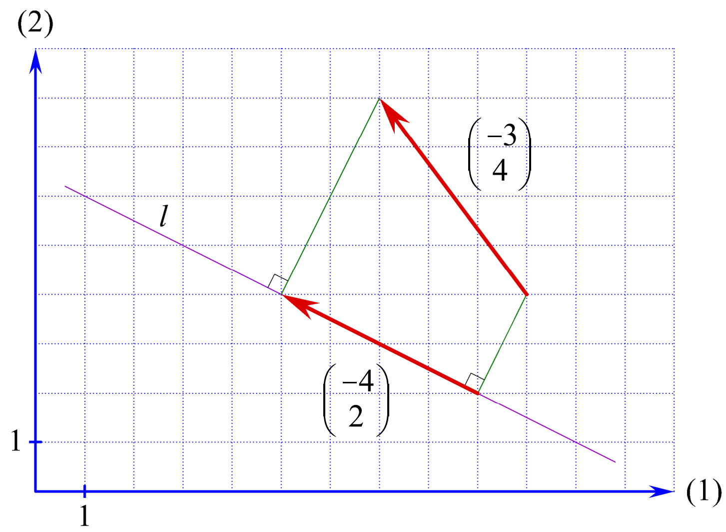
# Vektorer

i planen.

Et oplæg. Udgave 2.




2011 Karsten Juul

Til eleven

Formålet med dette hæfte er  ikke  at du skal få træning i at skrive besvarelser af standardopgaver. Formålet er at du skal få kendskab til den geometriske baggrund for standardmetoderne. Så bliver stoffet nemmere.

Du skal selv fumle dig frem til facitterne på en eller anden måde. Så får du nemlig kendskab til det geometriske indhold, og det gør du ikke hvis du bruger andres metoder i stedet for selv at se på figuren hvad der er rigtigt.

Du skal ikke skrive hvordan du er kommet frem til facitterne.
Du får andre opgaver hvor du skal øve dig på dette.

Vektorer i planen. Et oplæg.

2. udgave 2011

## 1. Eksempel *Koordinatsæt for punkt*

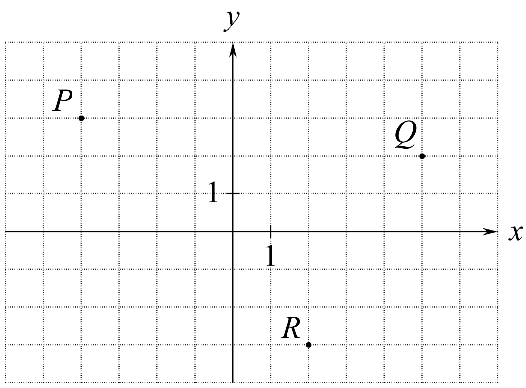
På den venstre figur har vi tegnet et punkt $P$.

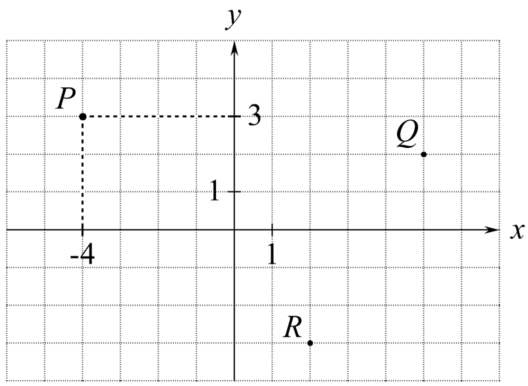
På den højre figur har vi vist hvordan vi aflæser at

punktet $P$ har koordinatsættet $(-4,3)$

Symbolet $(-4,3)$ læser vi sådan: $-4$ komma 3

Vi bruger symbolet $(-4,3)$ som en betegnelse for punktet: $P=(-4,3)$




## 2. Øvelse *Koordinatsæt for punkt*

Brug figuren og oplysningerne i eksempel 1.

Udfyld de tomme pladser:

a) Punktet $Q$ har koordinatsættet ( , )

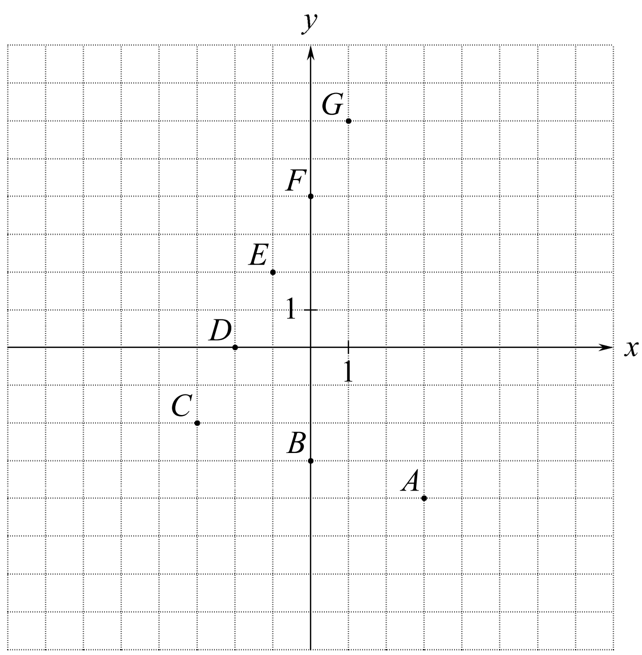
b) $R$ = ( , )

c) Tegn punktet $(-2,-1)$ på venstre figur ovenfor.

d) Tegn punktet $(0,-1)$ på venstre figur ovenfor.

e) Tegn punktet $(3,0)$ på venstre figur ovenfor.

## 3. Øvelse *Koordinatsæt for punkt*




a) $A$ = ( , )

b) $B$ = ( , )

c) $C$ = ( , )

d) $D$ = ( , )

e) $E$ = ( , )

f) $F$ = ( , )

g) $G$ = ( , )

h) Tegn punktet $(7,5)$

i) Tegn punktet $(6,0)$

j) Tegn punktet $(4,-7)$

k) Tegn punktet $(0,-6)$

l) Tegn punktet $(-6,-4)$

m) Tegn punktet $(-6, 5{,}5)$

## 4. Eksempel *Koordinatsæt for vektor*

Pilen på figuren viser en forskydning der fører punktet $A$ over i punktet $B$. Det ses at

forskydningen er

3 i $x$-aksens retning

og

2 i $y$-aksens retning .

Pilen, der kaldes en vektor, har koordinatsættet

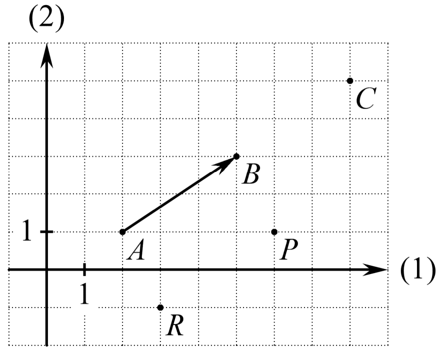
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Dette symbol læses

"tre komma to"

selv om der ikke er noget komma når koordinatsættet skrives lodret.

Eksempler:




Forskydning med $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ fører $A$ over i $B$.

Forskydning med $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ fører $B$ over i $C$.

Forskydning med $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ fører $R$ over i $P$.

Forskydning med $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ fører $R$ over i $A$.

Du skal forestille dig at pilen ligger løst oven på papiret, og at du kan flytte den, men ikke dreje den.

## 5. Øvelse *Koordinatsæt for vektor*

Se på figuren ovenfor.

a) Forskydning med $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ fører $A$ over i $C$.

b) Forskydning med $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ fører $P$ over i $A$.

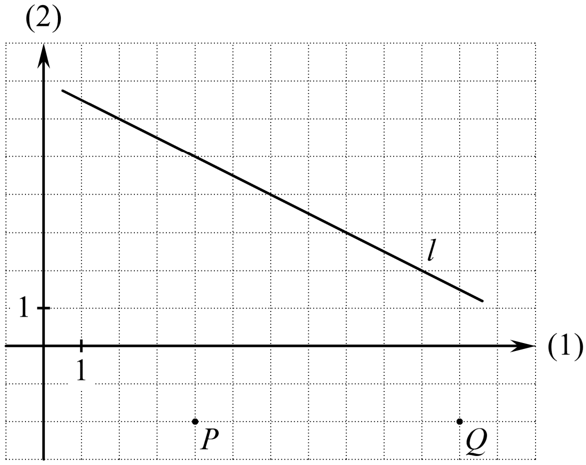
c) Forskydning med $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ fører $A$ over i $P$.

d) Forskydning med $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ fører $B$ over i $A$.

e) Forskydning med vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ fører punktet $A$ over i punktet ( , ) .

f) Forskydning med vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ fører punktet ( , ) over i punktet $A$ .

## 6. Øvelse *Koordinatsæt for vektor*




a) Forskydning med vektoren $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ fører punktet $P$ over i punktet ( , ) .

b) Forskydning med vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ fører punktet $P$ over i punktet ( , ) .

c) Forskydning med $\begin{pmatrix} \phantom{0} \\ 5 \end{pmatrix}$ fører $P$ over i et punkt på linjen $l$.

d) Forskydning med $\begin{pmatrix} -2 \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$ fører $P$ over i et punkt på linjen $l$.

e) Hvis $c = 2$, vil forskydning med vektoren $\begin{pmatrix} c\cdot(-2) \\ c\cdot 2 \end{pmatrix}$ føre $Q$ over i punktet ( , ) .

f) Hvis $c =$ _____ , vil forskydning med vektoren $\begin{pmatrix} c\cdot(-2) \\ c\cdot 2 \end{pmatrix}$ føre $Q$ over i et punkt på linjen $l$.

g) Find nogle punkter som ved forskydning med $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ føres over i et punkt på linjen $l$.

Svar:

## 7. Eksempel *Parallel og vinkelret*

På figuren ser vi at

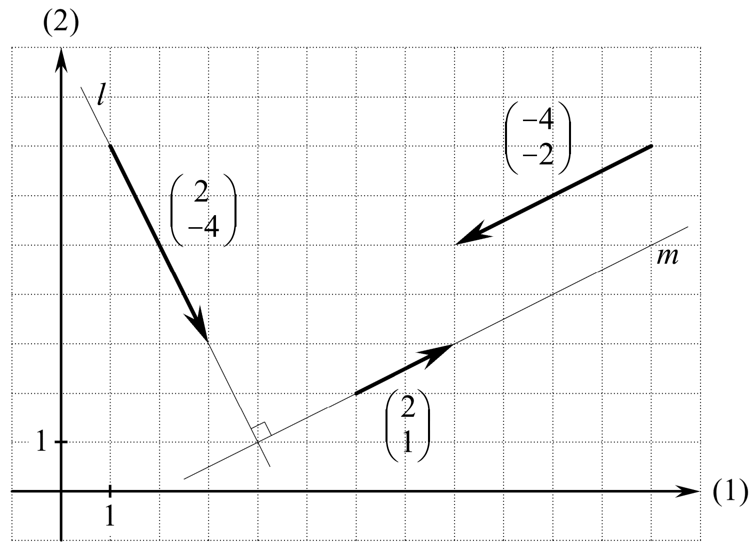
$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er parallel med $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

og at

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er vinkelret på $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Vi har tegnet to hjælpelinjer for at vise at $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er vinkelret på $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Både $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ er parallelle med $m$ og vinkelrette på $l$.



## 8. Øvelse *Parallel og vinkelret*

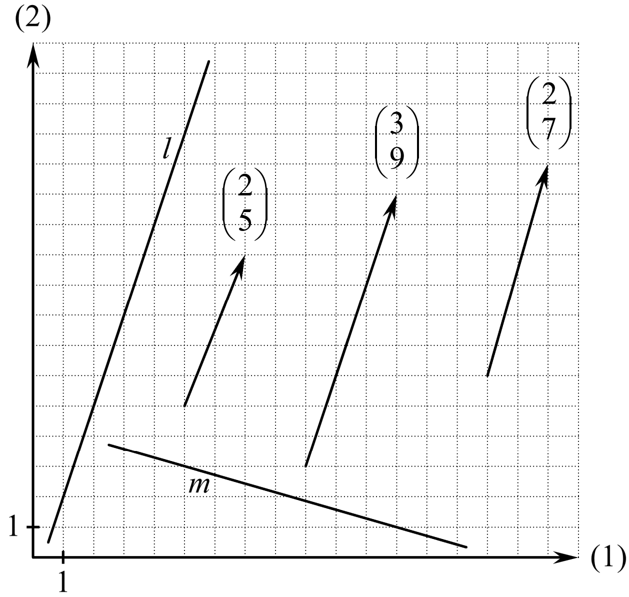
a) Hvilken af de viste vektorer er parallel med linjen $l$?

b) Hvilken af de viste vektorer er vinkelret på linjen $m$?

c) Når $k =$ _____ , er $\begin{pmatrix} 6 \\ k \end{pmatrix}$ vinkelret på $l$.

d) Når $h =$ _____ , er $\begin{pmatrix} h \\ -1 \end{pmatrix}$ parallel med $m$.

e) Når $k =$ _____ , er $\begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix}$ parallel med $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.




## 9. Øvelse *Parallel og vinkelret*

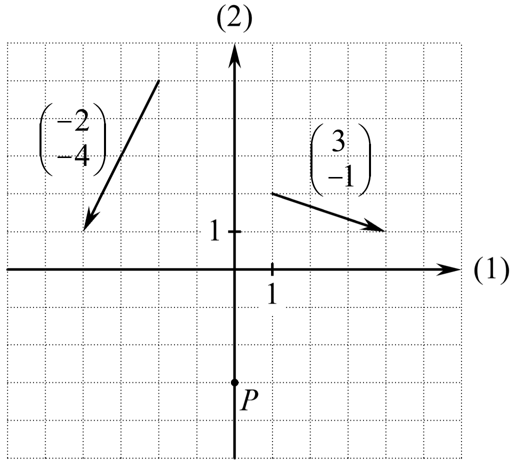
a) Find et tal $t$ så linjen gennem $P$ og $(-3, t)$ er vinkelret på $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$t =$ ______

b) En linje $l$ er vinkelret på $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Find et tal $h$ så $\begin{pmatrix} h \\ 2 \end{pmatrix}$ er vinkelret på $l$.

$h =$ ______



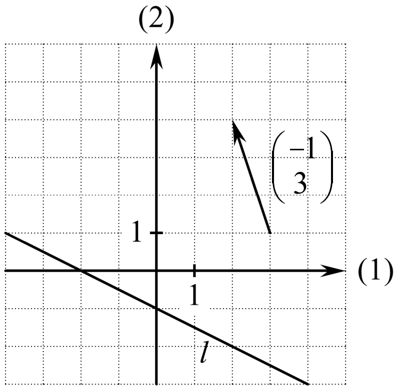

## 10. Øvelse *Vinkelret*

a) Ved forskydning med $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ føres punkterne på linjen $l$ over i punkterne på en linje $m$.

Tegn linjen $m$.

b) Find en vektor $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ vinkelret på $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ så $l$ ved forskydning med $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ føres over i $m$.

$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$



## 11. Øvelse *Gange vektor med tal*

a) På figuren nedenfor skal du tegne følgende:

– Det punkt som $P$ føres over i ved forskydning med $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

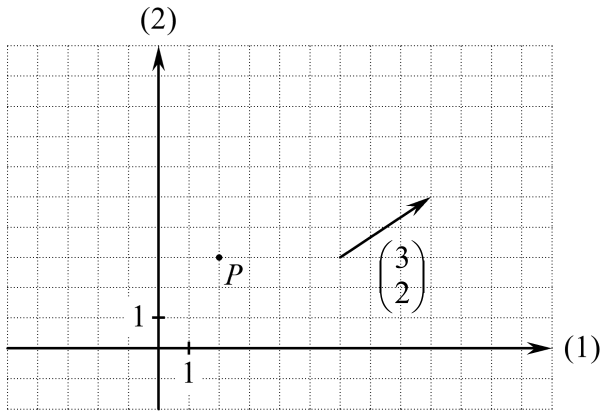
– Det punkt som $P$ føres over i ved forskydning med $\begin{pmatrix}c\cdot3\\c\cdot2\end{pmatrix}$ når $c=3$.

– Det punkt som $P$ føres over i ved forskydning med $\begin{pmatrix}c\cdot3\\c\cdot2\end{pmatrix}$ når $c=-2$.

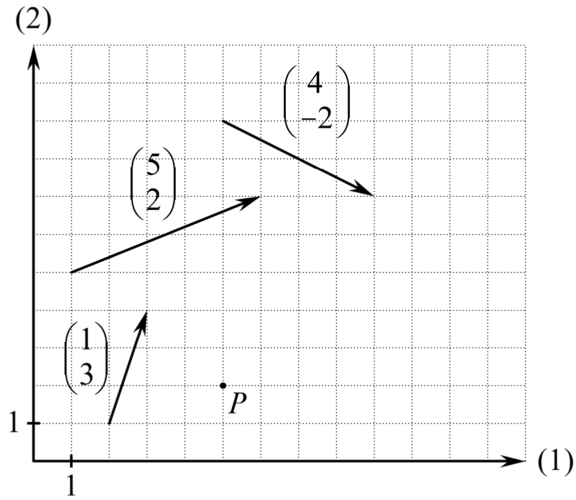
b) Udregn det punkt $(s,t)$ som $P$ føres over i ved forskydning med $\begin{pmatrix}c\cdot3\\c\cdot2\end{pmatrix}$ når $c=10$.

$(s,t) \;=\; ( \qquad , \qquad )$

c) Skriv udtrykt ved $c$ koordinatsættet $(s,t)$ til det punkt som $P$ føres over i ved forskydning med $\begin{pmatrix}c\cdot3\\c\cdot2\end{pmatrix}$. $\quad (s,t) \;=\; ( \qquad\qquad , \qquad\qquad )$




## 12. Øvelse *To forskydninger*




a) Et punkt der starter i $P$, forskydes først med $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. Derefter forskydes det videre med $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.
Hvor meget er punktet i alt forskudt mod højre?
Og hvor meget er punktet i alt forskudt opad?

Dette er forskydningen med vektoren $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$.

b) Et punkt forskydes først med $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

Derefter forskydes det videre med $\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

Hvor meget er punktet i alt forskudt mod højre? Og hvor meget er punktet i alt forskudt opad?

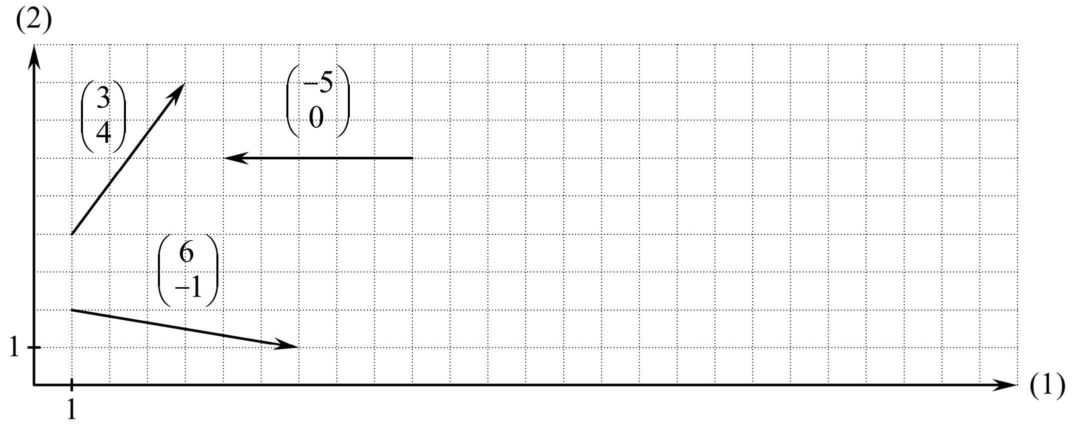
Dette er forskydningen med vektoren $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$.

## 13. Øvelse *To forskydninger*

Se på figuren nedenfor.

a) Find en vektor $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ sådan at hvis et punkt først forskydes med $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$, og derefter forskydes videre med $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, så er punktet i alt forskudt med $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\qquad \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

b) Find en vektor $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ sådan at hvis et punkt først forskydes med $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, og derefter forskydes videre med $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, så er punktet i alt forskudt med $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\qquad \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

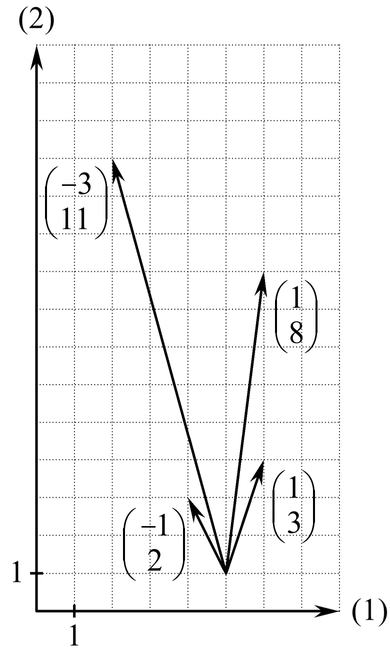



## 14. Øvelse *To forskydninger – gange vektor med tal*

a) Find et tal $c$ sådan at hvis et punkt først forskydes med $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ og derefter forskydes videre med $\begin{pmatrix} c \cdot (-1) \\ c \cdot 2 \end{pmatrix}$, så er punktet i alt forskudt med $\begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$. $\qquad c =$ ______

b) Bestem tallene $s$ og $t$ sådan at hvis et punkt først forskydes med $\begin{pmatrix} s \cdot 1 \\ s \cdot 3 \end{pmatrix}$ og derefter forskydes videre med $\begin{pmatrix} t \cdot (-1) \\ t \cdot 2 \end{pmatrix}$, så er det i alt forskudt med $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$s =$ ______ $\qquad t =$ ______

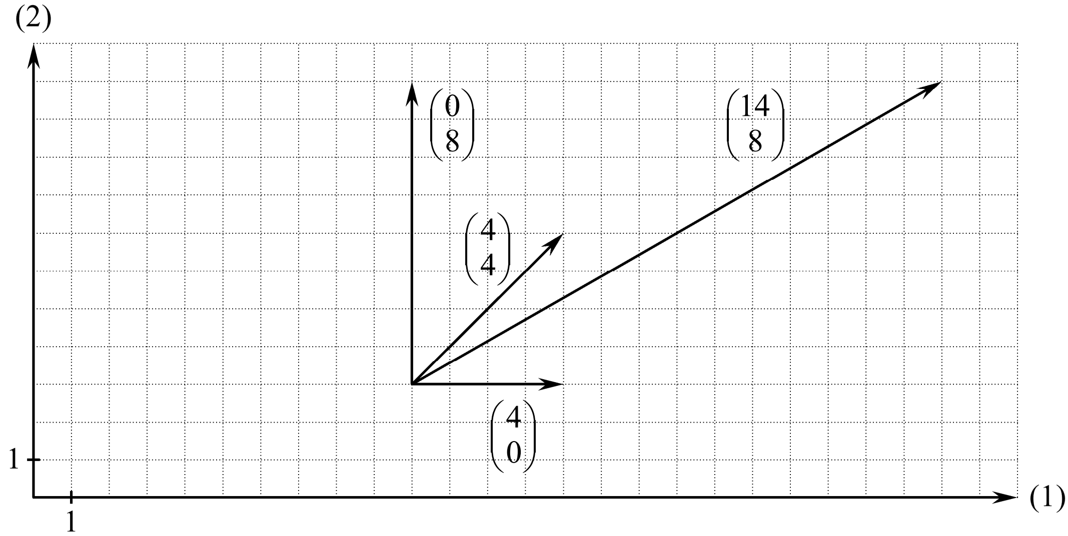


**15. Øvelse** *To forskydninger – gange vektor med tal*

Se på figuren nedenfor.

a) Bestem tallene $s$ og $t$ sådan at hvis et punkt først forskydes med $\begin{pmatrix} s\cdot 4 \\ s\cdot 0 \end{pmatrix}$ og derefter forskydes videre med $\begin{pmatrix} t\cdot 4 \\ t\cdot 4 \end{pmatrix}$, så er det i alt forskudt med $\begin{pmatrix} 14 \\ 8 \end{pmatrix}$. $s$ = _______ $t$ = _______

b) Bestem tallene $s$ og $t$ sådan at hvis et punkt først forskydes med $\begin{pmatrix} s\cdot 4 \\ s\cdot 0 \end{pmatrix}$ og derefter forskydes videre med $\begin{pmatrix} t\cdot 4 \\ t\cdot 4 \end{pmatrix}$, så er det i alt forskudt med $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$. $s$ = _______ $t$ = _______




**16. Øvelse** *Linjer der står vinkelret på hinanden*

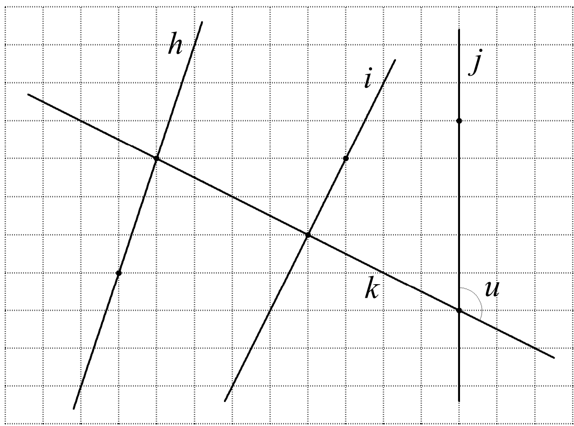
a) Er vinkel $u$ lig $90°$ ?

b) Hvilken af linjerne $h$ , $i$ og $j$ er vinkelret på linjen $k$ ?

c) Tegn en linje $l$ der er vinkelret på linjen $i$ .

d) Tegn en linje $m$ der er vinkelret på linjen $h$ .

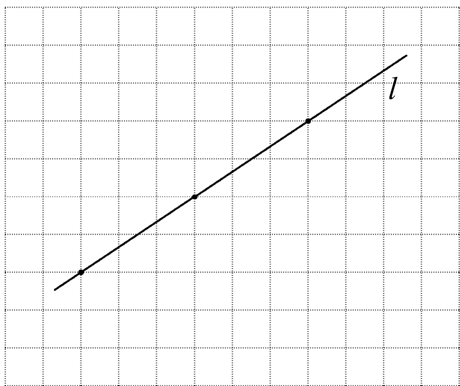
e) Tegn en linje $n$ der er vinkelret på linjen $j$ .



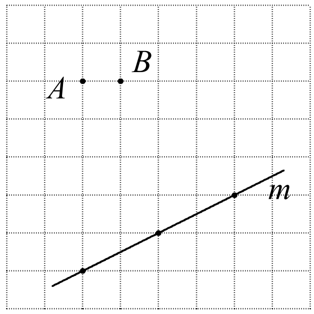

**17. Øvelse** *Linjer der står vinkelret på hinanden*

a) Tegn to forskellige linjer som begge er vinkelret på linjen $l$.

b) Tegn en linje som er forskellig fra $l$ og er vinkelret på de to linjer du tegnede som svar på a).



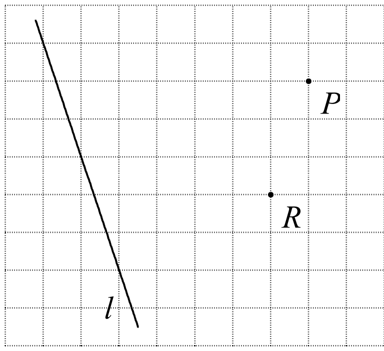
## 18. Øvelse *Linjer der står vinkelret på hinanden*




a) Tegn en linje der går gennem punktet $A$ og er vinkelret på linjen $m$.

b) Tegn en linje der går gennem punktet $B$ og er vinkelret på linjen $m$.

## 19. Øvelse *Projektion af punkt på linje*




a) Tegn det punkt $Q$ som er skæringspunkt mellem linjen $l$ og den linje gennem $P$ som er vinkelret på $l$.
   Dette punkt $Q$ kalder man

   <u>projektionen af $P$ på $l$</u> .

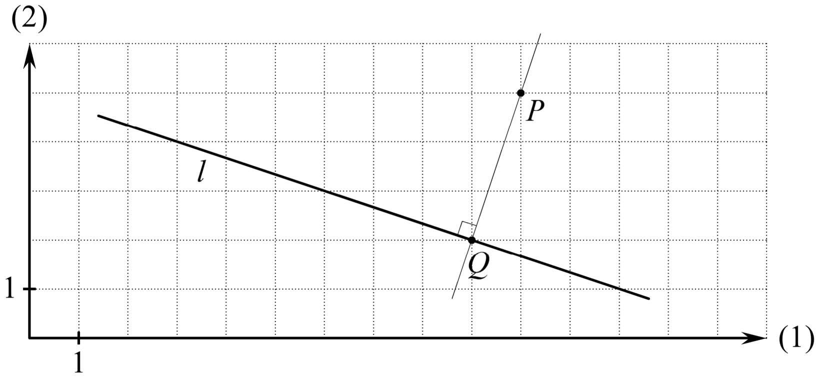
b) Tegn det punkt $S$ som er projektionen af $R$ på $l$.

## 20. Eksempel *Projektion af punkt på linje*

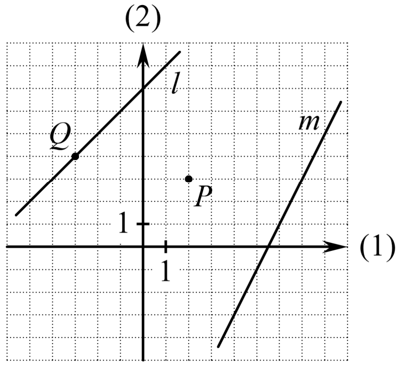
På figuren nedenfor er vist:

Projektionen af punktet $P$ på linjen $l$ er punktet $Q$.

For at tegne projektionen af $P$ på $l$ kan man tegne den linje som går gennem $P$ og er vinkelret på $l$. Skæringspunktet mellem denne linje og $l$ er projektionen af $P$ på $l$.




## 21. Øvelse *Projektion af punkt på linje*

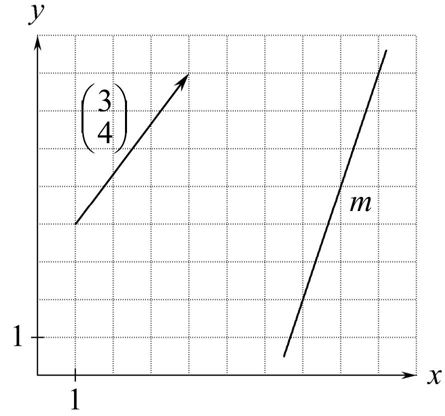



a) Projektionen af punktet $P$ på linjen $l$ kalder vi $R$.
   Tegn punktet $R$.

b) Projektionen af punktet $P$ på linjen $m$ kalder vi $S$.
   Tegn punktet $S$.

c) $T$ er det punkt på $m$ hvis projektion på $l$ er $Q$.
   Tegn punktet $T$.

**22. Øvelse** *Projektion af vektor på linje*




a) Tegn det punkt $A$ hvor pilen starter.

b) Tegn det punkt $B$ hvor pilen ender.

c) Tegn det punkt $C$ som er projektionen af $A$ på linjen $m$.

d) Tegn det punkt $D$ som er projektionen af $B$ på linjen $m$.

e) Tegn den pil der begynder i $C$ og ender i $D$.

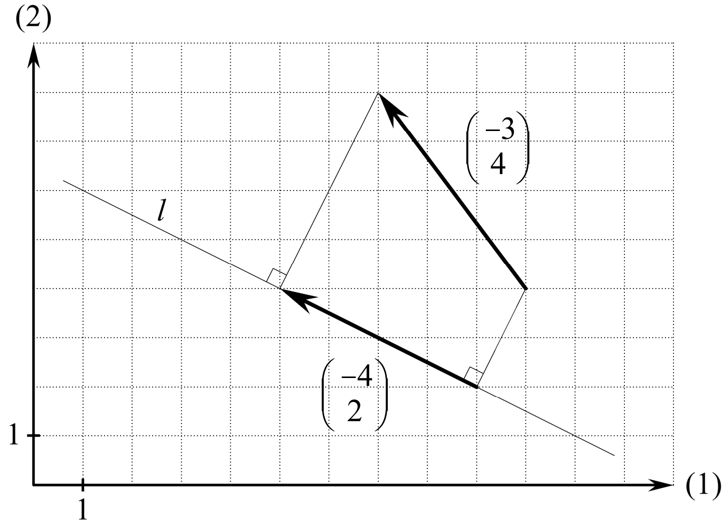
Den vektor du tegnede i e), er

projektionen af vektoren $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ på linjen $m$.

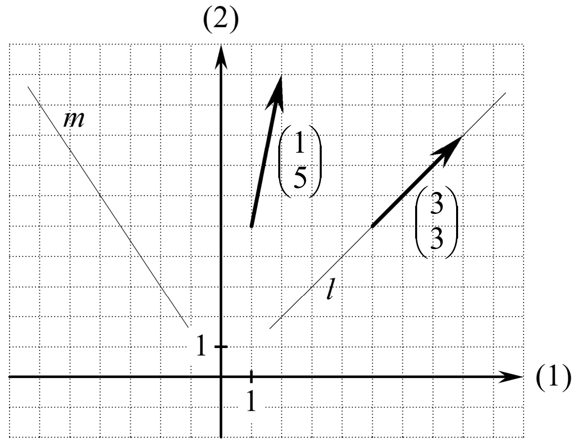
**23. Eksempel** *Projektion af vektor på linje*

På figuren er vist:

Projektionen af vektoren $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ på linjen $l$ er vektoren $\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$.




**24. Øvelse** *Projektion af vektor på linje*




a) Tegn den vektor der er projektionen af vektoren $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ på linjen $l$.

b) Tegn den vektor der er projektionen af vektoren $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ på linjen $m$. Denne vektor er $\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}$.

c) Bestem tre koordinatsæt for vektorer hvis projektion på $l$ er $\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\ \\ \ \end{pmatrix}$

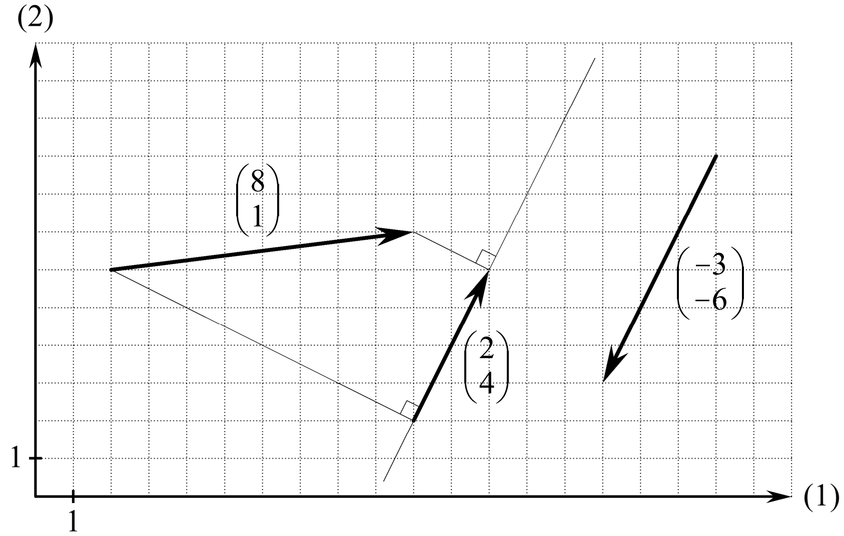
## 25. Eksempel *Projektion af vektor på vektor*

På figuren nedenfor er vist:

Projektionen af vektoren $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ på vektoren $\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ er vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

For at kunne tegne projektionen har vi tegnet en hjælpelinje der er parallel med $\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Ved projektion af vektorer er projektionen på $\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ det samme som projektionen på en linje der er parallel med $\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$. <u>Bemærk:</u> En vektor der ligger på en linje, er parallel med linjen.




## 26. Øvelse *Projektion af vektor på vektor*

a) Tegn en linje som er parallel med vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) Tegn den vektor som er projektionen af $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c) Projektionen af $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ er

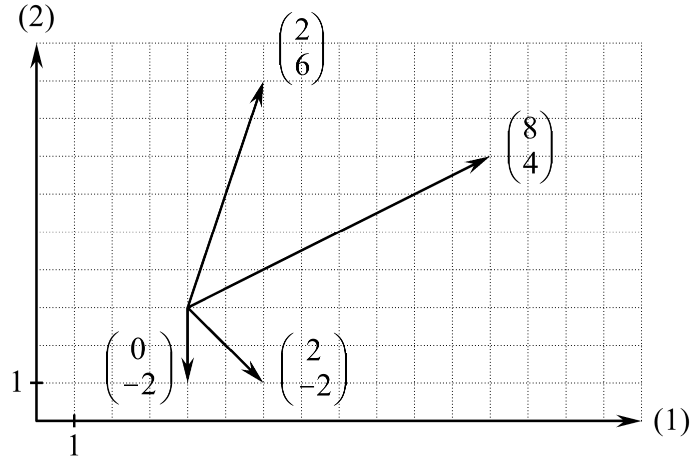
$\begin{pmatrix} \; \\ \; \end{pmatrix}$.

d) Projektionen af $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ er

$\begin{pmatrix} \; \\ \; \end{pmatrix}$.

e) Projektionen af $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ er

$\begin{pmatrix} \; \\ \; \end{pmatrix}$.

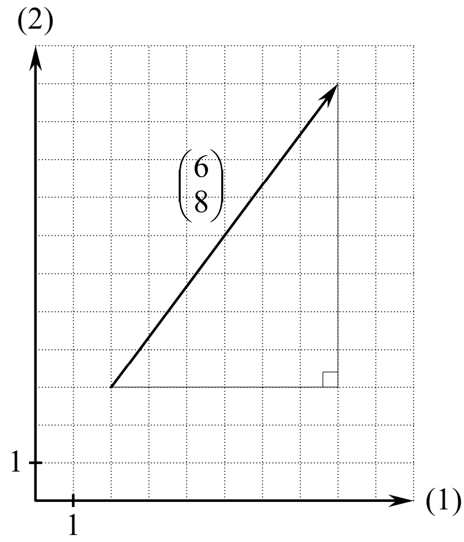


## 27. **Øvelse** *Længde af vektor*

a) Brug Pythagoras' sætning til at bestemme længden af vektoren $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$.

b) Når $c = \frac{1}{2}$, hvad er så længden af $\begin{pmatrix} c \cdot 6 \\ c \cdot 8 \end{pmatrix}$.

c) Bestem $c$ så længden af $\begin{pmatrix} c \cdot 6 \\ c \cdot 8 \end{pmatrix}$ er 1.



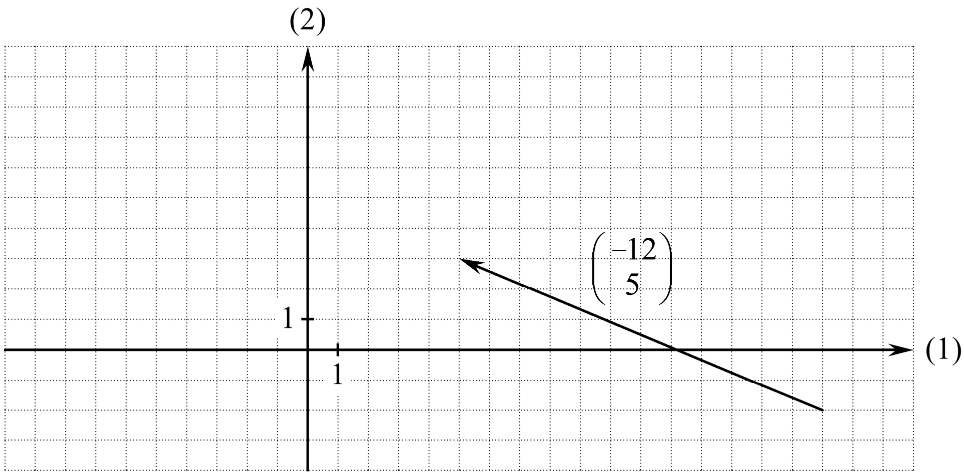

## 28. **Øvelse** *Længde af vektor*

a) Bestem længden af $\begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) Når $c = 2$, hvad er så længden af $\begin{pmatrix} c \cdot (-12) \\ c \cdot 5 \end{pmatrix}$?

c) Bestem $c$ så længden af $\begin{pmatrix} c \cdot (-12) \\ c \cdot 5 \end{pmatrix}$ er 1.

d) Bestem $c$ så længden af $\begin{pmatrix} c \cdot (-12) \\ c \cdot 5 \end{pmatrix}$ er 7 .



## 29. Øvelse *Projekt*

På figur 20 er vist en pil der går fra $E(2,1)$ til $B(6,4)$. Pilespidsens længde og bredde er $|AB|=1$ og $|CD|=1$.

a) $E$ føres over i $B$ ved forskydning med en vektor. Bestem vektorens koordinatsæt.

b) Beregn længden af denne vektor.

c) Beregn længden $|EA|$ ved hjælp af svaret på foregående spørgsmål og oplysningen om pilespidsens længde.

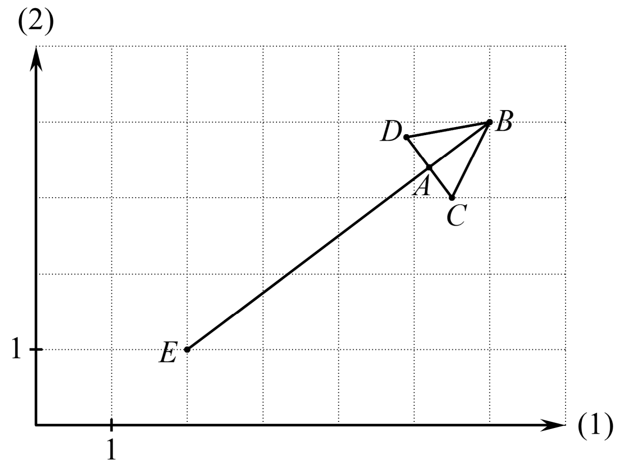
d) $E$ føres over i $A$ ved forskydning med en vektor. Bestem vektorens koordinatsæt ved at bruge svarene på de tre foregående spørgsmål.

e) Bestem koordinatsættet til $A$ ved bl.a. at bruge svaret på foregående spørgsmål.

f) Bestem koordinatsættet til en vektor der er vinkelret på linjestykket $EB$.

g) Beregn koordinatsættet til $D$ ved bl.a. at bruge svarene på de to foregående spørgsmål.

h) Beregn koordinatsættet til $C$.




i) Lav et elektronisk dokument med følgende definitioner:

AB=1
CD=1

Ex=2
Ey=1

Bx=6
By=4

Skriv udregningerne fra a)-h) med AB, CD, Ex osv. i stedet for 1, 1, 2 osv.

Du får brug for at vide at vi kan få en vektor der er vinkelret på $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ved at skrive $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.

Det skal være sådan at når du ændrer tallene i ovenstående definitioner, så udregnes automatisk koordinaterne til C og D.

Indret dokumentet sådan at pilen tegnes.
Lav det evt. sådan at man ser pilen ændre sig.
Lav evt. noget lignende med en anden figur du vælger.

Skriv en rapport hvor du gør rede for udregningerne.