan kan vi tegne projektionen Kun plangeometri.

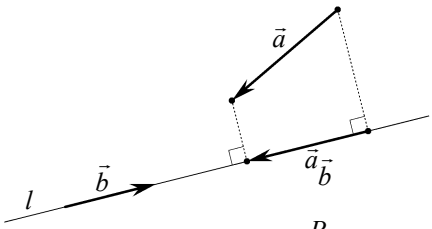
For at tegne projektionen af et punkt P på en linje l tegner vi den linje m som går gennem P og er vinkelret på l. Skæringspunktet mellem m og l er det punkt P_l vi kalder projektionen af P på l.

Afsnit 13 fortsætter på næste side!

Ordet projektion	udtales	pro jæg sjon
	IKKE	pro sjæg sjon.
Ordet projicere	udtales	pro ji sere
	IKKE	pro sji sere
	IKKE	pro sjæg tere.

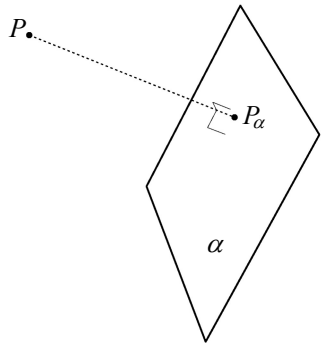
13c. **Projektion af vektor på vektor**

Linjen l er parallel med $\vec{b}$.
Når vi projicerer startpunkt og slutpunkt for $\vec{a}$ på l, så får vi startpunkt og slutpunkt for en vektor $\vec{a}_{\vec{b}}$ som vi kalder projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.



13d. **Projektion af punkt på plan**

Når vi fra et punkt P går vinkelret ind på en plan α, kommer vi til et punkt P_α i α som vi kalder projektionen af P på α.



14. Prikprodukt

14a. Prikproduktet $\vec{a}\cdot\vec{b}$ af to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er et tal.
Når vi kender koordinaterne, kan vi udregne prikproduktet ved hjælp af formlerne i rammerne.
Prikproduktet kaldes også skalarproduktet. "Skalar" betyder tal.

14b.
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2$$

14c.
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$

15. Prikprodukt: Vinkelret?

15a. Symbolet $\vec{a}\perp\vec{b}$ læses "$\vec{a}$ er vinkelret på $\vec{b}$" eller "$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale".

15b. $\vec{a}\perp\vec{b}$ netop når $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
hvis hverken $\vec{a}$ eller $\vec{b}$ er nulvektor.

15c. **Opgave** $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestem t så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

I rummet er udregningerne de samme bortset fra at der er tre koordinater.

Svar 1 Uden hjælpemidler, se 14b og 15b.

$\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$ er ikke nulvektor så de er ortogonale netop når deres prikprodukt er 0.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}=0$$
$$3\cdot t+1\cdot 2=0$$
$$3\cdot t=-2$$
$$t=-\tfrac{2}{3}$$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale når $\underline{\underline{t=-\tfrac{2}{3}}}$.

Svar 2 Se 15b.

$\vec{a}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix}$ er ikke nulvektor, så de er ortogonale netop når deres prikprodukt er 0.

Nspire løser ligningen $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix}=0$ mht. t og får $t=-\dfrac{2}{3}$.

Her står hvad Nspire gør i solve-linjen. Det er ikke nok at skrive solve-linjen.

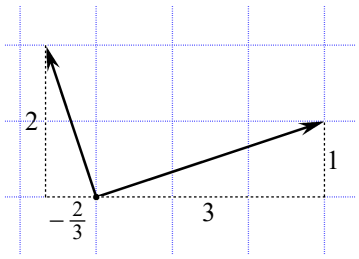
$\text{solve}\left(\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix}\right)=0,t\right) \blacktriangleright t=\dfrac{-2}{3}$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale når $t=-\dfrac{2}{3}$.

Kontrol på kvadreret papir

Når $t=-\tfrac{2}{3}$ er $\vec{b}=\begin{pmatrix} -\tfrac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$.

På kvadreret papir tegner vi denne vektor og $\vec{a}$.
Med vinkelmåler måler vi vinklen mellem vektorerne.
Vi får at vinklen er 90°, som den skulle være.



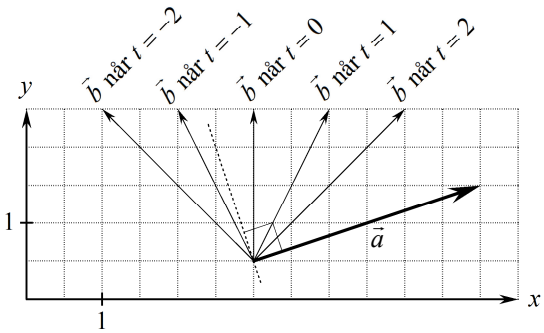
Afsnit 15c fortsætter på næste side!

Tankegang bag spørgsmålet

På figuren er den punkterede linje vinkelret på $\vec{a}$.

Vi ser at når t stiger fra –2 til 2, så drejer $\vec{b}$'s retning.

Det ser ud til at $\vec{a} \perp \vec{b}$ for en værdi af t som ligger mellem -1 og 0 .

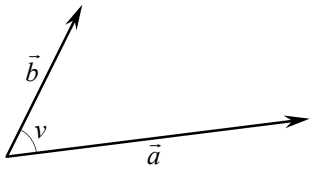


16. Prikprodukt: Vinkel mellem vektorer

16a. Når vi afsætter to vektorer ud fra samme punkt, danner de to vinkler. Den af vinklerne der er mindre end eller lig 180°, kalder vi vinklen mellem vektorerne.

16b. Når v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$, er

$$\cos(v) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} .$$



16c. Når $-1 \le p \le 1$ har ligningen $\cos(v) = p$ netop én løsning i intervallet $0° \le v \le 180°$.

Denne løsning betegnes $\cos^{-1}(p)$.

I Nspire må $\cos^{-1}$ ikke skrives som en potens. Tegnet $^{-1}$ skal vælges på tegnpaletten.

16d. Opgave $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestem vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Svar 1 Se 16b, 16c, 14b, 7b.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Vinkel mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

I rummet er udregningerne de samme bortset fra at der er tre koordinater.

$$\cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{8\cdot(-1)+2\cdot 3}{\sqrt{8^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+3^2}}\right) = 94{,}3987° \approx \underline{\underline{94{,}4°}}$$

Svar 2 Se 16b og 16c.

dotp = prikprodukt norm = længde

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ Vinkel mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)}{\text{norm}\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}\right)\cdot\text{norm}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)}\right) = 94.3987° \approx 94{,}4°$$

udregnet af Nspire

Svar 3 Se 16b og 16c.

dotp = prikprodukt norm = længde

$\mathbf{a}:=\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b}:=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ Vinkel mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\text{norm}(\mathbf{a})\cdot\text{norm}(\mathbf{b})}\right) = 94.3987° \approx 94{,}4°$$

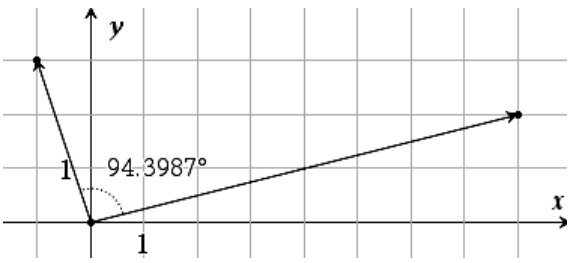
udregnet af Nspire

Kontrol ved elektronisk aflæsning på figur

Vi tegner $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ved elektronisk måling af vinklen mellem disse får vi 94,3987°.

Det er samme resultat som vi fik ved udregning.



17. Prikprodukt: Projektion af vektor

17a. Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} .$$

17b. Længden af projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er

$$\left|\vec{a}_{\vec{b}}\right| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|} .$$

Afsnit 17 fortsætter på næste side!

17c. Symbolet $|x|$ læses "den numeriske værdi af x" når x er et tal.

Der gælder $|0|=0$, $|-4|=4$, $|4|=4$, $|-0{,}5|=0{,}5$, $|0{,}5|=0{,}5$, osv.

$|\vec{b}|$ er **længden** af $\vec{b}$ fordi $\vec{b}$ er en **vektor**. $|\vec{a}\cdot\vec{b}|$ er den **numeriske værdi** af $\vec{a}\cdot\vec{b}$ fordi $\vec{a}\cdot\vec{b}$ er et **tal**.

17d. Opgave $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Bestem projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

I rummet er udregningerne de samme bortset fra at der er tre koordinater.

Svar 1 Se 17a, 14b, 7b, 10b.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = \frac{-3\cdot3+2\cdot1}{3^2+1^2}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = -0{,}7\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-2{,}1\\-0{,}7\end{pmatrix}}} .$$

Svar 2 Se 17a.

dotp = prikprodukt norm = længde

$\vec{a}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ Projektion af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er

$$\frac{\mathrm{dotP}\left(\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right)}{\left(\mathrm{norm}\left(\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right)\right)^2}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2.1\\-0.7\end{bmatrix}$$

udregnet af Nspire

Svar 3 Se 17a.

dotp = prikprodukt norm = længde

$\mathbf{a}:=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}:=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ Projektion af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er

$$\frac{\mathrm{dotP}(\mathbf{a},\mathbf{b})}{(\mathrm{norm}(\mathbf{b}))^2}\cdot\mathbf{b} = \begin{bmatrix}-2.1\\-0.7\end{bmatrix}$$

udregnet af Nspire

Kontrol ved elektronisk aflæsning på figur

Elektronisk konstruktion af

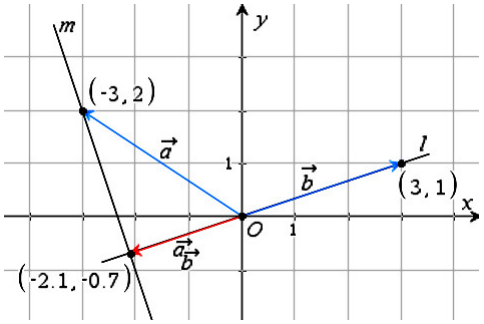
vektor $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ud fra $O(0,0)$

linje l gennem $\vec{b}$'s start- og slutpunkt

linje m som er vinkelret på l og går gennem $\vec{a}$'s slutpunkt

skæringspunkt mellem l og m

vektor fra O til skæringspunkt



Denne vektor er projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Dens koordinater er lig endepunkts koordinater da startpunkt er O

Vi aflæser elektronisk slutpunkts koordinater. Det er (-2,1 , -0,7), samme resultat som ved udregning.

17e. Opgave $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. Bestem længden af projektionen $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

I rummet er udregningerne de samme bortset fra at der er tre koordinater.

Svar 1 Se 17b,14b, 7b, 17c.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \qquad |\vec{a}_{\vec{b}}| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|0\cdot2+5\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\sqrt{5}}} .$$

Svar 2 Se 17b.

dotp = prikprodukt norm = længde

$\vec{a}=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$

Længde af projektion af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er

$$\frac{\left|\mathrm{dotP}\left(\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right)\right|}{\mathrm{norm}\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{5}$$

udregnet af Nspire

Svar 3 Se 17b.

dotp = prikprodukt norm = længde

$\mathbf{a}:=\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}:=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$

Længde af projektion af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er

$$\frac{|\mathrm{dotP}(\mathbf{a},\mathbf{b})|}{\mathrm{norm}(\mathbf{b})} = \sqrt{5}$$

udregnet af Nspire

18. Determinant Kun plangeometri.

18a. Determinanten $\det(\vec{a},\vec{b})$ af to vektorer $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er et tal.

Når vi kender koordinaterne, kan vi udregne determinanten ved hjælp af formlen i rammen.

To vektorer i rummet har ikke en determinant.

18b.

$$\boxed{\det\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right) = a_1\cdot b_2 - a_2\cdot b_1}$$

Afsnit 18 fortsætter på næste side!

18c. **Opgave** $\vec{a}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$. Bestem $\det(\vec{a},\vec{b})$.

Svar 1 Uden hjælpemidler, se 18b.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

$\det(\vec{a},\vec{b}) = 8\cdot 3-2\cdot(-1) = \underline{\underline{26}}$

Svar 2

$\vec{a}=\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$

$\det(\vec{a},\vec{b}) = \det\left(\begin{bmatrix}8 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}\right) = 26$

udregnet af Nspire

Svar 3

augment samler vektorer

$\mathbf{a}:=\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}:=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$

$\det(\text{augment}(\mathbf{a},\mathbf{b})) = 26$ udregnet af Nspire

$\det(\vec{a},\vec{b}) = 26$

19. Determinant: Parallel? Kun plangeometri. I rummet kan bruges krydsprodukt.

19a. Symbolet $\vec{a}\parallel\vec{b}$ læses "$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle".

19b.

$\vec{a}\parallel\vec{b}$ netop når $\det(\vec{a},\vec{b})=0$
hvis hverken $\vec{a}$ eller $\vec{b}$ er nulvektor.

19c. **Opgave** $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2t\end{pmatrix}$. Bestem t så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

Svar 1 Uden hjælpemidler, se 19b, 18b.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\2t\end{pmatrix}$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ikke nulvektor,
så de er parallel netop når

$\det(\vec{a},\vec{b})=0$

$(-3)\cdot 2t - 1\cdot 4 = 0$

$-6t-4=0$

$-6t=4$

$\frac{-6t}{-6}=\frac{4}{-6}$

$t=\underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$

Svar 2 Se 19b.

$\vec{a}=\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}4\\2t\end{bmatrix}$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ikke nulvektor så de er parallelle
netop når deres determinant er 0.

Nspire løser ligningen $\det\left(\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\2t\end{bmatrix}\right)=0$

mht. t og får $t=-\frac{2}{3}$.

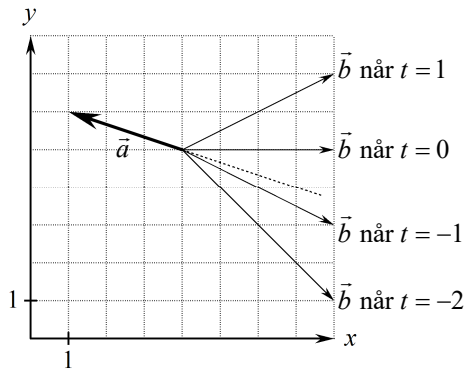
Her står hvad Nspire gør i solve-linjen. Det er ikke nok at skrive solve-linjen.

$\text{solve}\left(\det\left(\begin{bmatrix}-3 & 4\\1 & 2\cdot t\end{bmatrix}\right)=0,t\right) \blacktriangleright t=\frac{-2}{3}$

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle når $t=-\frac{2}{3}$.

Tankegang bag spørgsmålet

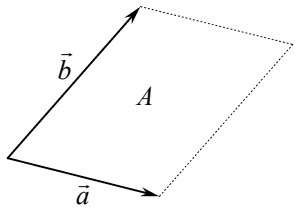
På figuren er den punkterede linje parallel med $\vec{a}$.
Vi ser at når t stiger fra -2 til 1 , så drejer $\vec{b}$'s retning. Det ser ud til at $\vec{a}\parallel\vec{b}$ for en værdi af t som ligger mellem -1 og 0 .



20. Determinant: Areal Kun plangeometri. I rummet kan bruges krydsprodukt.

20a.

Arealet A af det parallelogram der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er
$A = \lvert\det(\vec{a},\vec{b})\rvert$. Se figur.



Afsnit 20 fortsætter på næste side!

20b. **Opgave** $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$. Bestem areal af parallelogram udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Svar 1 Uden hjælpemidler. Se 20a, 18b, 17c.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$

Areal af parallelogram udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$\left|\det(\vec{a},\vec{b})\right| = \left|(-1)\cdot 2 - 3\cdot 8\right| = \left|-26\right| = \underline{\underline{26}}$$

Svar 2 Se 20a.

$\vec{a}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ $\vec{b}=\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}$

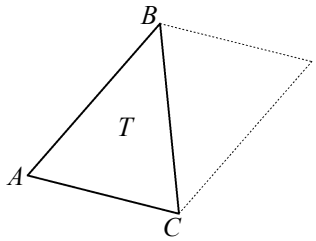
Areal af parallelogram udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$\left|\det\left(\begin{bmatrix}-1 & 8\\3 & 2\end{bmatrix}\right)\right| = 26$ udregnet af Nspire

20c. **Eksempel**

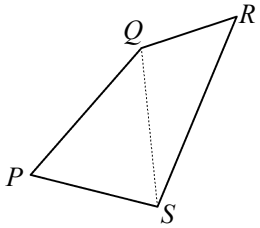
Arealet T af trekant ABC er

$$T = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|.$$



20d. **Eksempel**

En "skæv" firkant $PQRS$ deler vi op i to trekanter for at finde arealet.



21. Krydsprodukt Kun rumgeometri.

21a. Krydsproduktet $\vec{a}\times\vec{b}$ af to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er en vektor.

Når vi kender koordinaterne, kan vi udregne krydsproduktet ved hjælp af formlen i rammen.
Krydsproduktet kaldes også vektorproduktet.

21b.

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\\a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3\\a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1\end{pmatrix}$$

Vi skal vide at denne formel findes.
Vi skal ikke huske formlen.
Vi vil altid bruge Nspire til at udregne krydsprodukt.

21c. **Eksempel**

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\6\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-34\\-23\\9\end{pmatrix}$$

Dette er udregnet på Nspire ved at taste $\text{crossP}\left(\begin{bmatrix}2\\-1\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\6\\4\end{bmatrix}\right)$

Hvis det ikke skal læses af andre, kan man i stedet taste

$\text{crossP}(\{2,-1,5\},\{-3,6,4\})$

22. Krydsprodukt: Parallel? Kun rumgeometri. I planen kan bruges determinant.

22a. $\vec{a}\parallel\vec{b}$ netop når $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$

hvis hverken $\vec{a}$ eller $\vec{b}$ er nulvektor.

22b. **Eksempel**

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}23\\19\\16\end{pmatrix} \quad\text{og}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}92\\76\\64\end{pmatrix}$$

På Nspire udregner vi

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Da $\vec{a}\times\vec{b}$ er nulvektor, er $\vec{a}$ og $\vec{b}$ parallelle.

23. Krydsprodukt: Areal Kun rumgeometri. I planen kan bruges determinant.

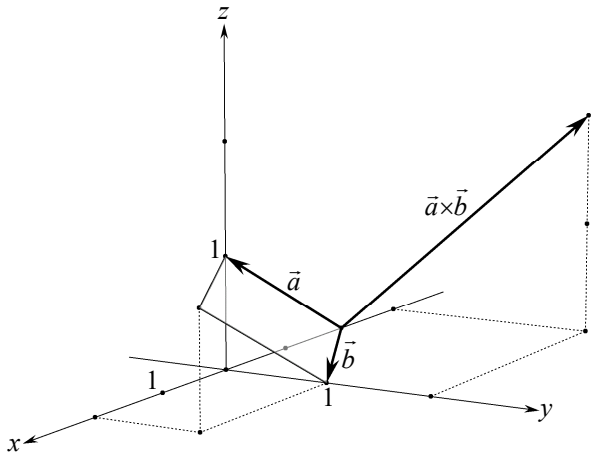
23a. Arealet A af det parallelogram der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$A = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Afsnit 23 fortsætter på næste side!

23b. **Eksempel**

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}.$$



På Nspire udregner vi $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$.

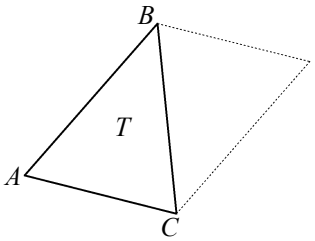
Arealet A af det parallelogram der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$A = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-1)^2+2^2+2^2} = 3 .$$

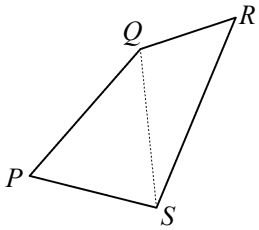
23c. **Eksempel**

Arealet T af trekant ABC er

$$T = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

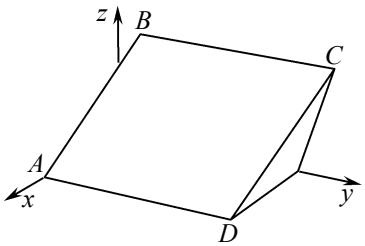


23d. **Eksempel:** En "skæv" firkant $PQRS$ deler vi op i to trekanter for at finde arealet.



23e. **Opgave** Figur viser klods i koordinatsystem med enhed dm.

Gør rede for at at $ABCD$ er et parallelogram, og bestem areal af $ABCD$.



$A(2,0,0)$
$B(1,1,2)$
$C(1,4,2)$
$D(2,3,0)$

Svar 1 Se 3h, 4d, 23a.

$A(2,0,0)$ $B(1,1,2)$ $C(1,4,2)$ $D(2,3,0)$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1-2\\1-0\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}1-2\\4-3\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ er $ABCD$ et parallelogram.

$$\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}2-2\\3-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$$

Areal af $ABCD$ er

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\right|=6{,}7082$$ *udregnet af Nspire*

Areal af $ABCD$ er $6{,}71\ \text{dm}^2$

Svar 2 Se 3h, 4d, 23a.

norm = længde crossP = krydsprodukt

$A(2,0,0)$ $B(1,1,2)$ $C(1,4,2)$ $D(2,3,0)$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}1-2\\1-0\\2-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}=\begin{bmatrix}1-2\\4-3\\2-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$$

Da $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ er er $ABCD$ et parallelogram.

$$\overrightarrow{AD}=\begin{bmatrix}2-2\\3-0\\0-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$$

Areal af $ABCD$ er

$$\text{norm}\left(\text{crossP}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}\right)\right)=6.7082$$ udregnet af Nspire

Areal af $ABCD$ er $6{,}71\ \text{dm}^2$

24. Krydsprodukt: Vinkelret vektor

Kun rumgeometri. I planen kan bruges tværvektor.

24a. Krydsproduktet af to vektorer er en vektor der er vinkelret på begge vektorer:

$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a} \quad \text{og} \quad \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$$

24b. **Højrehåndsreglen:**

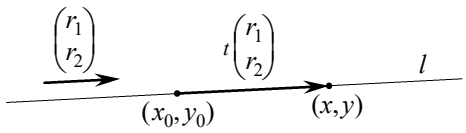
Grib om $\vec{a}\times\vec{b}$ med højre hånd så fingrene peger fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$.

Så vil $\vec{a}\times\vec{b}$ pege i tommelfingerens retning.

KOORDINATGEOMETRI

25. Parameterfremstilling for linje

25a.



Når (x_0, y_0) er et punkt på l og $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$

er parallel med l, så er følgende en parameterfremstilling for l:

25c. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

25e. Når 25c er en parameterfremstilling for l, så gælder:

(x_0, y_0) er et punkt på l.

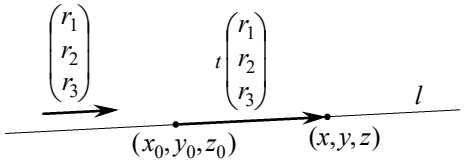
$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ er parallel med l.

25g. Antag at x_0, y_0, r_1 og r_2 i 25c er erstattet med bestemte tal. Så gælder:

Hvis vi indsætter et tal for t og udregner højresiden, så får vi koordinaterne til et punkt der ligger på linjen.

Hvis koordinaterne til et punkt ikke kan fås på denne måde, så ligger punktet ikke på linjen.

25b.



Når (x_0, y_0, z_0) er et punkt på l og $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$

er parallel med l, så er følgende en parameterfremstilling for l:

25d. $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

25f. Når 25d er en parameterfremstilling for l, så gælder:

(x_0, y_0, z_0) er et punkt på l.

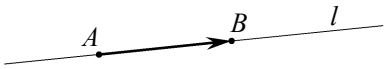
$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ er parallel med l.

25h. Antag at x_0, y_0, z_0, r_1, r_2 og r_3 i 25d er erstattet med bestemte tal. Så gælder:

Hvis vi indsætter et tal for t og udregner højresiden, så får vi koordinaterne til et punkt der ligger på linjen.

Hvis koordinaterne til et punkt ikke kan fås på denne måde, så ligger punktet ikke på linjen.

25i. En vektor der er parallel med l, kaldes en retningsvektor for l.



25j. Når A og B er to forskellige punkter på l, så er $\overrightarrow{AB}$ parallel med l.

25k. Når A er et punkt på l og $\overrightarrow{AB}$ er parallel med l, så er B et punkt på l.

25l. **Opgavetype:** Bestem parameterfremstilling for linje.

Metode: Hvis der ikke er oplyst koordinater til et punkt på linjen, så find koordinater til et punkt på linjen.

Hvis der ikke er oplyst koordinater til en vektor der er parallel med linjen, så find koordinater til en vektor der er parallel med linjen.

Indsæt koordinater fra punkt og vektor i 25c eller 25d.

25m. **Eksempel**

En linje l går gennem punkterne $A(15, 20, 20)$ og $B(25, 27, 24)$.

For at bestemme en parameterfremstilling for l bruger vi 25j, 4d og 25d.

Da A og B ligger på l, er $\overrightarrow{AB}$ parallel med l.

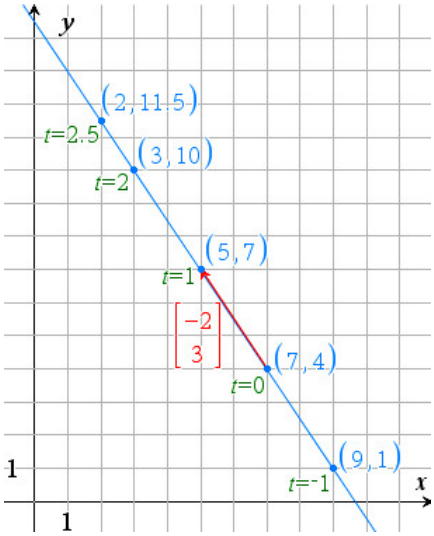
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 25-15 \\ 27-20 \\ 24-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ så } l \text{ har parameterfremstillingen } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Afsnit 25 fortsætter på næste side!

25n. **Eksempel**

Linjen på figuren har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$



Når $t = -1$ er
$x = 7 + (-1)\cdot(-2) = 9$
$y = 4 + (-1)\cdot\ 3\ = 1$

Når $t = 2$ er
$x = 7 + 2\cdot(-2) = 3$
$y = 4 + 2\cdot\ 3\ = 10$

Når $t = 2{,}5$ er
$x = 7 + 2{,}5\cdot(-2) = 2$
$y = 4 + 2{,}5\cdot\ 3\ = 11{,}5$

25o. **Opgave** $l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ligger punktet $(-13\ ,\ 33)$ på l ?

Svar Uden hjælpemidler. Se 25g og 25n.

$(-13\ ,\ 33)$ ligger kun på l hvis der er et tal t så

$$7 + t\cdot(-2) = -13$$
$$4 + t\cdot\ 3\ =\ 33$$

Af første ligning får vi $t = -10$.

Når $t = -10$ giver den anden lignings venstreside 34 . Da den ikke giver 33:

$(-13\ ,\ 33)$ ligger ikke på l .

26. Ligning for linje Kun plangeometri.

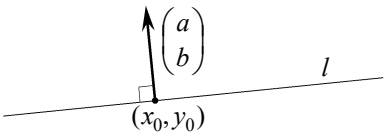
26a. Når (x_0, y_0) er et punkt på l og $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ er vinkelret på l,

så kan vi bestemme en ligning for l ved først at sætte ind i formlen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

og derefter gange ind i parenteserne og trække sammen så vi får en ligning af typen

$$ax + by + c = 0 .$$



26b. Når $ax + by + c = 0$ er en ligning for l, så er vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vinkelret på l.

26c. Når vi kender tallene a, b og c i en ligning $ax + by + c = 0$ for en linje l,
så kan vi undersøge om et punkt ligger på l ved at sætte punktets koordinater ind for x og y i ligningen.
Hvis ligningen bliver sand, så ligger punktet på l.
Hvis ligningen bliver falsk, så ligger punktet ikke på l.

26d. En vektor der er vinkelret på l kaldes en normalvektor for l.

26e. **Opgave** $l:\ 3x + by - 4 = 0$. Punktet $(1\ ,\ 2)$ ligger på l . Bestem b .

Svar Uden hjælpemidler. Se 26c.

Da $(1\ ,\ 2)$ ligger på linjen l med ligningen $3x + by - 4 = 0$, bliver ligningen sand når vi indsætter punktet.

$$3\cdot 1 + b\cdot 2 - 4 = 0$$
$$2b = 1$$
$$b = \tfrac{1}{2}$$

Afsnit 26 fortsætter på næste side!

26f. **Opgave** En linje l går gennem punkterne $A(2,7)$ og $B(-3,1)$.
Bestem ligning for l på formen $ax+by+c=0$.

Svar Uden hjælpemidler. Se 25j, 9a, 9d og 26a.

Da $A(2,7)$ og $B(-3,1)$ ligger på l, er l parallel med $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3-2\\1-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}$

Så er l vinkelret på $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-(-6)\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$

Da $(x_0,y_0)=(2,7)$ er et punkt på l, og $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$ er vinkelret på l, har l ligningen

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$$
$$6\cdot(x-2)+(-5)\cdot(y-7)=0$$
$$\underline{\underline{6x-5y+23=0}}$$

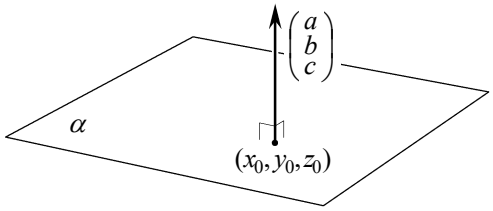
27. Ligning for plan Kun rumgeometri.

27a. Når (x_0,y_0,z_0) er et punkt i en plan α, og $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ er vinkelret på α,
så kan vi bestemme en ligning for α ved først at sætte ind i formlen

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

og derefter gange ind i parenteserne og trække sammen så vi får en ligning af typen

$$ax+by+cz+d=0\ .$$



27b. Når $ax+by+cz+d=0$ er en ligning for α, så er vektoren $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ vinkelret på α.

27c. Når vi kender tallene a, b, c og d i en ligning $ax+by+cz+d=0$ for en plan α,
så kan vi undersøge om et punkt ligger i α ved at sætte punktets koordinater ind for x, y og z i ligningen:
Hvis ligningen bliver sand, så ligger punktet i α.
Hvis ligningen bliver falsk, så ligger punktet ikke i α.

27d. Når A og B er to forskellige punkter i α, så er $\overrightarrow{AB}$ parallel med α.

27e. En vektor der er vinkelret på α, kaldes en normalvektor for α.

27f. Når $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle med α, så er $\vec{a}\times\vec{b}$ vinkelret på α
hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke er parallelle, dvs. hvis $\vec{a}\times\vec{b}$ ikke er nulvektor.

27g. **Opgave** En plan α udspændes af punkterne $A(0,3,4)$, $B(2,-2,1)$ og $C(-1,4,3)$ (dvs. α er den plan der indeholder de tre punkter). Bestem ligning for α.

Svar Se 4d, 27d, 27f, 27a.

Da $A(0,3,4)$, $B(2,-2,1)$ og $C(-1,4,3)$ ligger i α, er følgende to vektorer parallelle med α:

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2-0\\-2-3\\1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}\quad\text{og}\quad\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1-0\\4-3\\3-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}.\qquad\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}8\\5\\-3\end{pmatrix}$$

Udregnet af Nspire

Denne vektor er vinkelret på α da den ikke er nulvektor og $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er parallelle med α.

Da $(x_0,y_0,z_0)=(0,3,4)$ er et punkt i α, og $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\5\\-3\end{pmatrix}$ er vinkelret på α, har α ligningen

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$8\cdot(x-0)+5\cdot(y-3)+(-3)\cdot(z-4)=0$$
$$\underline{\underline{8x+5y-3z-3=0}}$$

27h. Udtrykket "α er den plan som linjerne l og m udspænder" betyder at l og m er to ikke-parallelle linjer der ligger i α.

27i. Udtrykket "planen α er udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$" betyder at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er to ikke-parallelle vektorer der begge er parallelle med α.

28. Ligning for cirkel Kun plangeometri.

28a. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$.
er ligning for en cirkel med centrum $C(x_0, y_0)$ og radius r .

28b. Når P er et punkt på en cirkel med centrum C, er cirklens radius $r = \left|\overrightarrow{CP}\right|$. Se 7e.

28c. **Eksempel**
En cirkel har ligningen $(x-1)^2+(y+5)^2=9$.
Vi omskriver til formen 28a : $(x-1)^2+(y-(-5))^2 = 3^2$.
Heraf ser vi at centrum er $(1,-5)$ og radius er 3 .

28d. **Metode:** Når vi kender en ligning for en cirkel, så kan vi undersøge om et punkt ligger på cirklen ved at sætte punktets koordinater ind for x og y i ligningen.
- Hvis ligningen bliver sand, så ligger punktet på cirklen.
- Hvis ligningen bliver falsk, så ligger punktet ikke på cirklen.

28e. **Opgave** En cirkel har ligningen $x^2-2x+y^2+10y+17=0$. Bestem centrum og radius.

Svar Uden hjælpemidler.
$x^2-2x+y^2+10y+17=0$ Se i **28f-1** hvordan du kommer frem til næste linje.
$x^2+1-2x + y^2+25+10y = 1+25-17$ Se i **28f-2** hvordan du kommer frem til næste linje.
$(x-1)^2 + (y+5)^2 = 9$
Heraf ser vi at centrum er $\underline{\underline{(1,-5)}}$ og radius er $\sqrt{9} = \underline{\underline{3}}$. Se **28a og 28c**.

28f. **Forklaring til 28e**
28f-1 Koefficienten til x er –2. Halvdelen er –1, og –1 i anden er 1. Vi lægger 1 til begge sider.
Koefficienten til y er 10. Halvdelen er 5, og 5 i anden er 25. Vi lægger 25 til begge sider.
Konstantleddet er 17. Vi trækker 17 fra begge sider.
28f-2 Koefficienten til x er –2. Halvdelen er –1. Derfor skal der stå –1 i første parentes.
Koefficienten til y er 10. Halvdelen er 5. Derfor skal der stå +5 i anden parentes.
Bemærk: Ifølge kvadratsætninger er $(x-1)^2 = x^2+1-2x$ og $(y+5)^2 = y^2+25+10y$.
Bemærk: Indsættes $x_0=1$, $y_0=-5$ og $r=3$ i $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$, så får vi $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 9$.
28f-3 Hvis x-led eller y-led mangler, ser omskrivningen lidt anderledes ud:
$x^2+y^2+10y+17=0$
$x^2 + y^2+25+10y = 25-17$
$(x-0)^2 + (y+5)^2 = 8$ Centrum er $(0,-5)$ og radius er $\sqrt{8}$.

29. Ligning for kugle Kun rumgeometri.

29a. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2$.
er ligning for en kugle med centrum $C(x_0, y_0, z_0)$ og radius r .

29b. **Regel:** Når P er et punkt på en kugle med centrum C, er kuglens radius $r = \left|\overrightarrow{CP}\right|$. Se 7c og 7e.

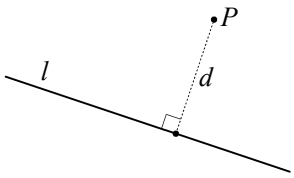
29c. **Eksempel**
En kugle har ligningen $(x-1)^2+y^2+(z+5)^2=8$.
Vi omskriver til formen 29a: $(x-1)^2+(y-0)^2+(y-(-5))^2 = \sqrt{8}^2$.
Heraf ser vi at centrum er $(1,0,-5)$ og radius er $\sqrt{8}$.

29d. **Metode:** Når vi kender en ligning $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2$ for en kugle, så kan vi undersøge om et punkt ligger på kuglen ved at sætte punktets koordinater ind for x, y og z i ligningen.
- Hvis ligningen bliver sand, så ligger punktet på kuglen.
- Hvis ligningen bliver falsk, så ligger punktet ikke på kuglen.

29e. **Opgave** En kugle har ligningen $x^2-2x+y^2+z^2+10z+18=0$. Bestem centrum og radius.

Svar Se forklaring i 28e-28f .
$x^2-2x+y^2+z^2+10z+18=0$
$x^2+1-2x+y^2+z^2+25+10z=1+25-18$
$(x-1)^2 + y^2+(z+5)^2 = 8$ Heraf ser vi at centrum er $(1,0,-5)$ og radius er $\sqrt{8}$.

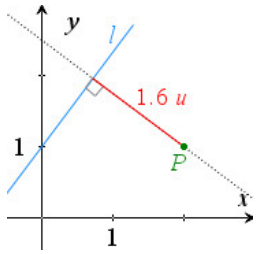
30. Afstand fra punkt til linje Kun plangeometri.



30a. Afstanden d fra et punkt $P(x_1, y_1)$ til en linje $l: ax+by+c=0$ er

$$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

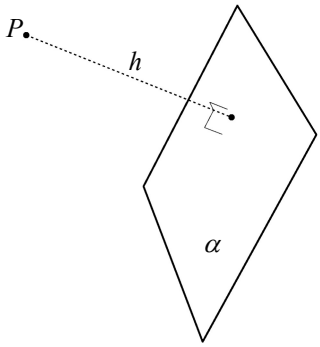
30b. Opgave Bestem afstand fra $P(1,2)$ til linjen $l: 4x-3y+3=0$.



Svar Afstanden fra $P(x_1, y_1) = P(2,1)$ til linjen $l: ax+by+c=0$ med $a=4$, $b=-3$, $c=3$ er

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4\cdot 2-3\cdot 1+3|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \underline{\underline{\frac{8}{5}}} = 1{,}6 .$$

31. Afstand fra punkt til plan Kun rumgeometri.



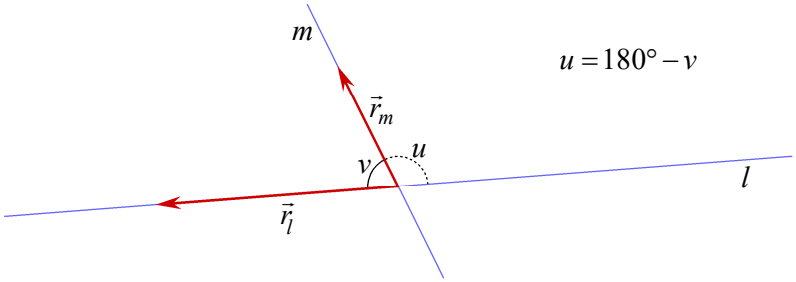
31a. Afstanden h fra et punkt $P(x_1, y_1, z_1)$ til en plan $\alpha: ax+by+cz+d=0$ er

$$h = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} .$$

Se 30b.

32. Vinkel mellem linjer

32a. Metode: Hvis vi kender retningsvektorer $\vec{r}_l$ og $\vec{r}_m$ for linjer l og m, så find vinklen v mellem $\vec{r}_l$ og $\vec{r}_m$. Så vil v og $180°-v$ være de to vinkler som l og m danner. Se 16b og 16d.



32b. Metode: Hvis vi kender normalvektorer $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$ for to linjer l_1 og l_2 i planen, så find vinklen v mellem $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$. Så vil v og $180°-v$ være de to vinkler som l_1 og l_2 danner. Se 16b og 16d.

32c. Metode: Hvis vi for to linjer l_1 og l_2 i planen kender en retningsvektor $\vec{r}_1$ og en normalvektor $\vec{n}_2$, så find vinklen v mellem $\hat{\vec{r}}_1$ og $\vec{n}_2$. Så vil v og $180°-v$ være de to vinkler som l_1 og l_2 danner. Se 9d og 16b og 16d.

32d. Opgave To linjer l og m er givet ved $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bestem den spidse vinkel mellem l og m.

Svar 1 Se 32 a.

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Af parameterfremstillingerne ser vi at $\vec{r}_l$ er parallel l og at $\vec{r}_m$ er parallel med m, så vinklen v mellem disse vektorer er en af de to vinkler mellem l og m:

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{r}_l \cdot \vec{r}_m}{|\vec{r}_l| \cdot |\vec{r}_m|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2\cdot 1+(-1)\cdot 3+0\cdot 3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+3^2}}\right) = 95{,}8888° \approx 95{,}9°$$

Da $v > 90°$ gælder: Den spidse vinkel mellem l og m er $180°-95{,}9° = \underline{\underline{84{,}1°}}$.

Afsnit 32d fortsætter på næste side!

Svar 2

dotP = prikprodukt norm = længde

$l: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $m: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{rl} := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{rm} := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

Af parameterfremstillingerne ser vi at $\vec{r_l}$ er parallel med l, og at $\vec{r_m}$ er parallel med m,

så vinklen v mellem disse vektorer er en af de to vinkler mellem l og m:

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(\mathbf{rl},\mathbf{rm})}{\text{norm}(\mathbf{rl}) \cdot \text{norm}(\mathbf{rm})}\right) = 95.8888° \approx 95.9°$$ udregnet af Nspire

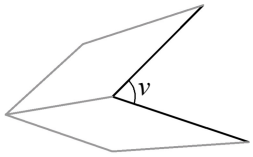
$v > 90°$. $180° - 95.9° = 84.1°$ Den spidse vinkel mellem l og m er **84,1°** .

33. Vinkel mellem planer Kun rumgeometri.

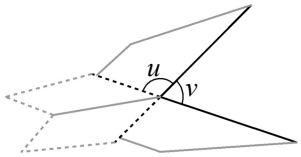
33a. Find vinklen v mellem normalvektorer $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$ til to planer α_1 og α_2 .
Så vil v og $180° - v$ være de to vinkler som α_1 og α_2 danner. Se 16b og 16d.

34. Vinkel mellem sideflader Kun rumgeometri.

34a. Figuren viser vinklen v mellem to flader.
Når vi skal finde v, finder vi vinkler mellem de to planer der indeholder fladerne.
Der er to vinkler v og u mellem disse planer.
Hvis det ikke er oplyst om vinklen mellem fladerne er den spidse eller stumpe af vinklerne mellem planerne, så må vi bruge 34b.

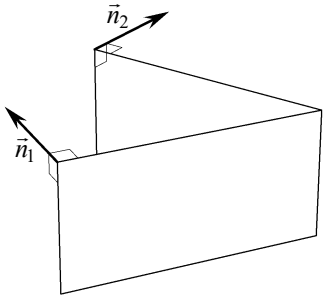


To flader



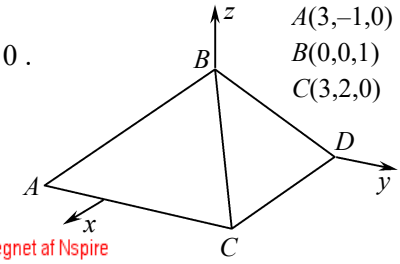
De to planer der indeholder de to flader.

34b. Til den ene sideflade skal vi finde en normalvektor $\vec{n}_1$ der peger ind i vinklen. (Brug højrehåndsreglen 24b)
Til den anden sideflade skal vi finde en normalvektor $\vec{n}_2$ der peger ud af vinklen. (Brug højrehåndsreglen 24b)
Vinklen v mellem $\vec{n}_1$ og $\vec{n}_2$ er vinklen mellem sidefladerne.



34c. Hvis begge vektorer peger ind i vinklen, eller begge peger ud, finder vi vinklen u (på figur ovenfor) som ikke dannes af sidefladerne.
De to planer der indeholder sidefladerne, danner vinklerne u og v.

34d. **Opgave** Fladen BCD er indeholdt i planen med ligningen $y + 2z - 2 = 0$.
Bestem den stumpe vinkel mellem fladerne ABC og BCD .



$A(3,-1,0)$
$B(0,0,1)$
$C(3,2,0)$

Svar

dotP = prikprodukt norm = længde

$\mathbf{ab} := \begin{bmatrix} 0-3 \\ 0--1 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{ac} := \begin{bmatrix} 3-3 \\ 2--1 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{n} := \text{crossP}(\mathbf{ab},\mathbf{ac}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix}$ udregnet af Nspire

$\vec{n}$ er ikke nulvektor, og den er krydsprodukt af $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ der er parallelle med fladen ABC, så

$\vec{n}$ er vinkelret på ABC .

Med $\mathbf{a}:=0$ $\mathbf{b}:=1$ $\mathbf{c}:=2$ $\mathbf{d}:=-2$ er $\mathbf{a} \cdot x + \mathbf{b} \cdot y + \mathbf{c} \cdot z + \mathbf{d} = 0$ ligningen $y + 2 \cdot z - 2 = 0$ som er ligningen for planen der indeholder fladen BCD, så vektoren $\mathbf{m} := \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **er vinkelret på BCD** .

Da $\vec{n}$ er vinkelret på ABC og $\vec{m}$ er vinkelret på BCD , må vinklen v mellem $\vec{n}$ og $\vec{m}$ være lig en af de to vinkler mellem planerne der indeholder ABC og BCD.

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(\mathbf{n},\mathbf{m})}{\text{norm}(\mathbf{n}) \cdot \text{norm}(\mathbf{m})}\right) = 148.052°$$ udregnet af Nspire

Da v er stump (mellem 90° og 180°) gælder: Den stumpe vinkel mellem ABC og BCD er **148,1°** .

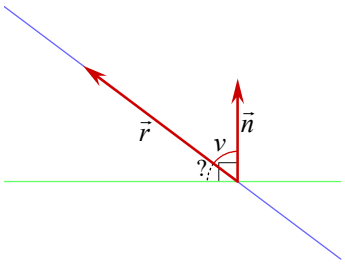
35. Vinkel mellem linje og plan Kun rumgeometri.

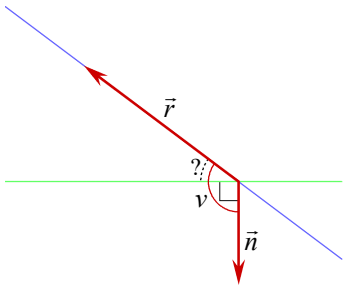
35a. Først: Find vinklen v mellem en normalvektor $\vec{n}$ til planen og en retningsvektor $\vec{r}$ til linjen.

Så: Hvis v er mindre end $90°$: Fra $90°$ trækkes v for at få vinkel mellem linje og plan.
Hvis v er større end $90°$: Fra v trækkes $90°$ for at få vinkel mellem linje og plan.

Se 16b og 16d.

Grøn streg er plan set fra siden.
Blå streg er linje.





36. Vilkårligt punkt på linje

36a. Vi omskriver parameterfremstillingen for en linje l:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2t \\ 3-t \end{pmatrix}$$

I rummet er udregningen den samme bortset fra at der er tre koordinater.

Et vilkårligt punkt på l er $(x, y) = (5+2t, 3-t)$

37. Skæring mellem to linjer *l* og *m*

37a. Både l og m er givet ved parameterfremstilling

Først finder vi et vilkårligt punt på hver linje:

I 36a står hvordan vi gør.
Parametrene s og t i de to punkter må ikke være samme bogstav.

l: $(x, y) = (2s, 5-3s)$ og m: $(x, y) = (2+2t, -2+t)$

Vi skal bestemme s og t så de to punkter har ens x-koordinater og ens y-koordinater:

$$2s = 2+2t$$
$$5-3s = -2+t$$

Vi løser dette ligningssystem mht. s og t og får:

Skriv at Nspire løser ligningssystemet med solve, eller skriv mellemregninger.

$$s = 2 \quad \text{og} \quad t = 1$$

Når $s = 2$ er $(x, y) = (2s, 5-3s) = (2\cdot 2, 5-3\cdot 2) = (4, -1)$.

I rummet er udregningerne de samme bortset fra at der er 3 koordinater.

Skæringspunktet er $(x, y) = (4, -1)$.

37b. Både l og m er givet ved ligning Kun plangeometri.

Vi skal finde x og y så begge ligninger er opfyldt:

l: $3x + 2y - 10 = 0$

m: $x - 2y - 6 = 0$

Vi løser dette ligningssystem mht. x og y og får $x = 4$ og $y = -1$.

Skriv at Nspire løser ligningssystemet med solve, eller skriv mellemregninger.

Skæringspunktet er $(x, y) = (4, -1)$.

37c. l er givet ved ligning, m ved parameterfremstilling Kun plangeometri.

Først finder vi et vilkårligt punkt på m:

I 36a står hvordan vi gør.

m: $(x, y) = (2+2t, -2+t)$.

Vi indsætter dette punkt i ligningen

l: $3x + 2y - 10 = 0$

og får

$$3(2+2t) + 2(-2+t) - 10 = 0$$

Vi løser denne ligning mht. t og får $t = 1$.

Skriv at Nspire løser ligningen med solve, eller skriv mellemregninger.

Når $t = 1$ er $(x, y) = (2+2t, -2+t) = (2+2\cdot 1, -2+1) = (4, -1)$.

Skæringspunktet er $(x, y) = (4, -1)$.

38. Skæring mellem linje og cirkel Kun plangeometri.

38a. Linjen er givet ved parameterfremstilling

Først finder vi et vilkårligt punkt på linjen : I 36a står hvordan vi gør.

$$(x,y)=(2+2t,-2+t)\ .$$

Vi indsætter dette punkt i cirklens ligning

$$x^2-6x+y^2-2y\ =\ 0$$

og får

$$(2+2t)^2-6(2+2t)+(-2+t)^2-2(-2+t)\ =\ 0$$

Vi løser denne ligning mht. t og får $t=0$ eller $t=2$. Skriv at Nspire løser ligningen med solve, eller skriv mellemregninger.

Når $t=0$ er $(x,y)=(2+2t,-2+t)=(2+2\cdot 0,-2+0)=(2,-2)$

Når $t=2$ er $(x,y)=(2+2t,-2+t)=(2+2\cdot 2,-2+2)=(6,0)$

Skæringspunkterne er $(2,-2)$ og $(6,0)$.

38b. Linjen er givet ved ligning

Linjen og cirklen er givet ved ligningerne

$$x-2y-6=0$$

$$x^2-6x+y^2-2y\ =\ 0$$

Vi løser dette ligningssystem mht. x og y og får Skriv at Nspire løser ligningssystemet med solve, eller skriv mellemregninger.

$x=2$ og $y=-2$ eller $x=6$ og $y=0$

Skæringspunktet er $(x,y)=(2,-2)$ og $(x,y)=(6,0)$.

39. Skæring mellem linje og kugle Kun rumgeometri.

39a. Metode: Vi indsætter et vilkårligt punkt fra linjen i kuglens ligning, osv. Se 36a og 38a.

40. Skæring mellem linje og plan Kun rumgeometri.

40a. Metode: Vi indsætter et vilkårligt punkt fra linjen i planens ligning, osv. Se 36a og 37c.

40b. Opgave Plan α og ligning l er givet ved: $\alpha:\ 3x-z+9=0$ $\quad l:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}9\\-5\\12\end{pmatrix}$

Bestem skæringspunkt mellem l og α .

Svar

α: $3x-z+9=0$ $\qquad l$: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\4\\0\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}9\\-5\\12\end{bmatrix}$

$(x,y,z)=\{8+9\cdot t,4-5\cdot t,12\cdot t\}$ er et vilkårligt punkt på l .

Det ligger i α når det opfylder α's ligning, dvs. når

$$3\cdot(8+9\cdot t)-12\cdot t+9=0$$

Nspire løser denne ligning mht. t og får $t=\frac{-11}{5}$:

$$\text{solve}(3\cdot(8+9\cdot t)+0\cdot(4-5\cdot t)-1\cdot 12\cdot t+9=0,t)\ \blacktriangleright\ t=\frac{-11}{5}$$

Når t har denne værdi er det vilkårlige punkt

$$\{8+9\cdot t,4-5\cdot t,12\cdot t\}|t=\frac{-11}{5}=\left\{\frac{-59}{5},15,\frac{-132}{5}\right\}$$

Skæringspunktet mellem l og α er $\left(\frac{-59}{5},15,\frac{-132}{5}\right)\approx(-11.8,15.,-26.4)$

41. Projektion af punkt på linje Kun plangeometri.

41a. Vi vil finde projektionen Q af punktet $P(2,1)$ på linjen l: $2x+3y-20=0$.
Q er skæringspunktet mellem l og linjen m der går gennem P og er vinkelret på l.
Af ligningen for l ser vi at vektoren $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ er vinkelret på l, så m har parameterfremstillingen

$$m:\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Herefter kan vi bruge metoden fra 37c til finde Q.

41b. Vi vil finde projektionen Q af punktet $P(2,1)$ på linjen l: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.
Q er skæringspunktet mellem l og linjen m der går gennem P og er vinkelret på l.
Af parameterfremstillingen for l ser vi at vektoren $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ er parallel med l. En vektor vinkelret på l er
$\widehat{\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, så m har parameterfremstillingen $m:\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.
Herefter kan vi bruge metoden fra 37a til finde Q.

41c. **Opgave** En linje l går gennem punkterne $A(0,11)$ og $B(9,-4)$.
Bestem projektionen af $P(21,10)$ på l .

Svar

Projektionen af P på l er skæringspunktet mellem l og linjen m der er vinkelret på l og går gennem P.

Bestemme ligning for l

$A(0,11)$ og $B(9,-4)$ ligger på en linje l . $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}9-0\\-4-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-15\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$

Vektor parallel med l: $\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$. Vektor vinkelret på l: $\widehat{\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.

l går gennem $(x_1,y_1)=(0,11)$ og er vinkelret på $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, så l har følgende ligning:

$$a\cdot(x-x_1)+b\cdot(y-y_1)=0$$
$$5\cdot(x-0)+3\cdot(y-11)=0$$
$$5x+3y-33=0$$

Bestemme parameterfremstilling for m

m går gennem $(x_0,y_0)=(21,10)$ og er parallel med $\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, så m har følgende parameterfremstilling: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}$ dvs. $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\10\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.

Bestemme skæringspunkt mellem l og m

Vilkårligt punkt på m som er $(21+5t\ ,\ 10+3t)$ indsætter vi i ligning for l :

$$5(21+5t)+3(10+3t)-33=0$$

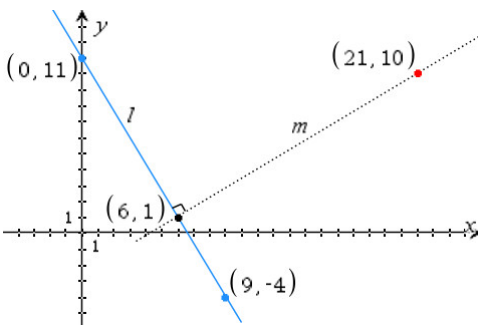
Nspire løser denne ligning mht. t og får $t=-3$. solve(5·(21+5·t)+3·(10+3·t)−33=0,t) ▸ t=-3

Når $t=-3$ er det vilkårlige punkt lig $(21+5\cdot(-3)\ ,\ 10+3\cdot(-3))=(6,1)$

Projektionen af P på l er $\underline{\underline{(6,1)}}$.

Kontrol ved elektronisk aflæsning på figur

Elektronisk konstruktion:
Tegn punkter (0,11) og (9,-4).
Tegn linje l gennem disse.
Tegn punkt (21,10).
Tegn linje m som er vinkelret på l og går gennem (21,10).
Tegn skæringspunkt mellem l og m.
Dette skæringspunkt er projektionen af P på l .
Aflæs elektronisk koordinater til skæringspunkt.
Resultatet er (6,1) ligesom i udregningen af projektionen.



42. Projektion af punkt på plan Kun rumgeometri.

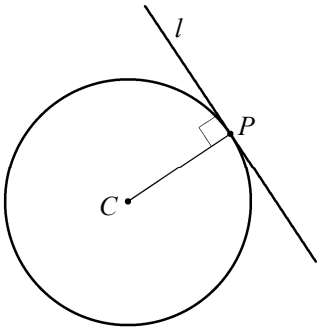
42a. Vi vil finde projektionen Q af punktet $P(6,-2,5)$ på planen α: $2x-3y+z+5=0$.
Q er skæringspunktet mellem α og linjen m der går gennem P og er vinkelret på α.

Af ligningen for α ser vi at vektoren $\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ er vinkelret på α, så m har parameterfremstillingen

$$m:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

Herefter kan vi bruge metoden fra 40a og 40b til finde Q.

43. Tangent til cirkel Kun plangeometri.



43a. **Sprogbrug:** En tangent til en cirkel er en linje der har præcis ét punkt fælles med cirklen. Dette punkt kaldes røringspunktet.
Når man siger "tangenten i P", betyder det at P er røringspunktet.

43b. **Regel:** **En tangent til en cirkel er vinkelret på linjen gennem centrum og røringspunkt.**

43c. **Regel:** **En linje er tangent til en cirkel netop hvis afstanden fra centrum til linjen er lig radius.**

43d. **Metode:** Punktet $P(4,5)$ ligger på en cirkel med centrum $C(3,1)$.

Vi vil finde en ligning for tangenten l i P. Ifølge 43b er $\overrightarrow{CP}$ vinkelret på l, så vi kan finde ligningen for l ved at bruge 4c og 26a.

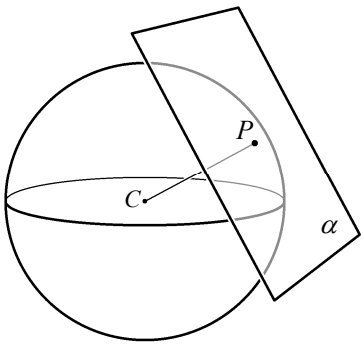
43e. **Metode:** Linjen l: $3x+4y+24=0$ er tangent til en cirkel med centrum $C(2,5)$.
Vi vil finde en ligning for cirklen. Ifølge 43c kan vi finde radius ved at finde afstanden fra C til l (se 30). Så kan vi bestemme cirklens ligning ved at bruge 28a.

43f. **Metode:** Vi vil undersøge om linjen l: $3x+4y+24=0$ er tangent til cirlen M: $(x-2)^2+(y-5)^2=81$.

Metode 1: Vi finder centrum og radius som i 28c.
Så udregner vi afstanden fra centrum til l og bruger 43c.

Metode 2: Vi finder skæringspunkterne mellem l og M og bruger 43a.
Skæringspunkterne finder vi som i 38b.

44. Tangentplan til kugle Kun rumgeometri.



44a. **Sprogbrug:** En tangentplan til en kugle er en plan der har præcis ét punkt fælles med kuglen. Dette punkt kaldes røringspunktet.
Når man siger "tangentplanen i P", betyder det at P er røringspunktet.

44b. **Regel:** **En tangentplan til en kugle er vinkelret på linjen gennem centrum og røringspunkt.**

44c. **Regel:** **En plan er tangentplan til en kugle netop hvis afstanden fra centrum til planen er lig radius.**

44d. **Metode:** Punktet $P(4,5,2)$ ligger på en kugle med centrum $C(3,1,4)$.
Vi vil finde en ligning for tangentplanen α i P.
P ligger i α, og ifølge 44b er $\overrightarrow{CP}$ vinkelret på α, så vi kan finde ligningen for α ved at bruge 4d og 27a.

44e. **Metode:** Planen α: $2x+y-2z+24=0$ er tangentplan til en kugle med centrum $C(-1,0,5)$.

Vi vil finde røringspunktet P. Lad l være linjen gennem C og P. Af 27b følger at $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ er vinkelret på α og derfor (ifølge 44b) parallel med l. Vi kan nu (se 25d) opskrive en parameterfremstilling for l og derefter finde røringspunktet P som skæringspunkt mellem l og α (se 40).

44f. **Metode:** Planen α: $2x+y-2z+24=0$ er tangentplan til en kugle med centrum $C(-1,0,5)$.
Vi vil finde en ligning for kuglen. Ifølge 44c kan vi finde radius ved at finde afstanden fra C til α (se 31a). Så kan vi bestemme kuglens ligning ved at bruge 29a.

44g. **Metode:** Vi vil undersøge om planen α: $2x+y-2z+24=0$ er tangentplan til kuglen med centrum $C(-1,0,5)$ og radius 4. Vi udregner afstanden fra C til α (se 31a) og bruger 44c.

BEVISER

45. Bevis for at vi må prikke ind i en parentes

u_1 og u_2 er koordinater til $\vec{u}$, og tilsvarende for $\vec{v}$ og $\vec{w}$.

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (u_1+v_1)\cdot w_1 + (u_2+v_2)\cdot w_2 = u_1\cdot w_1 + v_1\cdot w_1 + u_2\cdot w_2 + v_2\cdot w_2$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = u_1\cdot w_1 + u_2\cdot w_2 + v_1\cdot w_1 + v_2\cdot w_2$$

De to udtryk $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$ og $\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ giver samme fire led, så de er samme tal:

45a. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

Vi har brugt vektorregel 11a og 14b, og talregler: gange ind i parentes, og ved plus er rækkefølge ligegyldig.
I rummet er beviset det samme bortset fra at der er tre koordinater.

46. Bevis for formel 46a

v_1 og v_2 er koordinater til $\vec{v}$.

$$(k\vec{v})\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (kv_1)\cdot v_1 + (kv_2)\cdot v_2 = kv_1^2 + kv_2^2$$

$$k|\vec{v}|^2 = k\sqrt{v_1^2+v_2^2}^{\,2} = k(v_1^2+v_2^2) = kv_1^2 + kv_2^2$$

De to udtryk $(k\vec{v})\cdot\vec{v}$ og $k|\vec{v}|^2$ giver samme resultat, så de er samme tal:

46a. $(k\vec{v})\cdot\vec{v} = k|\vec{v}|^2$

Vi har brugt vektorregel 10b, 14b og 7b, og talregler: ved gange er rækkefølge ligegyldig, $x^2=x\cdot x$, kvadratrod i anden, og gange ind i parentes.
I rummet er beviset det samme bortset fra at der er tre koordinater.

47. Bevis for at vi får nul når vi prikker med nulvektor

v_1 og v_2 er koordinater til $\vec{v}$.

$$\vec{o}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 = 0 \quad \text{så}$$

47a. $\vec{o}\cdot\vec{v} = 0$

Vi har brugt vektorregel 14b, og talregel om nul gange tal.
I rummet er beviset det samme bortset fra at der er tre koordinater.

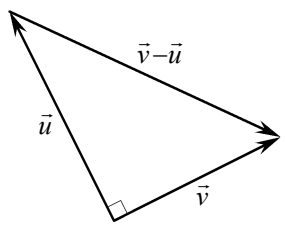
48. Bevis for regel om skalarprodukt og vinkelret

Lad $\vec{u}$ og $\vec{v}$ være forskellig fra nulvektor.

u_1 og u_2 er koordinater til $\vec{u}$, og tilsvarende for $\vec{v}$.

Når vi afsætter $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ud fra samme punkt, er $\vec{v}-\vec{u}$ vektoren fra $\vec{u}$'s spids til $\vec{v}$'s spids.

Her har vi brugt 12d.



Af pythagoras og dens omvendte følger at $\vec{u}\perp\vec{v}$ netop når

$$|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2 = |\vec{v}-\vec{u}|^2$$

Vi omskriver denne ligning:

$$\sqrt{u_1^2+u_2^2}^{\,2} + \sqrt{v_1^2+v_2^2}^{\,2} = \sqrt{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2}^{\,2}$$

Her har vi brugt 7b og 12a.

$$u_1^2+u_2^2 + v_1^2+v_2^2 = (v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2$$

$$u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2 = v_1^2+u_1^2-2v_1u_1 + v_2^2+u_2^2-2v_2u_2$$

$$v_1u_1+v_2u_2 = 0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

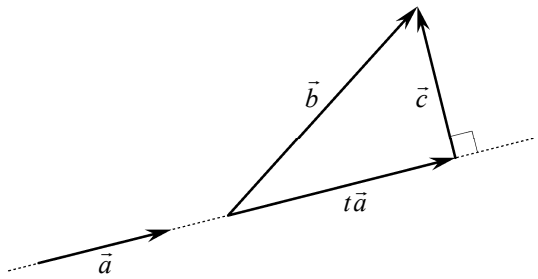
Her har vi brugt 14b.

v_1-u_1	er x-koordinaten til	$\vec{v}-\vec{u}$
v_2-u_2	er y-koordinaten til	$\vec{v}-\vec{u}$

Nu har vi bevist at hvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ikke er nulvektor, så gælder

48a. $\vec{u}\perp\vec{v}$ netop når $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

49. Bevis for formlen for projektion af vektor



Se figuren til højre hvor $\vec{a}$ er en vektor der ikke er nulvektor.

Projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$ er en vektor der er $\vec{o}$ eller parallel med $\vec{a}$, så vi kan få projektionen frem ved at gange $\vec{a}$ med et tal:

$$\vec{b}_{\vec{a}} = t\vec{a}$$

Når $\vec{c}$ er vektoren på figuren, er

$$\vec{b} = t\vec{a} + \vec{c}$$

Begge sider i denne ligning prikker vi med $\vec{a}$ og får:

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = (t\vec{a} + \vec{c})\cdot\vec{a}$$

I et bevis behøver vi ikke vide hvorfor vi skriver bestemte ligninger. Det er nok at vi kan se at ligningerne er rigtige. Så har vi indset at slutresultatet er rigtigt.

Vi prikker ind i parentesen og får:

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = (t\vec{a})\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{a}$$

Første led på højre side omskriver vi med 46a, og sidste led er 0 da $\vec{c}$ er nulvektor eller vinkelret på $\vec{a}$:

$$\vec{b}\cdot\vec{a} = t|\vec{a}|^2$$

Begge sider i denne ligning dividerer vi med $|\vec{a}|^2$ og får:

$$\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2} = t$$

Vi indsætter dette udtryk for t i følgende ligning som vi begrundede ovenfor:

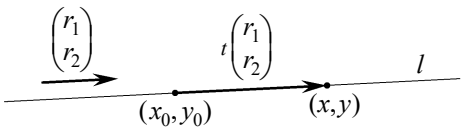
$$\vec{b}_{\vec{a}} = t\vec{a}$$

og får:

49a. $$\vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\ .$$

50. Bevis for parameterfremstilling for en linje

l er linjen som går gennem (x_0, y_0) og er parallel med $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.



Et punkt (x, y) ligger på l

netop når

vektoren fra (x_0, y_0) til (x, y) er $\vec{o}$ eller parallel med $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ Se figur.

dvs.

vektoren fra (x_0, y_0) til (x, y) er lig $t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, hvor t er et tal

dvs.

vi får (x, y) når vi lægger $t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$'s koordinater til (x_0, y_0)

altså

50a. $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

så vi har bevist at 50a er en parameterfremstilling for linjen l som går gennem (x_0, y_0) og har retningsvektoren $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

I rummet er beviset det samme bortset fra at der er tre koordinater.

51. Bevis for ligning for linje Kun plangeometri.

l er linjen som går gennem (x_0, y_0) og er vinkelret på $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Vektoren fra (x_0, y_0) til (x, y) er $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$. Se figur.

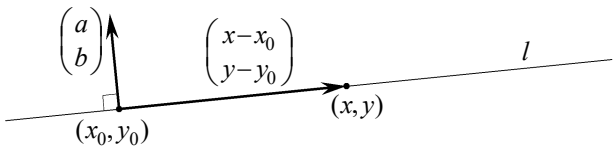
Et punkt (x, y) ligger på l

netop når

$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ er $\vec{o}$ eller vinkelret på $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

og dette gælder netop når

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = 0$$



dvs.

51a. $$a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$$

Vi har nu bevist at 51a er en ligning for linjen der går gennem (x_0, y_0) og har normalvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

52. Bevis for ligning for plan Kun rumgeometri.

Beviset er magen til beviset i afsnit 51 bortset fra at der er tre koordinater og vi siger ”plan” i stedet for ”linje” .

53. Bevis for ligning for cirkel Kun plangeometri.

M er cirklen med centrum $C(x_0, y_0)$ og radius r.
Et punkt $P(x, y)$ ligger på M netop når

længden af $\overrightarrow{CP}$ er r

dvs.

længden af $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ er r.

Ved hjælp af længdeformlen (se 7b) kan vi skrive dette sådan:

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$$

Da begge sider er ≥ 0, kan vi opløfte til anden. Så får vi

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Dette er cirklens ligning (se 28a).

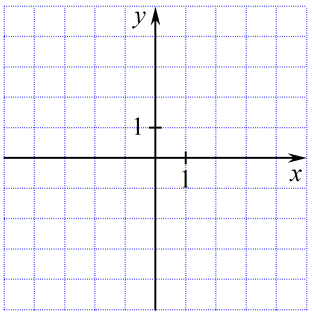
54. Bevis for ligning for kugle Kun rumgeometri.

Beviset er magen til beviset i afsnit 53 bortset fra at der er tre koordinater og vi siger kugle i stedet for cirkel.

Brug blyant og viskelæder når du udfylder. Kuglepen o.l. er FORBUDT!

ØVELSER

1.1 Øvelse



(a) Læs afsnit 1.

(b) Tegn punkterne $A(3,4)$, $B(-4,1)$, $C(-4,-2)$, $D(2,-3)$.

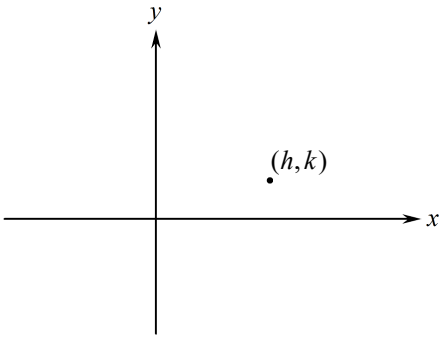
(c) For A er $x =$ _____ og $y =$ _____ .

(d) Er $x - y = 1$ for punktet A ? Svar: _____ .

(e) Tegn 4 punkter hvor $x-y = 1$ og kald dem P, Q, R og S.

(f) Tegn 4 punkter hvor $x-y = 4$ og kald dem H, I, J og K.

1.2 Øvelse Se 1d.



(a) Angiv hvor tallet h er på x-aksen.

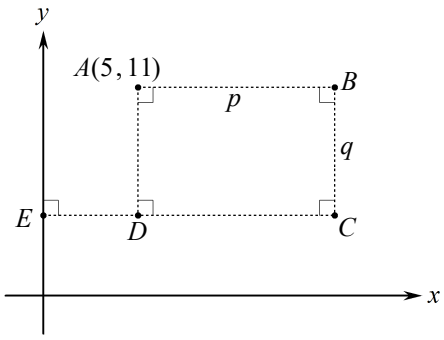
(b) Angiv hvor tallet h er på y-aksen.

(c) Angiv hvor tallene $2h$ og $-h$ er på x-aksen.

(d) Tegn følgende punkter:

$A(0,h)$, $B(-2k,0)$, $C(2h,-2k)$, $D(h+k,0)$.

1.3 Øvelse



(a) Angiv hvor tallet 5 er på x-aksen.

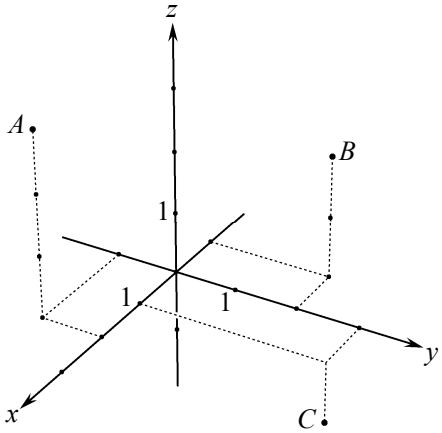
(b) Angiv hvor tallet $5+p$ er på x-aksen.

(c) Skriv koordinater ved hjælp af p og q:

$B($, $)$, $C($, $)$,

$D($, $)$, $E($, $)$.

2.1 Øvelse



(a) Læs afsnit 2.

(b) Skriv koordinater:

$A($, , $)$

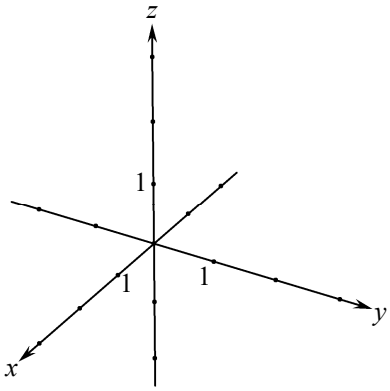
$B($, , $)$

$C($, , $)$

(c) Tegn punktet $D(3,1,4)$.

(d) Tegn punktet $E(-1,0,2)$.

2.2 Øvelse Se 2d.



Tegn følgende punkter i koordinatsystemet:

$P(2,3,0)$

$Q(2,3,1)$

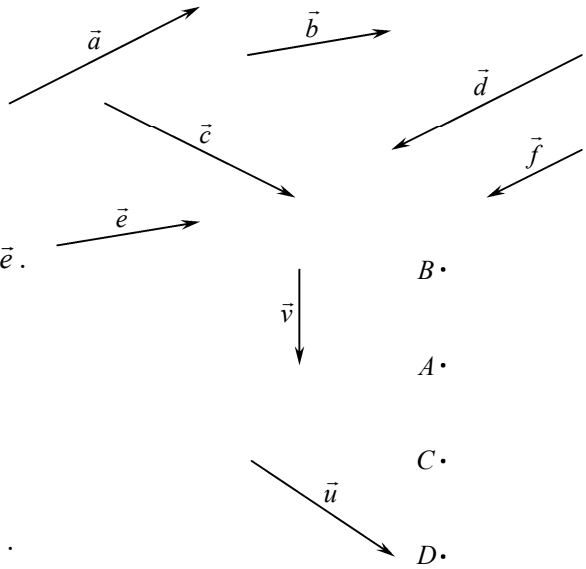
$R(0,1,3)$

$S(-2,-2,3)$

$T(1,-2,-2)$

3.1 Øvelse Se 3c.

(a) Hvilke af vektorerne er ens?
(b) Hvilke af vektorerne har samme længde?
(c) Hvilke af vektorerne har samme retning?
(d) Hvilke af vektorerne har modsat retning?
(e) Tegn en vektor $\vec{g}$ som er parallel med $\vec{e}$ og har samme længde som $\vec{e}$, men ikke er samme vektor som $\vec{e}$.



3.2 Øvelse Se 3e.

(a) Afsæt $\vec{u}$ ud fra A. (b) Afsæt $\vec{u}$ ud fra B.
(c) Når vi afsætter $\vec{v}$ ud fra _____, er slutpunktet C.
(d) Når vi afsætter $\vec{v}$ ud fra _____, er slutpunktet A.
(e) Når slutpunktet for $\vec{v}$ er D, er startpunktet _____.
(f) Når vi afsætter $\vec{u}$ ud fra P, er slutpunktet C. Tegn P.

4.1 Øvelse Se 4a-4f.

Skriv koordinater:

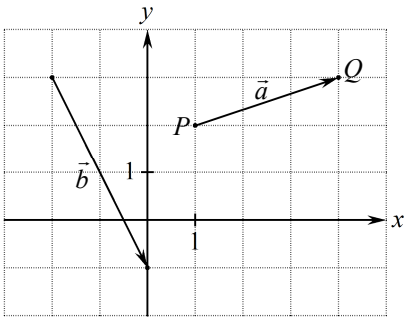
$P = ($ $\qquad$ $Q = ($

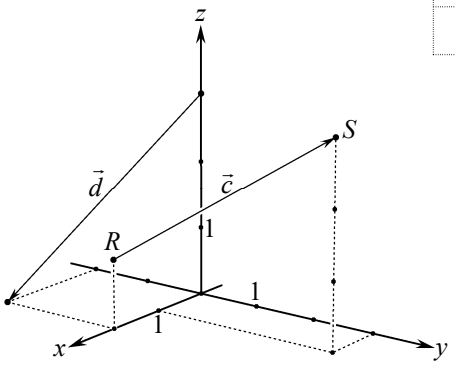
$\vec{a} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

$R = ($ $\qquad$ $S = ($

$\vec{c} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$





4.2 Øvelse Se 3h og 4d .

Der er givet punkterne

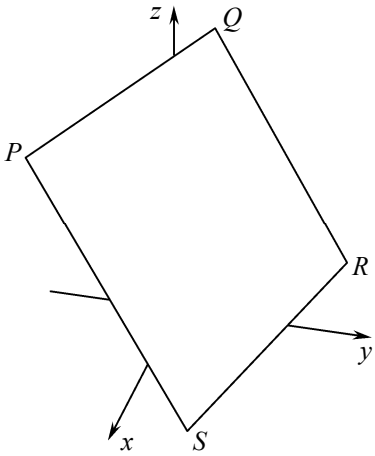
$P(30, -12, 40)$

$Q(-15, 2, 40)$

$R(-20, 22, 0)$

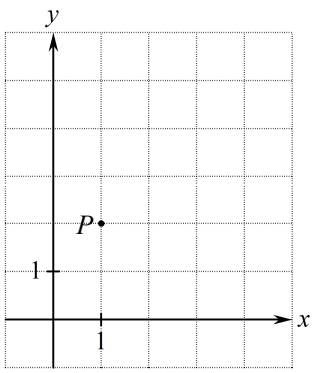
$S(30, 10, 0)$.

(a) Undersøg om firkant $PQRS$ er et parallelogram.



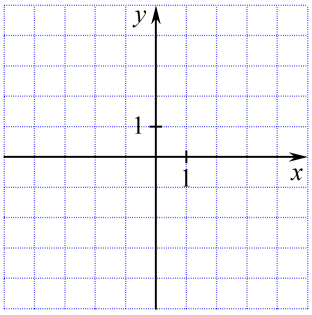
4.3 Øvelse Se 4g.

(a) Koordinatsættet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ fortæller at $\vec{a}$ går _____ i x-aksens retning og _____ i y-aksens retning.
(b) Afsæt $\vec{a}$ ud fra P.
(c) Koordinatsættet $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ fortæller at $\vec{b}$ går _____ i x-aksens retning og _____ i y-aksens retning.
(d) Afsæt $\vec{b}$ ud fra P.



4.4 Øvelse

$A(4,1)$, $\vec{p}=\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}-1\\-7\end{pmatrix}$.



(a) Tegn A.

(b) Afsæt $\vec{p}$ ud fra A, og kald slutpunktet B.

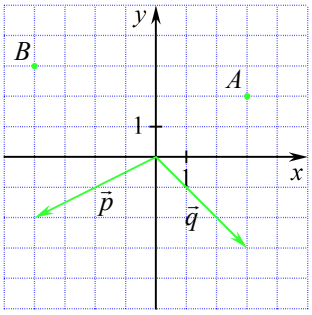
(c) Afsæt $\vec{q}$ ud fra B, og kald slutpunktet C.

(d) $B=(\quad,\quad)$. $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix}$.

4.5 Øvelse

$\vec{m}$ er stedvektor for A. $\vec{n}$ er stedvektor for B.

$\vec{p}$ er stedvektor for C. $\vec{q}$ er stedvektor for D.



(a) Læs afsnit 4i.

(b) Tegn $\vec{m}$, $\vec{n}$, C og D.

(c) $\vec{m}=\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix}$, $A=(\quad,\quad)$.

(d) $\vec{p}=\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix}$, $C=(\quad,\quad)$.

5.1 Øvelse

$P(5,9)$, $Q(-3,0{,}5)$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$.

(a) Læs afsnit 5c.

(b) Når $\vec{a}$ er afsat ud fra P, så har $\vec{a}$ slutpunktet $(\quad+\quad,\quad+\quad)=(\quad,\quad)$.

(c) Når $\vec{a}$ er afsat ud fra Q, så har $\vec{a}$ slutpunktet $(\quad+\quad,\quad+\quad)=(\quad,\quad)$.

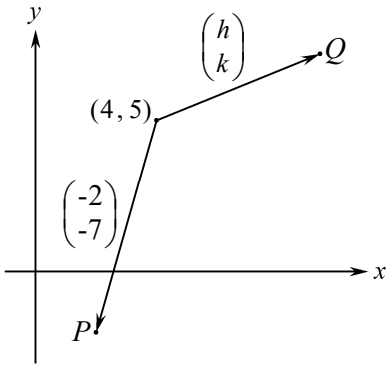
(d) Når $\vec{a}$ er afsat ud fra $R(\quad,\quad)$ så har $\vec{a}$ slutpunktet $(9,5)$.

5.2 Øvelse Se 5c.

Skriv koordinater:

$P=(\qquad,\qquad)=(\quad,\quad)$

$Q=($



6.1 Øvelse

$A=(8,3)$ og $B=(4,6)$

(a) Læs 6a-6b.

(b) $\overrightarrow{AA}=($ Se 4c.

(c) Hvis $\overrightarrow{BC}=\vec{o}$, er $C=($ Se 5c.

(d) Hvis $\vec{a}$ er nulvektor, og startpunktet for $\vec{a}$ er $(-7,0)$, så har $\vec{a}$ slutpunktet $(\quad,\quad)$.

7.1 Øvelse

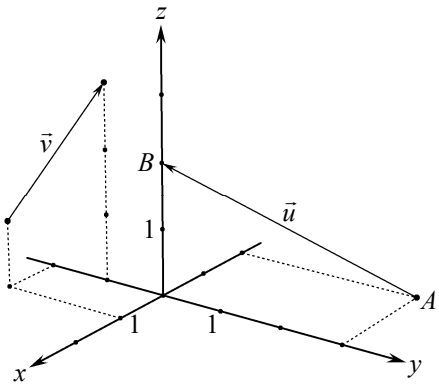
(a) Læs 7c-7d.

(b) Skriv koordinater:

$A=($

$B=($

$\overrightarrow{AB}=($



(c) $|\vec{u}|=$

(d) Udregn længden af $\vec{v}$.

7.2 Øvelse Se 7b.

Facit indeholder bogstavet t.

Når $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1+t \end{pmatrix}$, er $|\vec{a}|^2 =$

7.3 Øvelse

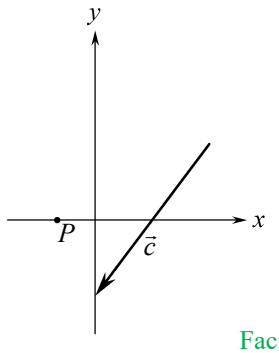
Læs afsnit 7e. Bestem afstanden mellem punkterne $P(2,1)$ og $Q(10,-5)$.

8.1 Øvelse Se 8b.

Når $\vec{u} = \begin{pmatrix} k-3 \\ 9 \end{pmatrix}$, er $-\vec{u} = \Big($

8.2 Øvelse Se 8d.

Afsæt den modsatte vektor til $\vec{c}$ ud fra P.



9.1 Øvelse Se 9d.

Facit indeholder bogstavet k.

(a) Når $\vec{a} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$, er $\hat{\vec{a}} =$

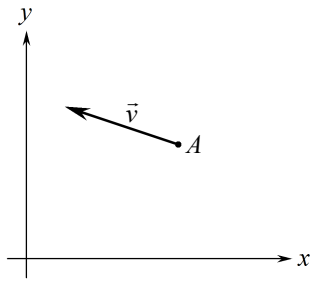
b) Når $\vec{b} = \begin{pmatrix} k+3 \\ k+1 \end{pmatrix}$, er $\hat{\vec{b}} =$

9.2 Øvelse Se 9a og 8d.

(a) Afsæt tværvektoren til $\vec{v}$ ud fra A.

(b) Afsæt den modsatte vektor til $\vec{v}$ ud fra A.

(c) Afsæt $-\hat{\vec{v}}$ ud fra A.



9.3 Øvelse Se 9a, 4c, 9d og 5c.

(a) Figuren viser to ens kvadrater.

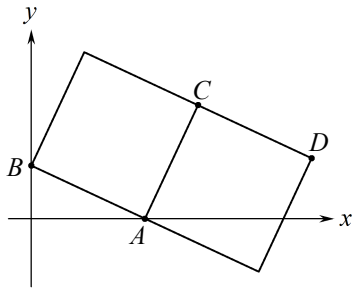
$A(15,0)$, $B(0,7)$.

Skriv <u>sand</u> eller <u>falsk</u> ved hver ligning:

$\widehat{\overrightarrow{AB}} = \overrightarrow{AC}$, $\widehat{\overrightarrow{BA}} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

(b) Udregn koordinatsættet til C.

(c) Udregn koordinatsættet til D.



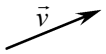
10.1 Øvelse Se 10b.

(a) Når $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, er $6\vec{a} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

(b) Når $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \end{pmatrix}$, er $4\vec{a} =$

10.2 Øvelse Se 10d.

(a) Tegn $3\vec{v}$. (b) Tegn $0{,}5\vec{v}$. (c) Tegn $-4\vec{v}$.



11.1 Øvelse Se 11a og 10b.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ -4 \end{pmatrix}$.

(a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

(d) $2\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

(b) $3\vec{b} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

(e) $t\vec{a} + \vec{b} =$

(c) $\vec{a} + 3\vec{b} =$

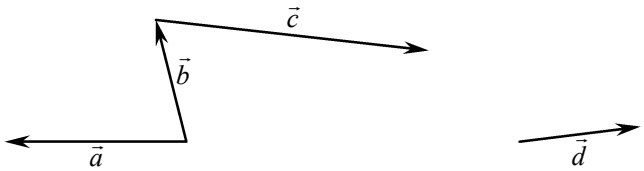
(f) $\vec{a} + 2\vec{c} =$

11.2 Øvelse Se 11c og 11d.

(a) Tegn vektoren $\vec{a}+\vec{b}$.

(b) Tegn vektoren $\vec{b}+\vec{c}$.

(c) Tegn vektoren $\vec{b}+\vec{d}$.

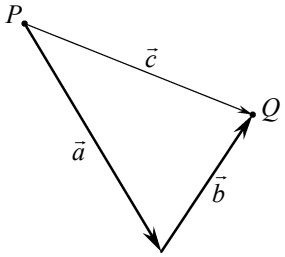


11.3 Øvelse Se 11c og 5c.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ og $P=(1,2)$.

(a) Udregn koordinatsættet til $\vec{c}$.

(b) Udregn koordinatsættet til Q .



12.1 Øvelse Se 12a og 10b.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\k+2\end{pmatrix}$.

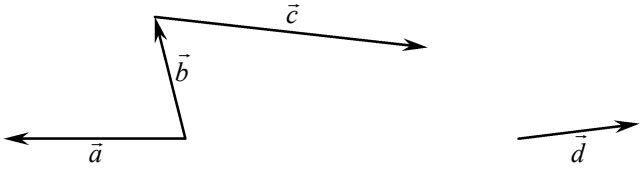
(a) $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix}$ (b) $\vec{a}-5\vec{c}=$

12.2 Øvelse Se 12c og 12d.

(a) Tegn vektoren $\vec{a}-\vec{b}$.

(b) Tegn vektoren $\vec{b}-\vec{c}$.

(c) Tegn vektoren $\vec{b}-\vec{d}$.



12.3 Øvelse Se 11d, 12d og 7b.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$.

Vi afsætter $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ud fra et punkt P . Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder et parallelogram.

(a) Bestem længden af den af parallelogrammets diagonaler der udgår fra P .

(b) Bestem længden af den anden diagonal.

12.4 Øvelse Se 12d .

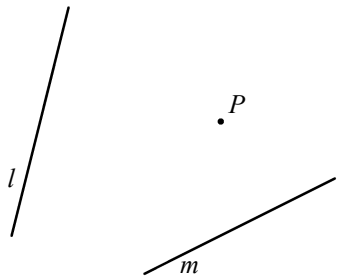
$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{BC}=$

13.1 Øvelse Se 13b.

(a) Tegn den linje n som går gennem P og er vinkelret på l.

(b) Tegn det punkt P_l som er projektionen af P på l.

(c) Tegn det punkt P_m som er projektionen af P på m.



13.2 Øvelse Se 13b og 13c.

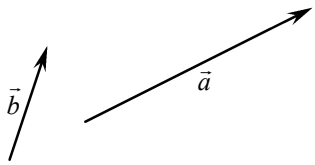
(a) Tegn en linje l som er parallel med $\vec{b}$.

(b) Tegn $\vec{a}$'s startpunkt, og tegn det punkt som er projektionen af dette punkt på l.

(c) Tegn projektionen af $\vec{a}$'s slutpunkt på l.

(d) Tegn den vektor som er projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

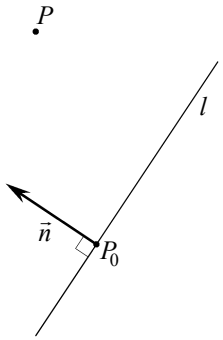
(e) Tegn projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$.



13.3 Øvelse Se 13b og 13c.

(a) Tegn projektionen af P på l

(b) Tegn projektionen af $\overrightarrow{P_0P}$ på $\vec{n}$.



14.1 Øvelse Se 14a, 14b og 14c.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(a) Skriv sand eller falsk ved hver af følgende 5 påstande:

(1) Prikproduktet af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $\vec{c}$.

(2) Prikproduktet af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 14.

(3) Skalarproduktet af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 10.

(4) Prikproduktet af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 10.

(5) $\vec{b} \cdot \vec{c} = 34$.

(6) $\vec{c} \cdot \vec{a} = 17$.

(b) $\vec{a} \cdot \vec{c} =$ $\qquad =$

(c) $\vec{b} \cdot \vec{a} =$ $\qquad =$

(d) $\begin{pmatrix} t-2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3t \end{pmatrix} =$

(e) $\begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} =$ $\qquad =$

15.1 Øvelse Se 15a og 15b.

Skriv sand eller falsk ved hver af følgende 7 påstande:

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

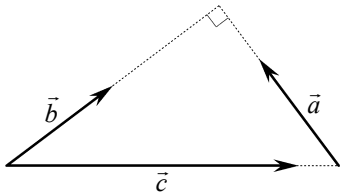
(3) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale

(4) $\vec{a}$ og $\vec{c}$ er ortogonale

(5) $\vec{a}$ er vinkelret på $\vec{b}$

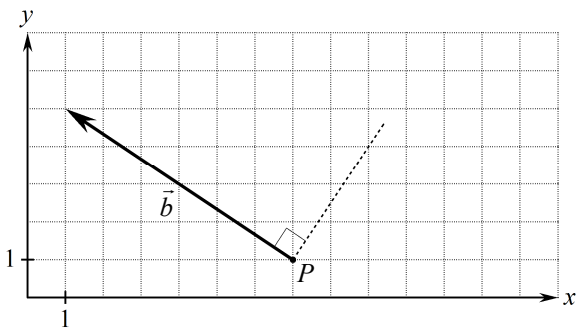
(6) $\vec{a} \perp \vec{c}$

(7) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$



15.2 Øvelse Se 5c og 15c.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2t \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.



(a) Når $t=3$ er $\vec{a} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$.

(b) Når vi afsætter vektoren fra (a) ud fra punktet $P(7,1)$, så bliver endepunktet

$(\quad , \quad) = (\quad , \quad)$.

(c) Afsæt vektoren fra (a) ud fra P.

(d) For $t=0$, for $t=1$ og for $t=2$ skal du afsætte $\vec{a}$ ud fra P. Skriv t-værdierne ved de 4 vektorer.

(e) $\vec{a}$ er vinkelret på $\vec{b}$ netop når $\longrightarrow$ $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

Når vi udregner venstre side, bliver denne ligning til $\qquad =$

Vi løser denne ligning mht. t og får $\qquad t =$

dvs. for denne værdi af t er _____. Dette kan godt passe med figuren.

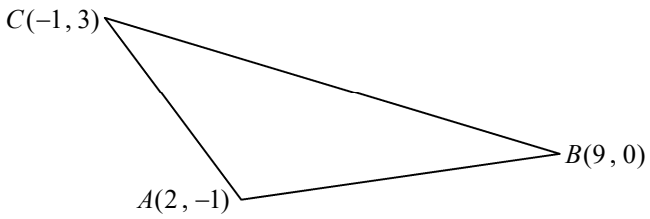
16.1 Øvelse Se 16d.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Når v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$, er

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\quad}{\quad} \right) = \cos^{-1}\left(\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad\qquad} \right) = \qquad ^\circ$$

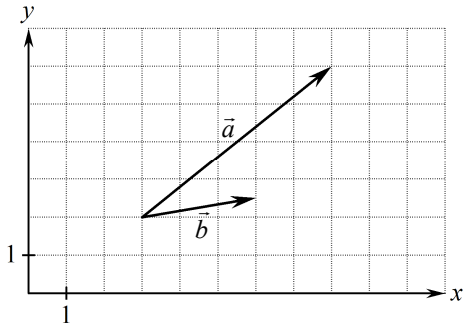
16.2 Øvelse Se 4c og 16d.

Brug 16b til at udregne vinkel A i trekant ABC.



17.1 Øvelse Se 13c, 4g og 17d.

(a) Tegn den vektor $\vec{a}_{\vec{b}}$ som er projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.



(b) $\vec{a} = \Big($

$\vec{b} = \Big($

(c) Udregn koordinatsættet til $\vec{a}_{\vec{b}}$ og skriv mellemregninger:

$\vec{a}_{\vec{b}} =$

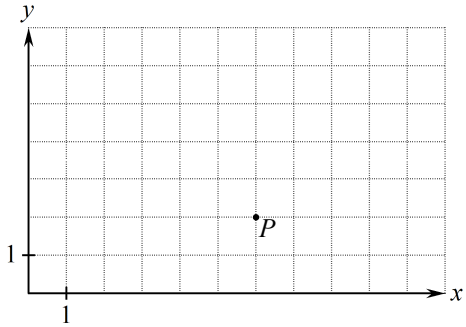
17.2 Øvelse Se 17c.

Skriv sand eller falsk ved hver af de 4 påstande:

(1) Den numeriske værdi af -6 er 6. **(2)** $|7| = -7$ **(3)** $|-15| = 15$ **(4)** Når $x = -5$, er $|x| = -x$.

17.3 Øvelse Se 17e, 4g og 13c.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.



(a) Udregn længden af $\vec{b}_{\vec{a}}$, og skriv mellemregninger:

$|\vec{b}_{\vec{a}}| =$

(b) Afsæt $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ud fra P, tegn $\vec{b}_{\vec{a}}$, og mål længden af $\vec{b}_{\vec{a}}$.

18.1 Øvelse Se 18a, 18b og 18c.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(a) Skriv sand eller falsk ved hver af følgende 4 påstande:

(1) Determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $\vec{c}$. (3) Determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 11.

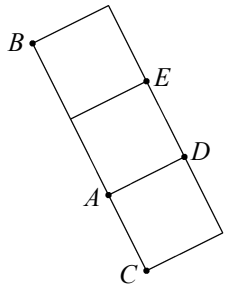
(2) Determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 5. (4) $\det(\vec{b},\vec{c}) = -41$.

(b) $\det(\vec{a},\vec{c}) =$ $=$ (c) $\det(\vec{b},\vec{a}) =$ $=$

(d) $\det(\begin{pmatrix} t+3 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}) =$

19.1 Øvelse Se 19a og 19b.

Skriv sand eller falsk ved hver af følgende 6 påstande:



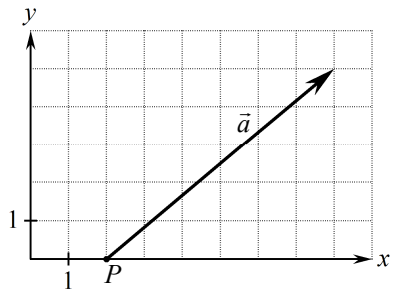
(1) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 0$ (2) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = 0$

(3) $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}) = 0$ (4) $\det(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE}) = 0$

(5) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ (6) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

19.2 Øvelse Se 19c.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2t \\ 4-t \end{pmatrix}$.



(a) For hver af t-værdierne -1, 0, 1, 2 og 3 skal du afsætte $\vec{b}$ ud fra P.

(b) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle netop når

$\det(\vec{a},\vec{b}) =$ ____

Når vi udregner venstre side, bliver denne ligning til

$=$

Vi løser denne ligning mht. t og får

$t =$

dvs. for denne værdi af t er _____.

Vi ser at dette godt kan passe med figuren.

20.1 Øvelse Se 17c.

Skriv sand eller falsk ved hver af de 4 påstande:

(1) Den numeriske værdi af 5 er -5. (2) $|-33| = 33$ (3) $|2| = 2$ (4) Når $x=-2$, er $|x| = -x$.

20.2 Øvelse Se 20a, 20c og 18b.

Skriv sand eller falsk ved hver af de 3 påstande:

(1) Når vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i planen udspænder et parallelogram med areal A, så er altid $A = \det(\vec{a},\vec{b})$.

(2) Når PQR er en trekant i planen med areal T, så er $T = \left|\det(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})\right|$.

(3) $|4\cdot 2 - 3\cdot 1|$ er arealet af det parallelogram der udspændes af vektorerne $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

20.3 Øvelse Se 20b.

Udregn arealet A af det parallelogram der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og skriv mellemregninger.

$\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. $A =$

21.1 Øvelse Se 21c.

(a) $\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}8\\2\\11\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\5\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{pmatrix}$

22.1 Øvelse Se 21c og 22a.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix}-9\\7\\-3\end{pmatrix}$. $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{pmatrix}$. (b) Af (a) kan vi se at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke er parallelle da

_____.

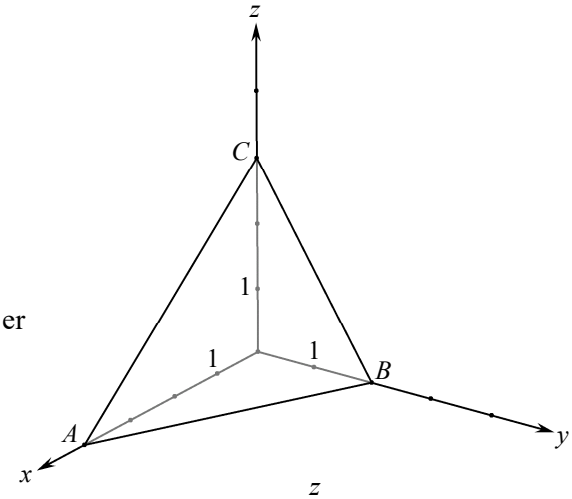
23.1 Øvelse Se 21c, 23c og 23b.

(a) $A = ($ (b) $B = ($ (c) $C = ($

(d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{pmatrix}$ (e) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{pmatrix}$

(f) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}\quad\\\quad\\\quad\end{pmatrix}$ (g) Arealet af trekant ABC er

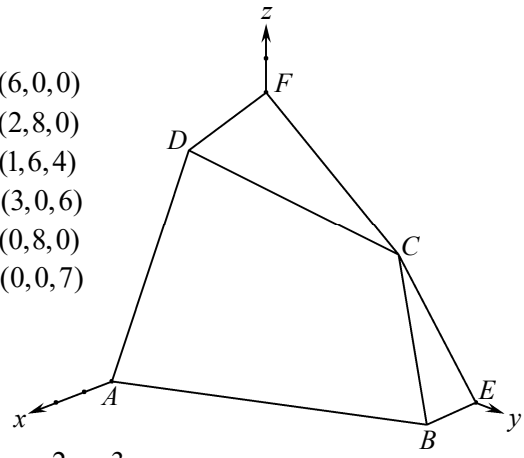
$T =$



23.2 Øvelse Se 21c, 23d, 23c og 23b.

Udregn arealet af firkant $ABCD$, og skriv mellemregninger.

$A(6,0,0)$
$B(2,8,0)$
$C(1,6,4)$
$D(3,0,6)$
$E(0,8,0)$
$F(0,0,7)$



23.3 Øvelse Se 23a.

(a) Vektorerne $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er vinkelret på hinanden og deres længder er 2 og 3.

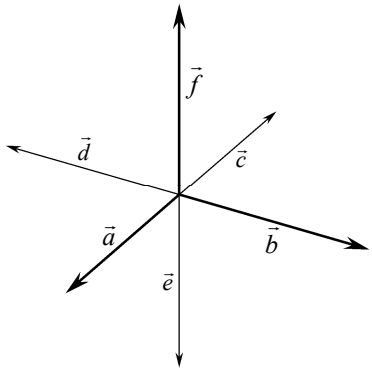
$|\vec{u}\times\vec{v}| =$

(b) I parallelogrammet $PQRS$ har grundlinjen PQ længden 10, og højden er 4.

$\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right| =$

24.1 Øvelse Se 24a, 24b, 23a og 22a.

Figuren viser 6 vektorer der er afsat ud fra samme punkt og har længde 1. Vektorerne er to og to enten modsat rettede eller vinkelret på hinanden.

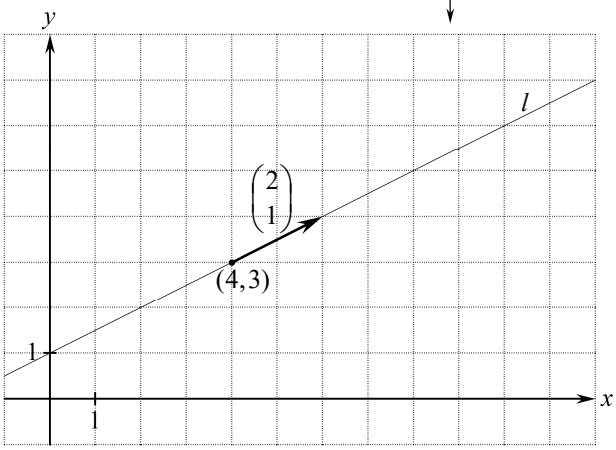


$\vec{a}\times\vec{b} = \quad . \qquad \vec{a}\times\vec{c} = \quad . \qquad \vec{a}\times\vec{d} = \quad . \qquad \vec{e}\times\vec{b} = \quad .$

25.1 Øvelse Se 10b og 11a.

En linje l har parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



(a) Når $t=2$ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Tegn punktet med disse koordinater.

(b) Når $t=3$ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Tegn punktet med disse koordinater.

(c) Når $t=1$ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Tegn punktet med disse koordinater.

(d) Når $t=0$ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Tegn punktet med disse koordinater.

(e) Når $t=-1$ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Tegn punktet med disse koordinater.

(f) Når $t=-1{,}5$ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Tegn punktet med disse koordinater.

25.2 Øvelse Se 25g.

En linje m har parameterfremstillingen

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Når $s=3$ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$, så punktet (,) ligger på m.

(b) Når $s=$ _____ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, så punktet $(5,0)$ ligger på m.

(c) Når $s=$ _____ er $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 26 \end{pmatrix}$, så punktet $(-8,26)$ ligger på m.

(d) Find et tal s så $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix}$ eller skriv at det ikke kan lade sig gøre.

(e) Ligger punktet $(-3,15)$ på m?

(f) Find et tal s så $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 48 \end{pmatrix}$ eller skriv at det ikke kan lade sig gøre.

(g) Ligger punktet $(-19,48)$ på m?

25.3 Øvelse Se 25c, 9a, 9d og 25j.

(a) En linje l går gennem punktet $(3,5)$ og er <u>parallel</u> med vektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Skriv en parameterfremstilling for l:

(b) En linje m går gennem punktet $(-2,1)$ og er <u>vinkelret</u> på vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

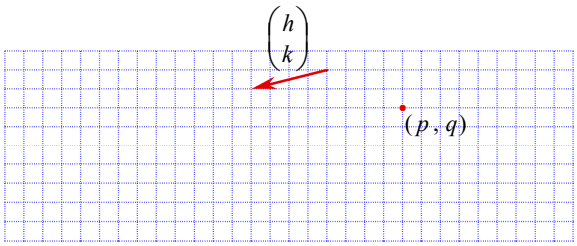
Skriv en parameterfremstilling for m:

(c) En linje k går gennem punkterne $(1,3)$ og $(-2,8)$.
Skriv en parameterfremstilling for k:

25.4 Øvelse Se 25a, 25c.

Linjen l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \quad -\infty < t < \infty .$$



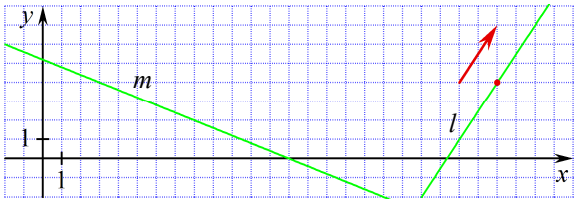
(a) Tegn de punkter på l hvor parameteren t har følgende værdier: 1, –2, 3 og 4,5 .

(b) For det punkt på l hvor $t = 5$, er $(x, y) =$ (,) .

25.5 Øvelse Se 25a, 25c.

(a) Skriv parameterfremstilling for linjen l :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \ \\ \ \end{pmatrix}$$



(b) Skriv parameterfremstilling for linjen m :

25.6 Øvelse Se 25i, 25e, 25f og 15b.

(a) Skriv <u>sand</u> eller <u>falsk</u> ved hver af følgende 6 påstande:

(1) Hvis to linjer k og n begge er parallelle med en vektor $\vec{r}$, så er k og n parallelle.

(2) Hvis $\vec{r}$ er retningsvektor for linjen n, så er $\vec{r}$ vinkelret på n.

(3) Hvis $\vec{r}$ er retningsvektor for linjen n, så er $\vec{r}$ parallel med n.

(4) To linjer er ortogonale netop når deres retningsvektorer er ortogonale.

(5) $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ er retningsvektor for linjen med parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(6) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ er retningsvektor for linjen med parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) To linjer l og m i rummet har følgende parameterfremstillinger:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Undersøg om l og m er ortogonale.

26.1 Øvelse Se 26c.

En linje l har ligningen

$$l: \ 2x + y - 6 = 0 .$$

(a) Når vi indsætter koordinaterne for punktet $P(3, 0)$ for x og y i ligningen for l, så får vi ligningen

_____ .

(b) Er denne ligning sand? Svar: _____ .

(c) Ligger P på l? Svar: _____ .

(d) Når vi indsætter koordinaterne for punktet $Q(-2, 11)$ for x og y i ligningen for l, så får vi ligningen

_____ .

(e) Er denne ligning sand? Svar: _____ .

(f) Ligger Q på l? Svar: _____ .

(g) Når vi indsætter koordinaterne for punktet $R(1, t)$ for x og y i ligningen for l, så får vi ligningen

_____ .

(h) Ligningen er sand netop når $t =$ _____ .

(i) Af punkterne med x-koordinat 1 er det kun punktet (,) der ligger på l .

26.2 Øvelse Se 26a, 9a, 9d og 25e.

(a) Linjen l går gennem punktet $(-8, 5)$ og er vinkelret på vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Brug 26a til at skrive ligning for l.

(b) Linjen m går gennem punktet $(4, 3)$ og er parallel med vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Brug 26a til at skrive ligning for m.

(c) Linjen k har parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Heraf ser vi at (,) er et punkt på k, og at $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ er parallel med k. Brug 26a til at skrive en ligning for k.

26.3 Øvelse Se 26b, 26d og 25e.

(a) Skriv <u>sand</u> eller <u>falsk</u> ved hver af følgende påstande:

(1) Hvis to linjer i planen er vinkelret på samme vektor, så er de to linjer parallelle.

(2) For linjer l og m i planen gælder at hvis l er vinkelret på $\vec{n}$, m er vinkelret på $\vec{p}$, og $\vec{n}$ er vinkelret på $\vec{p}$, så er l vinkelret på m.

(3) Hvis $\vec{n}$ er normalvektor for linjen l, så er $\vec{n}$ vinkelret på l.

(4) Hvis $\vec{n}$ er normalvektor for linjen l, så er $\vec{n}$ parallel med l.

(5) To linjer i planen er ortogonale netop når deres normalvektorer er ortogonale.

(6) To linjer i planen er parallelle netop når deres normalvektorer er parallelle.

(7) $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ er normalvektor for linjen med ligningen $3x + y - 5 = 0$.

(8) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ er retningsvektor for linjen med ligningen $3x + y - 5 = 0$.

(9) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ er normalvektor for linjen med ligningen $3x + y - 5 = 0$.

(10) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ er retningsvektor for linjen med ligningen $3x + y - 5 = 0$.

(b) To linjer l og m er givet ved $l: \ -x + 2y = 0$ og $m: \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$. Er l og m er parallelle.

27.1 Øvelse Se 27a og 27c.

(a) En plan α er vinkelret på $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ og går gennem $P(4, 6, -5)$. Bestem en ligning for α.

(b) Ligger $Q(3, 16, -1)$ i α?

27.2 Øvelse Se 27a, 27d, 27f, 27g.

(a) I planen α ligger punkterne $A(4, 1, 3)$, $B(-2, 2, 3)$ og $C(1, 4, 2)$.

(b) Bestem to vektorer der er parallelle med α og ikke er parallelle med hinanden.

(c) Bestem en vektor der er vinkelret på α, og bestem en ligning for α.

27.3 Øvelse Se 27e, 27b, 27d og 27f.

(a) Skriv <u>sand</u> eller <u>falsk</u> ved hver af følgende påstande:

(1) Hvis $\vec{r}$ er parallel med linjen l, og $\vec{n}$ er vinkelret på planen α, så er l parallel med α netop når $\vec{r}$ er vinkelret på $\vec{n}$.

(2) Hvis $\vec{r}$ er parallel med linjen l, og $\vec{n}$ er vinkelret på planen α, så er l parallel med α netop når $\vec{r}$ er parallel med $\vec{n}$.

(3) Hvis $\vec{n}$ er normalvektor for planen α, så er $\vec{n}$ parallel med α.

(4) Hvis $\vec{n}$ er normalvektor for planen α, så er $\vec{n}$ vinkelret på α.

(5) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ er vinkelret på planen med ligningen $x - y + 2z + 6 = 0$.

(6) Hvis en plan α skærer koordinatakserne i punkterne $A(4,0,0)$, $B(0,-2,0)$ og $C(0,0,1)$, så er $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ en normalvektor til α.

27.4 Øvelse Se 25f, 27d og 27f.

I planen α ligger punktet $P(3, 1, 5)$ og linjen m: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $-\infty < t < \infty$.

(a) På m ligger punktet (, ,). Punkterne (, ,) og (, ,) ligger i α og linjestykket med disse endepunkter er ikke parallel med m.

(b) Vektoren $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ er parallel med m. Vektorerne $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ er parallelle med α og er ikke parallelle med hinanden. Vektoren $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ er vinkelret på α.

28.1 Øvelse Se 28a og 28c.

(a) Cirklen med ligningen $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$ har centrum $C($, $)$ og radius $r =$.

(b) Cirklen med ligningen $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 7$ har centrum $C($, $)$ og radius $r =$.

(c) Cirklen med ligningen $(x+p)^2 + (y-q)^2 = 4^2$ har centrum $C($, $)$ og radius $r =$.

28.2 Øvelse Se 28e.

Bestem centrum og radius for cirklen med ligningen $x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0$.

29.1 Øvelse Se 29a og 29b.

En kugle har centrum $(2, 5, -3)$, og punktet $(3, 7, 0)$ ligger på kuglen. Skriv en ligning for kuglen.

30.1 Øvelse Se 30a. Skriv <u>sand</u> eller <u>falsk</u> ved hver af følgende påstande:

(1) Afstanden fra $P(3, 7)$ til l: $2x - y = 3$ er $\dfrac{|2\cdot 3 - 7 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$.

(2) Afstanden fra $Q(2, 3)$ til m: $4x + 5y + 1 = 0$ er $\dfrac{|4\cdot 2 + 5\cdot 3 + 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$.

(3) Afstanden fra $R(1, -2)$ til n: $3x + y - 2 = 0$ er $\dfrac{|3 - 2 - 2|}{\sqrt{9+1}}$.

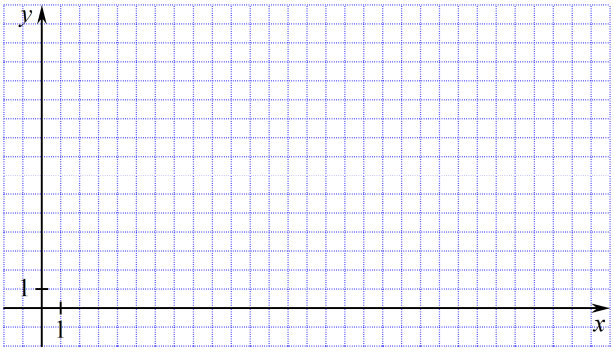
31.1 Øvelse Se 31a og 17c.

(a) Planen α har ligningen $2x - 2y + z + d = 0$ hvor d er et negativt tal.
Afstanden fra begyndelsespunktet $O(0,0,0)$ til planen α er 2. $d =$ _____ .

(b) Afstanden fra $P(t,0,0)$ til planen β: $x + y + z = 0$ er $\sqrt{3}$. $t =$ _____ eller $t =$ _____ .

32.1 Øvelse $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Afsæt $\vec{r}$ og $\vec{s}$ ud fra ud fra $P(9, 4)$, og $\vec{n}$ ud fra $Q(24, 5)$. Linjen l er parallel med $\vec{r}$ og går gennem P. Tegn fire punkter på l, og tegn l. Tegn også linjen m som er parallel med $\vec{s}$ og går gennem P. Afsæt $\hat{\vec{n}}$ ud fra Q. Tegn fire punkter på linjen h som går gennem Q og er vinkelret på $\vec{n}$, og tegn h. Udregn vinklen mellem l og m, og vinklen mellem l og h, og kontrollér med vinkelmåler.



32.2 Øvelse Se 32a, 32b og 32c.

Fire linjer er givet ved

$$l_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},\quad l_2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix},\quad l_3\colon ix + jy + k = 0,\quad l_4\colon lx + my + n = 0.$$

(a) For at finde vinkel mellem l_1 og l_2 vil vi først finde vinklen v mellem $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$. De to vinkler som l_1 og l_2 danner, er så _____ .

(b) For at finde vinkel mellem l_3 og l_4 vil vi først finde vinklen v mellem $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$. De to vinkler som l_3 og l_4 danner, er så _____ .

(c) For at finde vinkel mellem l_1 og l_4 vil vi først finde vinklen v mellem $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$. De to vinkler som l_1 og l_4 danner, er så _____ .

33.1 Øvelse Se 33a, 27b, 27d og 27f.

To planer α og β har ligningerne $\alpha:\ ax+by+cz+d=0$ og $\beta:\ ex+fy+gz+h=0$.

En plan γ indeholder punkterne $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ og $C(c_1,c_2,c_3)$ som ikke ligger på linje.

(a) For at finde vinkel mellem α og β vil vi først finde vinklen v mellem $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$. De to vinkler som α og β danner, er så _____ .

(b) For at finde vinkel mellem α og γ vil vi først finde vinklen v mellem de to vektorer $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$. De to vinkler som α og γ danner, er så _____ .

34.1 Øvelse Se 34a, 34b, 24a og 24b.

v er vinklen mellem sidefladerne ABD og BCD . Skriv sand eller falsk:

(1) Vektoren $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ peger ind i vinklen.

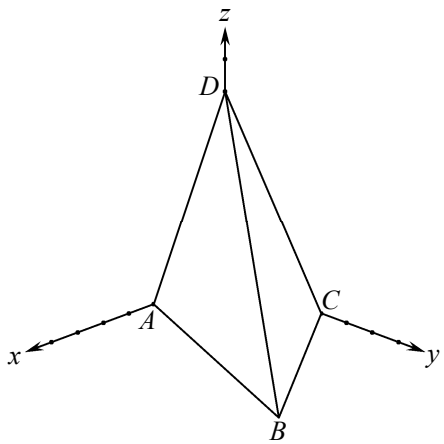
(2) Vektoren $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BD}$ peger ind i vinklen.

(3) Vektoren $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}$ peger ud af vinklen.

(4) Vektoren $\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DB}$ peger ud af vinklen.

(5) v er lig vinklen mellem $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ og $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}$.

(6) v er lig vinklen mellem $\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BD}$ og $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}$.



35.1 Øvelse Se 35a.

α er en plan og l og m er linjer: $\alpha:\ 4x+2y-z=0$, $l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$, $m:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$.

(a) For at finde vinklen mellem α og l vil vi først finde vinklen mellem $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$.

Hvis denne vinkel er $8°$, så er vinklen mellem α og l lig _____ = _____ .

(b) For at finde vinklen mellem α og m vil vi først finde vinklen mellem $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$.

Hvis denne vinkel er $150°$, så er vinklen mellem α og l lig _____ = _____ .

36.1 Øvelse Se 36a.

(a) $l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ Et vilkårligt punkt på l er $(x,y)=(\quad,\quad)$

(b) $m:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ Et vilkårligt punkt på m er $(x,y)=(\quad,\quad)$

37.1 Øvelse Se 37a.

$l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $m:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Brug metoden fra 37a til at finde skæringspunktet mellem linjerne l og m uden at bruge elektronisk hjælpemiddel.

37.2 Øvelse Se 37b.

$l:\ x-2y+4=0$, $m:\ 3x+2y-20=0$.

Brug metoden fra 37b til at finde skæringspunktet mellem linjerne l og m uden at bruge elektronisk hjælpemiddel.

37.3 Øvelse Se 37c.

$l:\ 4x-3y+2=0$, $m:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Brug metoden fra 37c til at finde skæringspunktet mellem linjerne l og m uden at bruge elektronisk hjælpemiddel.

38.1 Øvelse Se 38a.

$$l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ ,\qquad C:\ x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0\ .$$

Brug metoden fra 38a til at finde de <u>to</u> skæringspunkter mellem linjen l og cirklen C uden at bruge elektronisk hjælpemiddel.

38.2 Øvelse Se 38b.

$$l:\ 3x - y + 1 = 0\ ,\qquad C:\ x^2 + (y-1)^2 = 10\ .$$

Brug metoden fra 38b til at finde de <u>to</u> skæringspunkter mellem linjen l og cirklen C uden at bruge elektronisk hjælpemiddel.

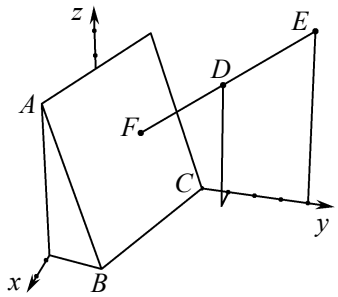
39.1 Øvelse Se 25d, 29a, 39a.

(a) Linjen l er sammenfaldende med z-aksen. Skriv parameterfremstilling for l.

(b) Kuglen K har centrum i $A(0, 1, 0)$ og skærer y-aksen i $B(0, -1, 0)$. Bestem ligning for K.

(c) Bestem koordinatsæt til skæringspunkt mellem l og K.

40.1 Øvelse Se 40a.



På figuren er en skrå væg der indeholder punkterne A, B og C.
En metalstang er fastgjort på denne væg i punktet F.
Metalstangen er også fastgjort i punkterne D og E øverst på to lodrette stænger.

Skriv hvordan vi kan udregne koordinaterne til F
når vi kender koordinaterne til A, B, C, D, E.

41.1 Øvelse Se 25c, 41a.

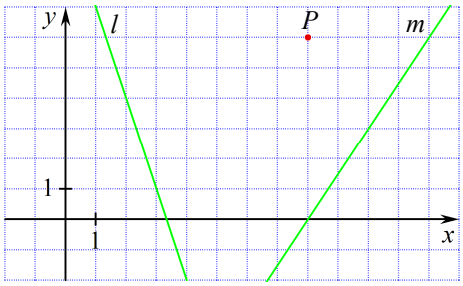
$$P(3, 4)\ .\quad l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ -\infty < t < \infty\ .$$

(a) Bestem parameterfremstilling for linjen m der går gennem P og er vinkelret på l.

(b) Bestem projektionen Q af P på l.

(c) Der er andre punkter end P hvis projektion på l er Q. Bestem koordinatsættet til to af dem.

41.2 Øvelse Se 41.



(a) Bestem koordinatsæt til retningsvektor og til normalvektor for l.

(b) Tegn normalvektoren, og det punkt Q som er projektion af P på l.

(c) Bestem koordinatsæt til retningsvektor og til normalvektor for m.

(d) Tegn nornalvektoren, og det punkt R som er projektion af P på m.

(e) Udregn koordinatsæt til R.

42.1 Øvelse Se 42a.

En linje l går gennem punktet $P(6, 4, 2)$ og er vinkelret på planen $\alpha:\ 2x - z = 0$.

(a) Bestem koordinatsæt til vektor der er vinkelret på α.

(b) Bestem koordinatsæt til vektor der er parallel med l.

(c) Bestem parameterfremstilling for l.

(d) Bestem skæringspunkt mellem l og α.

(e) Bestem koordinatsæt til projektionen af P på α.

43.1 Øvelse

$$l:\ ax + by + c = 0\ ,\qquad C:\ (x-5)^2 + (y-3)^2 = 16\ .$$

Vi indsætter bestemte tal for a, b og c så linjen l er tangent til cirklen C.

Hvilket tal får vi så når vi udregner $\dfrac{|a\cdot 5 + b\cdot 3 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$? Svar: _____ .

For at svare på dette har vi brugt følgende tre regler fra dette hæfte: _____ og _____ og _____ .

43.2 Øvelse I en opgave står ligningerne for en linje l og en cirkel C i planen.

(a) Disse to ligninger er et ligningssystem. Hvis vi løser ligningssystemet, hvordan kan vi så se om l er tangent til C? Svar: _____ .

(b) På C's ligning kan vi se centrums koordinater og radius. Hvis vi udregner afstanden fra centrum til l, hvordan kan vi så se om l er tangent til C?
Svar: _____ .

44.1 Øvelse Se 44d. Punktet $A(1,1,1)$ ligger på en kugle K med centrum $B(1,0,0)$.
Find en ligning for den plan α som er tangentplan til K i A.

44.2 Øvelse Se 44e. α: $x-y+2z=0$ er tangentplan til en kugle K med centrum $Q(0,2,0)$.
Find koordinatsættet til røringspunktet .

44.3 Øvelse Se 44f. α: $x+y+z+1=0$ er tangentplan til en kugle K med centrum $O(0,0,0)$.
Find en ligning for K.

44.4 Øvelse Se 44g.
Er planen α: $3x+4y+6=0$ tangentplan til kuglen K med centrum $Q(0,1,3)$ og radius 2?

45.1 Øvelse Se 11a og 14b.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. Et facit kan indeholde et eller flere bogstaver.

(a) $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix}$ (b) $\vec{a}\cdot\vec{c}=$ (c) $\vec{b}\cdot\vec{c}=$

(d) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=$ (e) $\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=$

46.1 Øvelse Se 10b, 14b og 7b. $\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

(a) $3\vec{a}=\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix}$ (b) $(3\vec{a})\cdot\vec{a}=$ (c) $|\vec{a}|=$

(d) $|\vec{a}|^2=$ (e) $3|\vec{a}|^2=$

(f) Hvilke af de 5 udtryk (a)-(e) er lig hinanden?

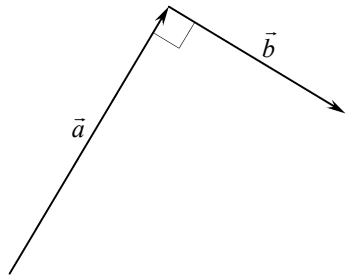
48.1 Øvelse Se 14b, 7b, 11a, 11c.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

(a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ (b) $|\vec{a}|=$ (c) $|\vec{a}|^2=$ (d) $|\vec{b}|^2=$

(e) $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}\quad\\\quad\end{pmatrix}$ (f) $|\vec{a}+\vec{b}|=$

(g) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\quad)^2+(\quad)^2=$



(h) Tegn vektoren $\vec{a}+\vec{b}$ på figuren til højre.

(i) Hvis $\vec{a}$ er vinkelret på $\vec{b}$, så følger af
_____ at $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2$.

(j) Heri indsætter vi resultaterne fra (c), (d) og (g) og får
_____ = _____ .

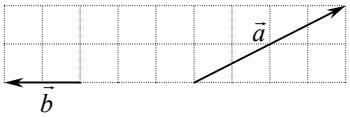
(k) Vi trækker det samme fra begge sider i denne ligning og får
$0=$ _____ .

(l) Vi dividerer begge sider med 2 og får
$0=$ _____ dvs. $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ____ .

49.1 Øvelse Se 13b, 13c og 10d.

Tegn den vektor $\vec{a}_{\vec{b}}$ som er projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

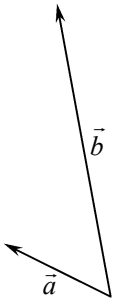
$\vec{a}_{\vec{b}} = t\vec{b}$ når $t =$ ____ .



49.2 Øvelse Se 13b, 13c og 10d.

Tegn den vektor $\vec{b}_{\vec{a}}$ som er projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$.

$\vec{b}_{\vec{a}} = t\vec{a}$ når $t =$ ____ .



49.3 Øvelse Se 11c, 45a, 46a og 48a.

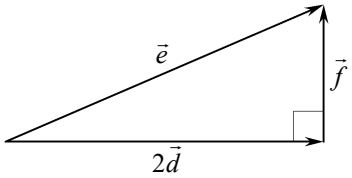
Hvilke af følgende 7 udtryk er lig hinanden?

(1) $\vec{e}\cdot\vec{d}$ (5) $(2\vec{d})\cdot\vec{d}+\vec{f}\cdot\vec{d}$

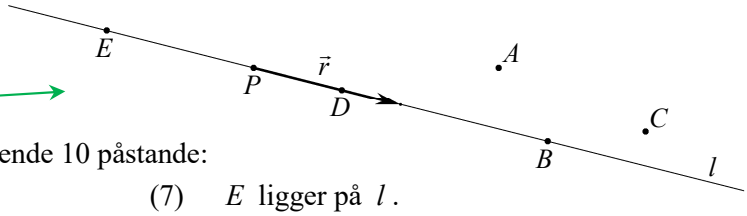
(2) $\vec{f}\cdot\vec{d}$ (6) $3\vec{d}$

(3) $(2\vec{d}+\vec{f})\cdot\vec{d}$ (7) $2\left|\vec{d}\right|^2$

(4) $2\vec{d}+\vec{f}+\vec{d}$



50.1 Øvelse Se 10d og 25j.



(a) Tegn vektoren $\overrightarrow{PA}$ på figuren.

(b) Skriv sand eller falsk ved hver af følgende 10 påstande:

(1) A ligger på l.

(2) $\overrightarrow{PA}$ er parallel med l.

(3) Der findes et tal t så $\overrightarrow{PA}=t\vec{r}$.

(4) B ligger på l.

(5) $\overrightarrow{PB}$ er parallel med l.

(6) Der findes et tal t så $\overrightarrow{PB}=t\vec{r}$.

(7) E ligger på l.

(8) $\overrightarrow{PE}$ er parallel med l.

(9) Der findes et tal t så $\overrightarrow{PE}=t\vec{r}$.

(10) Der findes et tal t så $\overrightarrow{PP}=t\vec{r}$.

(11) Der findes et tal t så $\overrightarrow{PC}=t\vec{r}$.

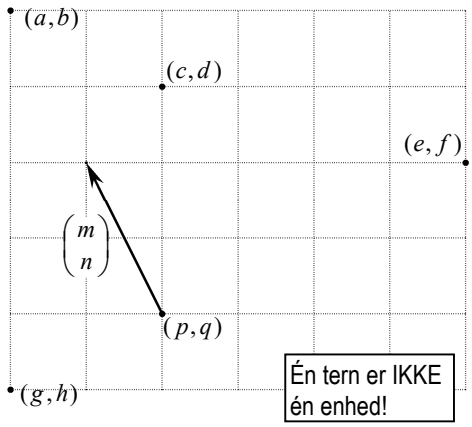
(12) C ligger på l.

(c) Når $\overrightarrow{PD}=t\vec{r}$, er $t=$ _____ .

(d) Når $\overrightarrow{PE}=t\vec{r}$, er $t=$ _____ .

51.1 Øvelse Se 4c, 15b og 14b.

Figuren viser vektoren $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ og nogle punkter.



(a) Tegn vektoren $\vec{v}$ fra punktet (p,q) til punktet (e,f).

(b) $\vec{v} = \Big($

(c) Skriv sand eller falsk ved hver af følgende påstande:

(1) $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a-p \\ b-q \end{pmatrix} = 0$ (2) $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c-p \\ d-q \end{pmatrix} = 0$

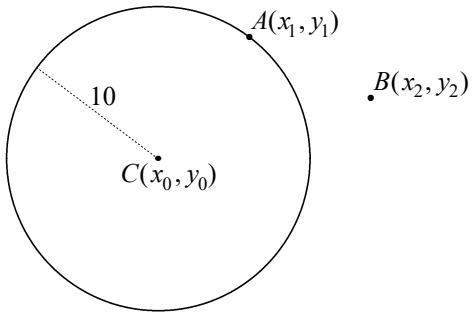
(3) $m(c-p)+n(d-q) = 0$ (4) $m(e-p)+n(f-q) = 0$

(5) $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} g-p \\ h-q \end{pmatrix} = 0$

(d) Tegn tre nye punkter (x,y) hvor $m(x-p)+n(y-q) = 0$

53.1 Øvelse Se 4c og 7b.

På figuren er en cirkel med radius 10.



(a) Tegn vektoren $\overrightarrow{CB}$. (b) $\overrightarrow{CB} = \Big($

(c) $\left|\overrightarrow{CB}\right| =$

(d) $\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2} =$ ____ .

(e) $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2 =$ ____ .

(f) Tegn tre nye punkter (x,y) hvor $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = 100$

A
afstand 4, 17
afstand fra punkt til linje i planen 17
afstand fra punkt til plan 17
afstand mellem punkter 4
afsætte vektor ud fra punkt 2, 3
areal 10, 11
areal af firkant i planen 11
areal af firkant i rummet 12
areal af parallelogram i planen 10, 11
areal af parallelogram i rummet 11
areal af trekant i planen 11
areal af trekant i rummet 12
B
begyndelsespunkt 1
beviser 23
C
cirkel, bestem centrum og radius 16
cirkels ligning 16, 25
D
determinant 9, 10
G
gange, krydsprodukt 11, 12
gange, prikprodukt 7, 8
gange, tal og vektor 5
gange, vektorprodukt 11
H
højrehåndsregel 12
K
koordinater til punkt i planen 1
koordinater til punkt i rummet 1
koordinater til vektors slutpunkt 3
koordinatgeometri 13
koordinatsystem i planen 1
koordinatsystem i rummet 1
koordinatsæt til punkt 1
koordinatsæt til vektor 2
krydsprodukt 11, 12
kugle, bestem centrum og radius 16
kugles ligning 16, 25
L
ligning for cirkel 16, 25
ligning for kugle 16, 25
ligning for linje 14, 25
ligning for plan 15, 25
linjes ligning 14, 25
linjes parameterfremstilling 13
længde af projektion af vektor 8
længde af vektor 3, 9
M
minus, vektorer 6
modsat vektor 4
N
normalvektor 14, 15, 17, 19
normalvektor for linje 14
normalvektor for plan 15
nulvektor 3, 23
numerisk værdi 9
O
ortogonal 7
P
parallel 10, 11
parallel i planen 10
parallel i rummet 11
parallelogram 2
parameterfremstilling for linje 13, 24
plans ligning 15, 25
plus, vektorer 5
prikke ind i en parentes 23
prikke med nulvektor 23
prikprodukt 7, 8
projektion 6, 7, 8, 21
projektion af punkt på linje 6, 21
projektion af punkt på plan 7, 21
projektion af vektor på vektor 7, 8
R
retningsvektor 13, 17, 19
røringspunkt 22
røringspunkt på cirkel 22
røringspunkt på kugle 22
S
skalarprodukt 7
skæring 19, 20
skæring mellem linje og cirkel 20
skæring mellem linje og kugle 20
skæring mellem linje og plan 20
skæring mellem to linjer 19
slutpunkt 3
slutpunkt for vektor 2
startpunkt for vektor 2
stedvektor 2
T
tal gange vektor 5
tangent til cirkel 22
tangentplan 22
tværvektor 4
U
udspænde 10, 15
V
vektor 2
vektor gange tal 5
vektor minus vektor 6
vektor plus vektor 5
vektorprodukt 11
vektors koordinatsæt 2
vektors længde 3
vektors slutpunkt 2, 3
vektors startpunkt 2
vilkårligt punkt på linje 19
vinkel 8, 17, 18, 19
vinkel mellem linje og plan 19
vinkel mellem linjer 17
vinkel mellem planer 18
vinkel mellem sideflader 18
vinkel mellem vektorer 8
vinkelret 7, 12, 23
X
xy-planen 1
xz-planen 1
Y
yz-planen 1